Принято считать, что Солнце имеет угловой момент $J_\odot \approx 1{,}7 \times \times 10^{48}$ г·см^2·с$^{-1}$, масса его $M_\odot = 1{,}99 \cdot 10^{33}$ г. Тогда в наших естественных единицах, в которых 1 с $= 3 \cdot 10^{10}$ см, находим

$$\frac{J_\odot}{M_\odot} \approx 0{,}28 \text{ км}.$$

Далее, орбита Меркурия имеет $L = 55{,}3 \cdot 10^6$ км и $h = 9{,}03 \cdot 10^3$ км, поэтому поле ζ дает в прецессию перигелия Меркурия вклад, равный (в единицах рад/об)

$$\Delta\varphi \approx -2{,}06 \cdot 10^{-11},$$

или в более удобных единицах (угловая секунда за столетие)

$$\Delta\varphi_0 \approx -17{,}6 \cdot 10^{-4}.$$

Если даже Дикке и Голденберг правы и Солнце имеет угловой момент, в 25 раз больший, то прецессия, вызванная полем ζ, составляет примерно лишь 0,04″ за столетие, что слишком мало для того, чтобы быть замеченным.

Полезно еще раз подчеркнуть, что вычисленная полная прецессия должна представлять собой сумму следующих слагаемых: 1) ньютоновский член, равный 532″ за столетие; 2) эйнштейновский член, задаваемый формулой (9.5.17); 3) член (9.5.22), обусловленный ζ; 4) ньютоновский член, возникающий из-за точно неизвестной несферичности Солнца; 5) член, появляющийся из-за вклада вращения Солнца в анизотропную часть ψ; 6) член, обусловленный постньютоновскими поправками к возмущению, вызываемому другими планетами. При этом только ньютоновские члены и эйнштейновский член (9.5.17) достаточно велики, чтобы их можно было измерить.

§ 6. Прецессия движущегося по орбите гироскопа

В § 1 гл. 5 правило параллельного переноса указывало на то, что спин S_μ свободно падающей частицы прецессирует, т. е.

$$\frac{dS_\mu}{d\tau} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu} S_\lambda \frac{dx^\nu}{d\tau}. \tag{9.6.1}$$

Несколько лет назад Пью [2] и Шифф [3] предложили поместить гироскоп на околоземную орбиту и исследовать прецессию его вектора спина для выявления тонкой структуры гравитационного поля Земли. Шифф применил метод вычислений, предложенный Папапетроу [4, 5] и Фоком [6], согласно которому сперва рассматривается движение протяженного вращающегося тела, а затем размеры тела устремляются к нулю. Мы вместо этого с самого начала будем считать гироскоп точечной частицей, поскольку

именно для такой частицы верно утверждение принципа эквивалентности, что существует локально-инерциальная система отсчета, в которой прецессия спина *отсутствует*. Поэтому уравнение (9.6.1) можно рассматривать как обобщение этого факта на случай произвольной системы координат.

4-вектор спина S_μ по определению ортогонален скорости $\frac{dx^\mu}{d\tau}$:

$$\frac{dx^\mu}{d\tau} S_\mu = 0$$

[см. (5.1.9)]; иначе говоря,

$$S_0 = -v^i S_i. \tag{9.6.2}$$

Положим в (9.6.1) $\mu = i$, умножим это соотношение на $d\tau/dt$ и с помощью формулы (9.6.2) исключим S_0; в результате получим

$$\frac{dS_i}{dt} = \Gamma^j{}_{i0} S_j - \Gamma^0{}_{i0} v^j S_j + \Gamma^j{}_{ik} v^k S_j - \Gamma^0{}_{ik} v^k v^j S_j. \tag{9.6.3}$$

Постньютоновское приближение позволяет оценить коэффициенты при S_j в правой части (9.6.3) до членов порядка $\bar{v}^3/\bar{r}$:

$$\frac{dS_i}{dt} \approx [\overset{3}{\Gamma}{}^j{}_{i0} - \overset{2}{\Gamma}{}^0{}_{i0} v^j + \overset{2}{\Gamma}{}^j{}_{ik} v^k] S_j. \tag{9.6.4}$$

(Последний член здесь опущен, поскольку все компоненты $\overset{1}{\Gamma}{}^0_{ik}$ равны нулю.) Компоненты аффинной связности определяются выражениями (9.1.69), (9.1.70) и (9.1.72). Подставив их, получим

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} \approx \frac{1}{2} \mathbf{S} \times (\nabla \times \zeta) - \mathbf{S} \frac{\partial \phi}{\partial t} - 2(\mathbf{v} \cdot \mathbf{S}) \nabla \phi - \\ - \mathbf{S}(\mathbf{v} \cdot \nabla \phi) + \mathbf{v}(\mathbf{S} \cdot \nabla \phi). \tag{9.6.5}$$

Чтобы решить уравнение (9.6.5), используем тот факт, что при параллельном переносе величина $S_\mu S^\mu$ сохраняется [см. (5.1.10)], т. е. справедливо соотношение

$$\frac{d}{dt}(g^{\mu\nu} S_\mu S_\nu) = 0. \tag{9.6.6}$$

Из уравнения (9.6.4) видно, что скорость изменения $\mathbf{S}$ должна быть порядка $\mathbf{S} \cdot \bar{v}^3/\bar{r}$, а потому необходимо сохранять только те члены в $g^{\mu\nu} - \eta^{\mu\nu}$, скорости изменения которых сравнимы в системе координат частицы, движущейся со скоростью $\bar{v}$, т. е. только такие члены, градиенты которых имеют порядок $(\bar{v}^2/\bar{r})$. Следовательно, в уравнении (9.6.5) тензор $g^{\mu\nu}$ можно заменить на $\eta^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}$. Далее, величина $(S_0)^2$ порядка $\bar{v}^2$ по отношению к $\mathbf{S}^2$, поэтому нет необходимости удерживать член $\overset{2}{g}{}^{00}$. Таким образом, с заданной точностью будем считать, что уравнение (9.6.5) имеет следующий интеграл:

$$\mathbf{S}^2 + 2\phi \mathbf{S}^2 - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{S})^2 = \text{const}. \tag{9.6.7}$$

Это наводит на мысль ввести новый вектор спина $\mathscr{S}$, определяя его таким образом:

$$\mathbf{S} = (1-\phi)\,\mathscr{S} + \frac{1}{2}\,\mathbf{v}\,(\mathbf{v}\cdot\mathscr{S}). \tag{9.6.8}$$

Тогда с учетом членов порядка $\bar{v}^2 S^2$ выражение (9.6.8) приводит к условию

$$\mathscr{S}^2 = \text{const}. \tag{9.6.9}$$

В этом же приближении соотношение (9.6.8) можно обратить и оно запишется так:

$$\mathscr{S} = (1+\phi)\,\mathbf{S} - \frac{1}{2}\,\mathbf{v}\,(\mathbf{v}\cdot\mathbf{S}). \tag{9.6.10}$$

Чтобы вычислить скорость изменения $\mathscr{S}$ с учетом членов порядка $(\bar{v}^3/\bar{r})\,S$, нужно рассматривать $\mathbf{S}$ как константу везде, где оно появляется с коэффициентами порядка $\bar{v}^2$ и положить $d\mathbf{v}/dt \approx -\nabla\phi$:

$$\frac{d\mathscr{S}}{dt} = \frac{d\mathbf{S}}{dt} + \mathbf{S}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\phi\right) + \frac{1}{2}\nabla\phi\,(\mathbf{v}\cdot\mathbf{S}) + \frac{1}{2}\,\mathbf{v}\,(\mathbf{S}\cdot\nabla\phi),$$

подставив сюда (9.6.5), найдем с учетом членов порядка $(\bar{v}^3/\bar{r})\,\mathscr{S}$

$$\frac{d\mathscr{S}}{dt} = \mathbf{\Omega}\times\mathscr{S}, \tag{9.6.11}$$

где

$$\mathbf{\Omega} = -\frac{1}{2}\nabla\times\boldsymbol{\zeta} - \frac{3}{2}\,\mathbf{v}\times\nabla\phi. \tag{9.6.12}$$

Уравнение (9.6.11) показывает, что вектор $\mathscr{S}$, оставаясь неизменным по величине, лишь прецессирует со скоростью $|\mathbf{\Omega}|$ вокруг направления вектора $\mathbf{\Omega}$.

Какое отношение имеет это все к прецессии гироскопа в свободном падении? Ответ, как всегда, следует искать, обращаясь к методу, реально используемому для измерения эффекта. В данном случае направление спина гироскопа контролируют, измеряя *в инерциальной системе, связанной с гироскопом*, углы θ между спином гироскопа $\mathbf{S}_g$ в этой системе и векторами скорости $\mathbf{u}_g$ световых лучей, идущих от одной или нескольких удаленных звезд:

$$\cos\theta = \mathbf{S}_g\cdot\frac{\mathbf{u}_g}{|\mathbf{S}_g|\,|\mathbf{u}_g|}. \tag{9.6.13}$$

(Этот угол можно измерить, фокусируя изображение звезды на систему фотоэлементов, так что изменение угла θ приведет к перемещению изображения вдоль системы, вызывая тем самым изменение фототока.) В инерциальной системе, связанной с гироско-

пом, световые лучи движутся с единичной скоростью

$$|\mathbf{u}_g| = 1,$$

временные компоненты $S_{g\mu}$ исчезают [см. (9.6.2)]:

$$S_{g0} = 0,$$

а вектор $\mathbf{S}_g$ сохраняет свою величину:

$$|\mathbf{S}_g| = (S_{g\mu}S_g^{\mu})^{1/2}.$$

Тогда измеряемый угол θ можно выразить в виде

$$\cos\theta = \frac{S_\mu u^\mu}{(S_\mu S^\mu)^{1/2}}. \tag{9.6.14}$$

Поскольку эта величина является инвариантом, нет больше необходимости ограничивать себя довольно неудобной инерциальной системой координат, связанной с гироскопом, а можно задавать 4-векторы спина S_μ и скорости света u^μ в любой удобной системе координат, например в системе отсчета, связанной с Землей. В такой системе 4-вектор скорости светового луча, идущего от звезды, равен

$$u^i = u^i_\infty + \delta u^i,$$
$$u^0 = 1 + \delta u^0,$$

где $\mathbf{u}_\infty$ — фиксированный единичный вектор, задающий скорость света на больших расстояниях от Земли, а δu^μ — поправки порядка $M_\oplus G/r \sim \bar{v}^2$ к скорости и направлению световых лучей, возникающие из-за гравитационного поля Земли. С учетом членов порядка $\bar{v}^2$ выражения (9.6.10) и (9.6.2) дают следующий результат:

$$S_i = \mathscr{S}_i - \phi\mathscr{S}_i + \frac{1}{2}v_i(\mathbf{v}\cdot\mathscr{S}) + O(\bar{v}^4),$$

$$S_0 = -\mathbf{v}\cdot\mathscr{S} + O(\bar{v}^3).$$

Таким образом, соотношение (9.6.14) приводит к следующему выражению для измеряемого угла θ:

$$\cos\theta \sim \hat{\mathscr{S}}\cdot\left[\mathbf{u}_\infty - \mathbf{v} + \delta\mathbf{u} - \phi\mathbf{u}_\infty + \frac{1}{2}\mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_\infty)\right], \tag{9.6.15}$$

где $\hat{\mathscr{S}} = \mathscr{S}/|\mathscr{S}|$. Член $-\mathbf{v}$ соответствует *аберрации света звезд* — важному эффекту, известному еще с XVIII в., который, конечно, должен быть учтен. Кроме этого члена, очевидно, что $\cos\theta$ меняется также со временем, поскольку $\delta\mathbf{u}$, ϕ и $\mathbf{v}$ изменяются при вращении гироскопа вокруг Земли, а также из-за того, что $\hat{\mathscr{S}}$ прецессирует с угловой частотой $\mathbf{\Omega}$. В действительности, кроме

аберрации, остальные вклады в изменение значения $\cos\theta$, возникающие из-за варьирования при одном обороте величин $\delta\mathbf{u}$, ϕ, $\mathbf{v}$ и $\mathscr{S}$, имеют порядок $\bar{v}^2$ [см. выражения (8.5.8) и (9.6.12)]. Поэтому, чтобы измерить прецессию величины $\mathscr{S}$ при одном обороте гироскопа, необходимо измерять θ с точностью до 10^{-10} рад, но даже и в этом случае для того, чтобы интерпретировать результат как проявление спиновой прецессии, мы должны будем в (9.6.15) отделить его от эффекта отклонения света $\delta\mathbf{u}$ и других вкладов. К счастью, прецессия спина имеет одно свойство, позволяющее отделить ее от всех других эффектов, — это ее *кумулятивность*. При большом числе оборотов N направление спина изменится на величину порядка $N\bar{v}^2$, в то время как вклады от $\delta\mathbf{u}$, ϕ, $\mathbf{v}$ $(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_\infty)$ будут по-прежнему иметь порядок $\bar{v}^2$; поэтому с учетом аберрации изменение θ хорошо аппроксимируется изменением лишь величины $\hat{\mathscr{S}}$, т. е.

$$\Delta(\cos\theta) \approx \mathbf{u}_\infty\cdot\Delta\hat{\mathscr{S}}. \tag{9.6.16}$$

Поэтому мы можем утверждать, что прецессия $\mathbf{\Omega}$ вектора $\mathscr{S}$ является непосредственно измеряемым эффектом: нужно лишь набраться терпения и дождаться, пока гироскоп совершит достаточно большое число оборотов вокруг Земли.

Вернемся теперь к вопросу о вычислении вектора $\mathbf{\Omega}$: если рассматривать Землю как сферу, которая вращается, но не перемещается, то с помощью формул (9.4.34) и (9.4.22) поля $\boldsymbol{\zeta}$ и ϕ можно записать в виде

$$\phi = -\frac{GM_\oplus}{r}, \qquad \boldsymbol{\zeta} = \frac{2G}{r^3}(\mathbf{x}\times\mathbf{J}_\oplus).$$

Тогда частота прецессии (9.6.12) равна

$$\mathbf{\Omega} = 3G\mathbf{x}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{J}_\oplus)\,r^{-5} - G\mathbf{J}_\oplus r^{-3} + \frac{3GM_\oplus(\mathbf{x}\times\mathbf{v})}{2r^3}. \tag{9.6.17}$$

Последний член в этом выражении, зависящий только от массы Земли, но не от ее спина, называется *геодезической прецессией* [7—9]; это в основном томасова прецессия, вызываемая гравитацией (§ 1 гл. 5). Первые два члена в (9.6.17) соответствуют взаимодействию между спиновым и орбитальным угловыми моментами гироскопа и Земли, подобно сверхтонкому взаимодействию в атомной физике. Если для простоты считать орбиту гироскопа окружностью радиусом r, единичная нормаль к которой есть $\hat{\mathbf{h}}$, то скорость гироскопа равна

$$\mathbf{v} = -\left(\frac{M_\oplus G}{r^3}\right)^{1/2}(\mathbf{x}\times\hat{\mathbf{h}}), \tag{9.6.18}$$

а средняя за один оборот частота прецессии вычисляется по формуле

$$\langle \mathbf{\Omega} \rangle = \frac{(\mathbf{J}_\oplus - \hat{\mathbf{h}}\,(\hat{\mathbf{h}}\cdot\mathbf{J}_\oplus))\,G}{2r^3} + 3\,(M_\oplus G)^{3/2}\frac{\hat{\mathbf{h}}}{2r^{5/2}}. \qquad (9.6.19)$$

Оба члена в (9.6.19) имеют максимум при минимально возможном значении r, т. е. при значении, равном примерно радиусу Земли $R_\oplus$. При этом нижний предел отношения первого, «сверхтонкого» члена ко второму, геодезическому, имеет следующий порядок:

$$\frac{\text{Сверхтонкий}}{\text{Геодезический}} \approx \frac{J_\oplus G}{3\,(M_\oplus G)^{3/2}\,R_\oplus^{1/2}} = 6{,}5\cdot 10^{-3}, \qquad (9.6.20)$$

так что основным эффектом является прецессия спина вокруг орбитального углового момента $\mathbf{h}$, происходящая со средней частотой (в угловых секундах за год):

$$\langle |\mathbf{\Omega}| \rangle \approx \frac{3\,(M_\oplus G)^{3/2}}{2r^{5/2}} \approx 8{,}4\left(\frac{R_\oplus}{r}\right)^{5/2}. \qquad (9.6.21)$$

Эту величину и надо измерить [10—12, 20]. Для того чтобы детектировать малую «сверхтонкую» прецессию, удобно ориентировать спин гироскопа по нормали $\hat{\mathbf{h}}$ к плоскости орбиты; в этом случае слагаемые в $\mathbf{\Omega}$, параллельные $\hat{\mathbf{h}}$, не дают вклада [см. уравнение (9.6.11)], и результирующая прецессия будет происходить как раз вокруг $\mathbf{J}_\oplus$. Величина и направление средней результирующей прецессии равны (в угловых секундах за год)

$$\langle \mathbf{\Omega} \rangle_{\text{эфф}} = \frac{G\mathbf{J}_\oplus}{2r^3}, \qquad (9.6.22)$$

$$|\langle \mathbf{\Omega} \rangle_{\text{эфф}}| = 0{,}055\left(\frac{R_\oplus}{r}\right)^3. \qquad (9.6.23)$$

Для того чтобы сделать максимальным эффект этой весьма малой прецессии, необходимо расположить спиновую ось гироскопа перпендикулярно $\mathbf{J}_\oplus$; поскольку она должна быть также перпендикулярна плоскости орбиты, наиболее выгодно вывести гироскоп на полярную орбиту, причем спин гироскопа должен быть параллелен экваториальной плоскости Земли.

Если использовать в этой задаче искусственный спутник, находящийся на эллиптической орбите, то в приведенных выше выражениях нужно везде просто заменить радиус r величиной фокального параметра L. Легко также учесть эффект возможного отклонения от эйнштейновских полевых уравнений. Для произвольной статической сферически-симметричной метрики в изотропных координатах (с $\alpha \equiv 1$) разложение Робертсона (8.3.1)

дает следующий результат:

$$\overset{2}{g}_{00} = -2\phi, \qquad \overset{2}{g}_{ij} = -2\gamma\phi\delta_{ij}, \qquad \overset{3}{g}_{i0} = 0,$$

где ϕ, как обычно, есть $-GM/r$, а γ — безразмерная константа, которая в теории Эйнштейна должна быть равна единице. Обращаясь вновь к формулам (9.1.18), (9.1.19) и (9.1.21), мы видим, что сейчас

$$\overset{2}{\Gamma}{}^{j}_{ik} = \gamma\left[-\frac{\partial\phi}{\partial x^k}\delta_{ij} - \frac{\partial\phi}{\partial x^i}\delta_{jk} + \frac{\partial\phi}{\partial x^j}\delta_{ik}\right],$$

$$\overset{2}{\Gamma}{}^{0}_{i0} = \frac{\partial\phi}{\partial x^i},$$

$$\overset{3}{\Gamma}{}^{j}_{i0} = 0.$$

Подставляя эти выражения в (9.6.4), получаем следующее выражение для скорости изменения спина:

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = -(1+\gamma)(\mathbf{v}\cdot\mathbf{S})\nabla\phi - \gamma(\mathbf{v}\cdot\nabla\phi)\mathbf{S} + \gamma(\mathbf{S}\cdot\nabla\phi)\mathbf{v}.$$

Как и раньше, удобно ввести следующий вектор спина, который имел бы постоянную величину:

$$\mathcal{S} \equiv (1+\gamma\phi)\mathbf{S} - \frac{1}{2}\mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{S}).$$

Вектор $\mathcal{S}$ также прецессирует вокруг вектора $\mathbf{\Omega}$:

$$\frac{d\mathcal{S}}{dt} = \mathbf{\Omega}\times\mathcal{S},$$

но теперь $\mathbf{\Omega}$ задается уже таким образом:

$$\mathbf{\Omega} = -\left(\frac{1}{2}+\gamma\right)(\mathbf{v}\times\nabla\phi). \tag{9.6.24}$$

Следовательно, видоизменение уравнений поля Эйнштейна, учитывающее эффект геодезической прецессии, сводится просто к умножению уравнения на множитель

$$\frac{1+2\gamma}{3}.$$

Чтобы проследить, как сказывается на векторе $\mathbf{\Omega}$ видоизменение уравнений поля Эйнштейна для системы, не являющейся ни статической, ни сферически-симметричной, необходимо знать детали новой теории. Мы еще вернемся к этому вопросу в § 9 этой главы.

§ 7. Прецессия спина и принцип Маха *

Прецессия спина, рассчитанная в предыдущем параграфе, имеет замечательную интерпретацию на основе идей Эрнста Маха, обсужденных в § 3 гл. 1. Напомним, что спин свободно