внутри оболочки относительно системы Минковского на бесконечности. Когда величины MG и β малы, то Ω/ω близко к значению постньютоновского приближения $4MG/3R$; если же MG настолько велико, что шварцшильдовский радиус оболочки $2MG$ примерно тот же, что и радиус оболочки R, отношение Ω/ω приближается к единице, как, возможно, и предполагал Мах.

§ 8. Постньютоновская гидродинамика*

Постньютоновская программа, очерченная в § 1—3 этой главы, могла бы служить надежной основой для релятивистской небесной механики, если бы можно было рассматривать Солнце и планеты как точечные частицы. Однако это не соответствует действительности; например, приливные силы на Луне, связанные с ее конечными размерами, намного больше, чем постньютоновские поправки к гравитационному полю Земли. Часто такие эффекты, связанные с конечными размерами, можно достаточно точно вычислить, если считать, что астрономические тела состоят из идеальной жидкости [17—19] [1]. Тогда тензор энергии-импульса, задаваемый выражением (5.4.2), равен

$$T^{\mu\nu} = pg^{\mu\nu} + (p+\rho)\, U^{\mu}U^{\nu}. \tag{9.8.1}$$

Здесь p и ρ — собственные давление и плотность энергии, т. е. те значения, которые измеряются локально-сопутствующим и свободно падающим наблюдателем, а U^{μ} — 4-вектор скорости $dx^{\mu}/d\tau$. (Конечно, p и ρ равны нулю везде, исключая области внутри Солнца и планет.) Чтобы вычислить U^{μ}, положим

$$\frac{U^i}{U^0} = \frac{dx^i}{dt} \equiv v^i \tag{9.8.2}$$

и вычислим U^0 с помощью (9.2.2):

$$U^0 = \frac{dt}{d\tau} = 1 - \phi + \frac{1}{2} v^2 + O(\bar{v}^4). \tag{9.8.3}$$

Программа вычисления движения жидкости в значительной мере зависит от того, существует ли уравнение состояния, задающее p в виде функции от ρ, как в случае холодной вырожденной жидкости (гл. 11), или же p будет зависеть также и от температуры. Если давление есть функция только ρ, то наша программа, в сущности, та же, что и в § 3 гл. 9, а именно:

А. Необходимо сперва решить задачу Ньютона. При этом можно считать, что давление имеет порядок $\bar{v}^2\bar{M}/\bar{r}^3$, и, следовательно, нужные компоненты тензора энергии-импульса записы-

---

[1]) Постньютоновские уравнения были исследованы в работе [17]. Для ознакомления с пост-постньютоновскими уравнениями можно рекомендовать работу [18]. Эффекты радиационных реакций были учтены в работе [19].

ваются с помощью выражений (9.8.1) — (9.8.3) в виде

$$\overset{0}{T}{}^{00}=\rho, \tag{9.8.4}$$

$$\overset{1}{T}{}^{i0}=\rho v_i, \tag{9.8.5}$$

$$\overset{2}{T}{}^{ij}=p\delta_{ij}+\rho v_i v_j. \tag{9.8.6}$$

К ньютоновским уравнениям движения можно прийти, подставляя выражения (9.8.4) — (9.8.6) в уравнения сохранения массы и импульса (9.3.2) и (9.3.3):

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\mathbf{v})=0, \tag{9.8.7}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\mathbf{v})+\nabla\cdot(\rho\mathbf{v}\mathbf{v})=-\rho\nabla\phi-\nabla p, \tag{9.8.8}$$

где p задается уравнением состояния в виде функии от ρ, а ϕ определяется уравнением Пуассона (9.3.12)

$$\nabla^2\phi=4\pi G\rho. \tag{9.8.9}$$

Б. Использовать величины ρ, p, $\mathbf{v}$ и ϕ, определенные в А, чтобы вычислить компоненты (9.8.4) — (9.8.6) тензора $T^{\mu\nu}$, а также величину

$$\overset{2}{T}{}^{00}=\rho(\mathbf{v}^2-2\phi). \tag{9.8.10}$$

В. Использовать результаты А и Б, а также выражения (9.1.62) и (9.1.65), чтобы рассчитать постньютоновские поля ζ и ψ.

Г. Найти ρ, p и $\mathbf{v}$ в постньютоновском приближении. В заданном порядке тензор энергии-импульса определяется выражениями (9.8.1) — (9.8.3) в виде

$$\overset{0}{T}{}^{00}+\overset{2}{T}{}^{00}=\rho(1+\mathbf{v}^2-2\phi), \tag{9.8.11}$$

$$\overset{1}{T}{}^{i0}+\overset{3}{T}{}^{i0}=(\rho+p+\mathbf{v}^2\rho-2\phi\rho)\mathbf{v}, \tag{9.8.12}$$

$$\overset{2}{T}{}^{ij}+\overset{4}{T}{}^{ij}=p\delta_{ij}(1+2\phi)+v^i v^j(p+\rho-2\phi\rho+\phi\mathbf{v}^2), \tag{9.8.13}$$

и постньютоновские уравнения движения получаются, если подставить (9.8.11) — (9.8.13) в уравнения сохранения энергии и импульса (9.3.2), а также в (9.3.3) — (9.3.5):

$$\frac{\partial}{\partial t}[\rho(1-\mathbf{v}^2-2\phi)]+\nabla\cdot[\mathbf{v}(\rho+p+\mathbf{v}^2\rho-2\phi\rho)]=\rho\frac{\partial\phi}{\partial t}, \tag{9.8.14}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}[\mathbf{v}(\rho+p+\mathbf{v}^2\rho-2\phi\rho)]+\nabla\cdot[\mathbf{v}\mathbf{v}(p+\rho-2\phi\rho+\phi\mathbf{v}^2)]=$$

$$= -\nabla\,[p\,(1+2\phi)] - \rho\nabla\,(\phi + 2\phi^2 + \psi) - \rho\frac{\partial\zeta}{\partial t} - \rho\,(\mathbf{v}^2 - 2\phi)\,\nabla\phi +$$
$$+ \rho\mathbf{v}\times(\nabla\times\zeta) + 4\rho\mathbf{v}\frac{\partial\phi}{\partial t} -$$
$$-(3p+\rho\mathbf{v}^2)\,\nabla\phi + 4p\nabla\phi + 4\rho\mathbf{v}\,(\mathbf{v}\cdot\nabla\phi). \qquad (9.8.15)$$

Д. Процедура итераций продолжается по этому рецепту дальше.

Вопрос усложняется, когда температура является независимой переменной. Тогда на каждом этапе вычислений необходимо иметь еще одно дополнительное уравнение — уравнение непрерывности:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\sqrt{g}\,\mu U^\mu\right) = 0, \qquad (9.8.16)$$

где μ — плотность массы покоя, пропорциональная плотности числа частиц в жидкости [ср. с уравнением (5.2.14)]. Предположим, что уравнение состояния, задающее давление как функцию μ и плотности энергии $\varepsilon = O\,(\overline{v}^2)$, имеет вид

$$T^{00} \equiv \mu U^0 + \varepsilon. \qquad (9.8.17)$$

Тогда в нашем распоряжении имеются уравнение непрерывности (9.8.16), условие сохранения импульса $T^{\mu i}{}_{;\,\mu} = 0$ и условие сохранения энергии, которое после вычитания из них (9.8.16) можно записать так:

$$\frac{\partial}{\partial t}\sqrt{g}\,\varepsilon + \frac{\partial}{\partial x^i}\sqrt{g}\,[T^{i0} - \mu U^i] = -\sqrt{g}\,\Gamma^0_{\mu\nu}T^{\mu\nu}. \qquad (9.8.18)$$

Однако теперь на каждом этапе мы используем условие сохранения энергии на один порядок выше по $\overline{v}^2$. Последовательность такова: в ньютоновском приближении берем уравнение непрерывности, учитывая только первый порядок по $\overline{v}$, условие сохранения импульса до членов порядка $\overline{v}^2$, а условие сохранения энергии до членов порядка $\overline{v}^3$; в постньютоновском приближении используется уравнение непрерывности до членов порядка $\overline{v}^3$, условие сохранения импульса — до членов порядка $\overline{v}^4$, а условие сохранения энергии — до членов порядка $\overline{v}^5$. Даже не расписывая подробно эти выражения, можно заметить, что такая программа реализуема, поскольку при ньютоновском рассмотрении нам необходимо иметь $\overset{3}{\Gamma}{}^0{}_{00}$ и $\overset{2}{\Gamma}{}^0{}_{i0}$, которые уравнениями (9.1.71) и (9.1.72) определяются только через ϕ, а в постньютоновском приближении нам нужно знать $\overset{5}{\Gamma}{}^0{}_{00}$, $\overset{4}{\Gamma}{}^0{}_{i0}$, $\overset{3}{\Gamma}{}^0{}_{ij}$, задаваемые выражениями (9.1.73) — (9.1.75) через постньютоновские поля.