дает следующий результат:

$$\overset{2}{g}_{00} = -2\phi, \qquad \overset{2}{g}_{ij} = -2\gamma\phi\delta_{ij}, \qquad \overset{3}{g}_{i0} = 0,$$

где ϕ, как обычно, есть $-GM/r$, а γ — безразмерная константа, которая в теории Эйнштейна должна быть равна единице. Обращаясь вновь к формулам (9.1.18), (9.1.19) и (9.1.21), мы видим, что сейчас

$$\overset{2}{\Gamma}{}^{j}{}_{ik} = \gamma\left[-\frac{\partial\phi}{\partial x^k}\delta_{ij} - \frac{\partial\phi}{\partial x^i}\delta_{jk} + \frac{\partial\phi}{\partial x^j}\delta_{ik}\right],$$

$$\overset{2}{\Gamma}{}^{0}{}_{i0} = \frac{\partial\phi}{\partial x^i},$$

$$\overset{3}{\Gamma}{}^{j}{}_{i0} = 0.$$

Подставляя эти выражения в (9.6.4), получаем следующее выражение для скорости изменения спина:

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = -(1+\gamma)(\mathbf{v}\cdot\mathbf{S})\nabla\phi - \gamma(\mathbf{v}\cdot\nabla\phi)\mathbf{S} + \gamma(\mathbf{S}\cdot\nabla\phi)\mathbf{v}.$$

Как и раньше, удобно ввести следующий вектор спина, который имел бы постоянную величину:

$$\mathscr{S} \equiv (1+\gamma\phi)\mathbf{S} - \frac{1}{2}\mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{S}).$$

Вектор $\mathscr{S}$ также прецессирует вокруг вектора $\mathbf{\Omega}$:

$$\frac{d\mathscr{S}}{dt} = \mathbf{\Omega}\times\mathscr{S},$$

но теперь $\mathbf{\Omega}$ задается уже таким образом:

$$\mathbf{\Omega} = -\left(\frac{1}{2}+\gamma\right)(\mathbf{v}\times\nabla\phi). \qquad (9.6.24)$$

Следовательно, видоизменение уравнений поля Эйнштейна, учитывающее эффект геодезической прецессии, сводится просто к умножению уравнения на множитель

$$\frac{1+2\gamma}{3}.$$

Чтобы проследить, как сказывается на векторе $\mathbf{\Omega}$ видоизменение уравнений поля Эйнштейна для системы, не являющейся ни статической, ни сферически-симметричной, необходимо знать детали новой теории. Мы еще вернемся к этому вопросу в § 9 этой главы.

§ 7. Прецессия спина и принцип Маха *

Прецессия спина, рассчитанная в предыдущем параграфе, имеет замечательную интерпретацию на основе идей Эрнста Маха, обсужденных в § 3 гл. 1. Напомним, что спин свободно падающего гироскопа не прецессирует в инерциальной системе координат, перемещающейся вместе с гироскопом. В этом как раз и заключается смысл уравнения параллельного переноса (9.6.1). Следовательно, в другой системе, связанной, допустим, с Землей, прецессия $\mathbf{\Omega}$ гироскопа возникает исключительно из-за того, что инерциальная система, связанная с гироскопом, вращается с угловой частотой $\mathbf{\Omega}$ относительно Земли и отдаленных звезд. Это объясняет, почему $\mathbf{\Omega}$ не зависит от скорости вращения гироскопа; *любой* вектор, сохраняющий в инерциальной системе фиксированное направление, в лабораторной системе или системе, связанной в Землей, будет прецессировать с угловой частотой $\mathbf{\Omega}$, задаваемой уравнением (9.6.12).

Почему же инерциальная система, падающая вместе с гироскопом, вращается относительно удаленных звезд? Мах утверждает, что инерциальные силы возникают из-за ускорений, в том числе и из-за вращений, относительно всей материи Вселенной, и поэтому система отсчета будет инерциальной, если она не движется ускоренно относительно некоторого среднего распределения материи во Вселенной. Обычно это означает, что инерциальная система не вращается относительно удаленных звезд. Однако наблюдатель на гироскопе, вращающемся вокруг Земли, видит, что распределение массы обусловливается не только удаленными звездами, но и большим сферическим телом, называемым Землей, которое, с его точки зрения, совершает обороты вокруг гироскопа за каждые ~ 90 мин и вокруг собственной оси. Следовательно, определение инерциальных систем отсчета, связанных с гироскопом, должно содержать некоторый компромисс в ориентации гироскопа либо на отдаленные звезды, либо на Землю. В действительности гироскоп пытается вращаться в том же направлении, что и вращение и кажущееся обращение вокруг него Земли, однако он не успевает следовать за ними, и удаленные звезды всегда побеждают в этой борьбе.

Довольно расплывчатые идеи такого сорта, вытекающие из принципа Маха, нашли свое конкретное выражение в подробных вычислениях, основанных на принципе эквивалентности. Выражение (9.6.19) указывало на то, что прецессия вращающегося на орбите гироскопа, а следовательно, и вращение связанной с ним инерциальной системы слагаются из малого «геодезического» члена, параллельного орбитальному угловому моменту $\mathbf{h}$, и столь же малого «сверхтонкого» члена, параллельного той компоненте спина Земли $\mathbf{J}_{\oplus}$, который перпендикулярен $\mathbf{h}$. Таким образом оказывается, что вращение и кажущееся обращение Земли вокруг гироскопа в какой-то мере воздействуют на инерциальную систему, падающую вместе с гироскопом.

Этот эффект легче понять, проделав мысленный эксперимент, обсуждавшийся Лензе и Тиррингом [13, 14] вскоре после создания общей теории относительности. Они рассмотрели полую сферическую оболочку, вращающуюся как целое с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$. Согласно уравнению (9.4.35), метрика поля $\boldsymbol{\zeta}$ внутри сферы определяется следующим образом:

$$\boldsymbol{\zeta} = \mathbf{x} \times \boldsymbol{\Omega},$$

где

$$\boldsymbol{\Omega} = -4\phi \frac{\boldsymbol{\omega}}{3},$$

а ϕ — постоянный гравитационный потенциал внутри сферы, равный

$$\phi = -4\pi G \int\limits_{\text{оболочка}} \overset{0}{T}{}^{00}(r')\, r'\, dr'.$$

Формула (9.6.12) показывает, что любая инерциальная система внутри сферы вращается с угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega}$.

Заметим, что $\boldsymbol{\Omega}$ параллельно $\boldsymbol{\omega}$, но по величине меньше его за счет безразмерного множителя $-4\phi/3$. Поэтому интересно посмотреть, что же будет, если оболочку сделать настолько массивной, чтобы величина ϕ приблизилась к значению $-{}^3/_4$. Исчезнет ли связь инерциальных систем внутри оболочки с удаленными звездами и будут ли они следовать за вращением оболочки с частотой $\boldsymbol{\omega}$? [Прислушаемся к отзвуку того далекого замечания Маха об эксперименте Ньютона с ведром воды, о котором говорилось в § 3 гл. 1: «Никто не может с уверенностью сказать, каков был бы результат эксперимента, если бы толщина (а также масса стенок сосуда) возрастала до тех пор, пока не заняла бы несколько лиг» [1].] К сожалению, постньютоновский метод перестает работать как раз тогда, когда эта проблема становится интересной, т. е. когда $|\phi|$ становится порядка единицы. Точное решение уравнений Эйнштейна, которое *выглядит* подобно метрике пространства вне вращающейся сферы, было найдено Керром [15]; оно имеет вид

$$-d\tau^2 = -dt^2 + d\mathbf{x}^2 + \frac{2MG\rho}{(\rho^4 + (\mathbf{x}\cdot\mathbf{a})^2)(\rho^2 + \mathbf{a}^2)^2} \times$$
$$\times [\rho^2 \mathbf{x}\cdot d\mathbf{x} + \rho\, d\mathbf{x}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{x}) + (\mathbf{a}\cdot\mathbf{x})(\mathbf{a}\cdot d\mathbf{x}) + (\rho^2 + \mathbf{a}^2)\rho\, dt]^2.$$

Здесь $\mathbf{x}$ — квазиевклидов 3-вектор; $\mathbf{a}$ — некоторый постоянный вектор; скалярные произведения $\mathbf{x}\cdot\mathbf{a}$, $\mathbf{x}^2$ и т. д. определены так же, как и в евклидовой геометрии, а ρ задано следующим образом:

$$\rho^4 - (r^2 - \mathbf{a}^2)\rho^2 - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{x})^2 = 0,$$

[1]) Лига — мера длины, равная 4,83 км.

где, как обычно, $r^2 \equiv \mathbf{x}^2$. При $r \to \infty$ имеем $\rho \to r$, и метрические коэффициенты принимают вид

$$g_{00} \to -1 + \frac{2MG}{r} + O\left(\frac{1}{r^2}\right),$$

$$g_{0i} \to \frac{2MG}{r^2}\left\{x_i + \frac{1}{r}(\mathbf{a}\times\mathbf{x})_i\right\} + O\left(\frac{1}{r^3}\right),$$

$$g_{ij} \to \delta_{ij} + \frac{2MG}{r^3}x_i x_j + O\left(\frac{1}{r^2}\right).$$

Непосредственное вычисление с использованием выражений (7.6.22) — (7.6.24) показывает, что полные импульс, энергия и угловой момент системы вместе с *ее гравитационным полем* имеют вид

$$\mathbf{P} = 0, \qquad P^0 = M, \qquad \mathbf{J} = M\mathbf{a}.$$

К сожалению, все еще не удалось показать, что это точное внешнее решение плавно переходит в точное решение для внутренней области вращающейся сферы. Недавно Брилл и Коэн [16] нашли такое решение для очень тонкой вращающейся сферической оболочки радиусом R, которое справедливо в низшем порядке по частоте вращения ω как внутри, так и вне ее, но справедливо во всех порядках по массе оболочки M, а также удовлетворяет корректным условиям непрерывности при пересечении поверхности оболочки. Это решение имеет вид

$$-d\tau^2 = -H(r)\,dt^2 + J(r)\,[dr^2 + r^2\,d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\,(d\varphi - \Omega(r)\,dt)^2],$$

где

$$H(r) = \begin{cases} \left(\dfrac{1-2MG/r}{1+2MG/r}\right)^2, & r > R, \\ \left(\dfrac{1-2MG/R}{1+2MG/R}\right)^2, & r < R, \end{cases}$$

$$J(r) = \begin{cases} (1+2MG/r)^4, & r > R, \\ (1+2MG/R)^4, & r < R. \end{cases}$$

Внутри сферы угловая скорость $\Omega(r)$ постоянна и равна

$$\Omega = \omega\left[1 + \frac{3(R-2MG)}{4MG(1+\beta)}\right]^{-1}, \qquad r < R,$$

где β — безразмерная константа, зависящая от относительных вкладов T^{ij} и T^{00} в гравитационную массу оболочки. Если мы определим новые координаты

$$t' = \sqrt{H}\,t, \qquad r' = \sqrt{J}\,r \qquad \varphi' = \varphi - \Omega t,$$

то придем к инерциальной системе координат вне сферы. Тогда Ω есть частота вращения (в единицах t) инерциальной системы внутри оболочки относительно системы Минковского на бесконечности. Когда величины MG и β малы, то Ω/ω близко к значению постньютоновского приближения $4MG/3R$; если же MG настолько велико, что шварцшильдовский радиус оболочки $2MG$ примерно тот же, что и радиус оболочки R, отношение Ω/ω приближается к единице, как, возможно, и предполагал Мах.

§ 8. Постньютоновская гидродинамика*

Постньютоновская программа, очерченная в § 1—3 этой главы, могла бы служить надежной основой для релятивистской небесной механики, если бы можно было рассматривать Солнце и планеты как точечные частицы. Однако это не соответствует действительности; например, приливные силы на Луне, связанные с ее конечными размерами, намного больше, чем постньютоновские поправки к гравитационному полю Земли. Часто такие эффекты, связанные с конечными размерами, можно достаточно точно вычислить, если считать, что астрономические тела состоят из идеальной жидкости [17—19] [1]). Тогда тензор энергии-импульса, задаваемый выражением (5.4.2), равен

$$T^{\mu\nu} = pg^{\mu\nu} + (p + \rho)\, U^{\mu}U^{\nu}. \tag{9.8.1}$$

Здесь p и ρ — собственные давление и плотность энергии, т. е. те значения, которые измеряются локально-сопутствующим и свободно падающим наблюдателем, а U^{μ} — 4-вектор скорости $dx^{\mu}/d\tau$. (Конечно, p и ρ равны нулю везде, исключая области внутри Солнца и планет.) Чтобы вычислить U^{μ}, положим

$$\frac{U^i}{U^0} = \frac{dx^i}{dt} \equiv v^i \tag{9.8.2}$$

и вычислим U^0 с помощью (9.2.2):

$$U^0 = \frac{dt}{d\tau} = 1 - \phi + \frac{1}{2}v^2 + O(\bar{v}^4). \tag{9.8.3}$$

Программа вычисления движения жидкости в значительной мере зависит от того, существует ли уравнение состояния, задающее p в виде функции от ρ, как в случае холодной вырожденной жидкости (гл. 11), или же p будет зависеть также и от температуры. Если давление есть функция только ρ, то наша программа, в сущности, та же, что и в § 3 гл. 9, а именно:

А. Необходимо сперва решить задачу Ньютона. При этом можно считать, что давление имеет порядок $\bar{v}^2\bar{M}/\bar{r}^3$, и, следовательно, нужные компоненты тензора энергии-импульса записы-

[1]) Постньютоновские уравнения были исследованы в работе [17]. Для ознакомления с пост-постньютоновскими уравнениями можно рекомендовать работу [18]. Эффекты радиационных реакций были учтены в работе [19].