§ 9. Приближенные решения в теории Бранса — Дикке

Чтобы проверить общую теорию относительности, полезно сравнить ее с какой-нибудь другой теорией. Теория Бранса — Дикке, описанная в § 3 гл. 7, идентична в отношении физической интерпретации метрики $g_{\mu\nu}$ общей теории относительности, а отличается от нее только тем, что содержит в уравнениях гравитационного поля новое скалярное поле ϕ. Чтобы не спутать скалярное поле Бранса — Дикке ϕ с ньютоновским потенциалом, будем записывать первый в виде $\mathcal{G}^{-1}(1+\xi)$, где $\mathcal{G}$ — постоянная порядка G, а ξ — скалярное поле, определяемое следующим образом:

$$\xi_{;}{}^{\mu}{}_{;\mu} = \frac{8\pi\mathcal{G}}{3+2\omega} T^{\mu}{}_{\mu}, \tag{9.9.1}$$

$$\xi \to 0 \quad \text{при } r \to \infty. \tag{9.9.2}$$

[См. уравнение (7.3.13). Мы опустили у T индекс M, но под $T^{\mu\nu}$ будем понимать тензор энергии-импульса материи, не включая в него поле ξ. Величина ω есть безразмерная константа, равная примерно 6.] Уравнения гравитационного поля задаются формулой (7.3.14) в виде

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = &- 8\pi\mathcal{G}(1+\xi)^{-1} T_{\mu\nu} - \\ &- \omega(1+\xi)^{-2}\left(\xi_{;\mu}\xi_{;\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}\xi_{;\rho}\xi_{;}{}^{\rho}\right) - \\ &- (1+\xi)^{-1}(\xi_{;\mu;\nu} - g_{\mu\nu}\xi_{;}{}^{\rho}{}_{;\rho}). \end{aligned} \tag{9.9.3}$$

Используя (9.9.1), чтобы определить $\xi_{;}{}^{\rho}{}_{;\rho}$, и свертку (9.9.3) для нахождения R, перепишем (9.9.3) в форме

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} = &- 8\pi\mathcal{G}(1+\xi)^{-1}\left[T_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}T^{\lambda}{}_{\lambda}\left(\frac{\omega+1}{2\omega+3}\right)\right] - \\ &- \omega(1+\xi)^{-2}\xi_{;\mu}\xi_{;\nu} - (1+\xi)^{-1}\xi_{;\mu;\nu}. \end{aligned} \tag{9.9.4}$$

Из соотношений (9.9.1) и (9.9.2) следует, что ξ можно разложить в ряд:

$$\xi = \overset{2}{\xi} + \overset{4}{\xi} + \ldots, \tag{9.9.5}$$

где $\overset{N}{\xi}$ имеет порядок $\bar{v}^N$ и, в частности,

$$\nabla^2\overset{2}{\xi} = -\frac{8\pi\mathcal{G}}{3+2\omega}\overset{0}{T}{}^{00}. \tag{9.9.6}$$

С помощью (9.9.4) — (9.9.6) и (9.1.37) — (9.1.40) уравнения поля переписываются следующим образом:

$$\nabla^2 \overset{2}{g}_{00} = -8\pi\mathcal{G}\left(\frac{2\omega+4}{2\omega+3}\right)\overset{0}{T}_{00}, \tag{9.9.7}$$

$$\begin{aligned}\nabla^2 \overset{4}{g}_{00} = {} & \frac{\partial^2 \overset{2}{g}_{00}}{\partial t^2} + \overset{2}{g}_{ij}\frac{\partial^2 \overset{2}{g}_{00}}{\partial x^i\,\partial x^j} - (\nabla \overset{2}{g}_{00})^2 + \\ & + 8\pi\mathcal{G}\left(\frac{2\omega+4}{2\omega+3}\right)^2 \overset{2}{\xi}\overset{0}{T}{}^{00} - 8\pi\mathcal{G}\overset{2}{T}{}^{ii}\left(\frac{2\omega+2}{2\omega+3}\right) + \\ & + 16\pi\mathcal{G}\overset{2}{g}_{00}\overset{0}{T}{}^{00}\left(\frac{2\omega+4}{2\omega+3}\right) - 8\pi\mathcal{G}\left(\frac{2\omega+4}{2\omega+3}\right)\overset{2}{T}{}^{00} - \\ & - 2\omega\left(\frac{\partial \overset{2}{\xi}}{\partial t}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 \overset{2}{\xi}}{\partial t^2} + 2\overset{2}{\Gamma}{}^i{}_{00}\frac{\partial \overset{2}{\xi}}{\partial x^i},\end{aligned} \tag{9.9.8}$$

$$\nabla^2 \overset{3}{g}_{i0} = 16\pi\mathcal{G}\overset{1}{T}{}^{i0} - 2\frac{\partial^2 \overset{2}{\xi}}{\partial x^i\,\partial t}, \tag{9.9.9}$$

$$\nabla^2 \overset{2}{g}_{ij} = -8\pi\mathcal{G}\overset{0}{T}{}^{00}\delta_{ij}\left(\frac{2\omega+2}{2\omega+3}\right) - 2\frac{\partial^2 \overset{2}{\xi}}{\partial x^i\,\partial x^j}. \tag{9.9.10}$$

Из (9.9.7) следует, что гравитационная постоянная, измеряемая при наблюдении за медленно движущейся частицей или в эксперименте с изменением масштаба времени, есть не $\mathcal{G}$, а величина G, равная

$$G = \left(\frac{2\omega+4}{2\omega+3}\right)\mathcal{G}. \tag{9.9.11}$$

Таким образом, мы получаем обычное соотношение между $\overset{2}{g}_{00}$ и ньютоновским потенциалом ϕ

$$\overset{2}{g}_{00} = -2\phi \tag{9.9.12}$$

при условии, что ϕ определяется в виде

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\overset{0}{T}{}^{00}. \tag{9.9.13}$$

Из (9.9.6) и (9.9.13) следует также, что

$$\overset{2}{\xi} = -(\omega+2)^{-1}\phi,$$

а уравнения поля для $\overset{4}{g}_{00}$, $\overset{3}{g}_{i0}$ и $\overset{2}{g}_{ij}$ имеют вид

$$\begin{aligned}\nabla^2 \overset{4}{g}_{00} = {} & -2\left(\frac{\omega+1}{\omega+2}\right)\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - 2\overset{2}{g}_{ij}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^i\,\partial x^j} - 2\left(\frac{2\omega+5}{\omega+2}\right)(\nabla\phi)^2 - \\ & - 8\pi G\left[4 + \frac{1}{\omega+2}\right]\phi\overset{0}{T}{}^{00} - 8\pi G\left(\frac{2\omega+2}{2\omega+4}\right)\overset{2}{T}{}^{ii} - \\ & - 8\pi G\overset{2}{T}{}^{00} - \frac{2\omega}{(\omega+2)^2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2,\end{aligned} \tag{9.9.14}$$

$$\nabla^2 \overset{3}{g}_{i0} = 16\pi G \left(\frac{2\omega+3}{2\omega+4}\right) \overset{1}{T}{}^{i0} + \frac{2}{\omega+2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^i \, \partial t}, \tag{9.9.15}$$

$$\nabla^2 \overset{2}{g}_{ij} = -8\pi G \overset{0}{T}{}^{00} \delta_{ij} \left(\frac{\omega+1}{\omega+2}\right) + \frac{2}{(\omega+2)} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^i \, \partial x^j}. \tag{9.9.16}$$

В качестве примера рассмотрим поле статической сферически-симметричной массы. В этом случае ньютоновский потенциал есть функция только r и (9.9.16) дает

$$\overset{2}{g}_{ij} = -2\delta_{ij} \left(\frac{\omega+1}{\omega+2}\right) \phi +$$

$$+ \frac{2}{\omega+2} \left\{ \left(\delta_{ij} - \frac{3x_i x_j}{r^2}\right) \frac{1}{r^3} \int_0^r r^2 \phi(r)\, dr + \frac{x_i x_j \phi}{r^2} \right\}. \tag{9.9.17}$$

Вне массы имеем

$$\phi = -\frac{MG}{r}, \tag{9.9.18}$$

и поэтому (9.9.17) приводит к выражению

$$\overset{2}{g}_{ij} = \left(\frac{2\omega+1}{\omega+2}\right) \frac{MG}{r} \delta_{ij} + \frac{MG}{\omega+2} \frac{x_i x_j}{r^3} +$$

$$+ \frac{2MGR^2}{\omega+2} \left(\delta_{ij} - \frac{3x_i x_j}{r^2}\right) \frac{1}{r^3}, \tag{9.9.19}$$

где R — эффективный радиус, определяемый следующим образом:

$$MGR^2 \equiv \int_0^\infty \left[\phi(r) + \frac{MG}{r}\right] r^2\, dr. \tag{9.9.20}$$

(Подынтегральное выражение исчезает вне массы, поэтому мы вольны выбирать в качестве верхнего предела любую точку от r до ∞). Подставляя (9.9.18) и (9.9.19) в (9.9.14), имеем

$$\nabla^2 \overset{4}{g}_{00} = -\frac{2(2\omega+3) M^2 G^2}{(\omega+2) r^4} - \frac{24 M^2 G^2 R^2}{(\omega+2) r^6}$$

Решение этого уравнения записывается в виде

$$\overset{4}{g}_{00} = -\frac{(2\omega+3) M^2 G^2}{(\omega+2) r^2} - \frac{2M^2 G^2 R^2}{(\omega+2) r^4} + \frac{\varkappa M^2 G^2}{rR}, \tag{9.9.21}$$

где $\varkappa$ — безразмерная константа, которая должна быть определена из условия гладкости перехода внешнего решения (9.9.21) в несингулярное решение для внутренней области.

Из результатов (9.9.19) — (9.9.21) следует, что гравитационное поле вне сферической статической массы зависит от величины

массы и ее распределения. Однако этот эффект зависимости от величины массы можно исключить соответствующим переопределением величин M и $\mathbf{x}$:

$$M' = M\left[1 - \frac{\varkappa MG}{R}\right], \tag{9.9.22}$$

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x}\left[1 + \frac{MGR^2}{(\omega+2)\,r^3}\right]. \tag{9.9.23}$$

Тогда два последних члена в (9.9.21) и последнее слагаемое в (9.9.19) при замене переменных (9.9.22) и (9.9.23) сокращаются с соответствующими членами, возникающими в $\overset{2}{g}_{00}$ и $\overset{0}{g}_{ij}$. Опуская штрихи, в итоге получаем

$$\overset{2}{g}_{00} = \frac{2MG}{r}, \tag{9.9.24}$$

$$\overset{4}{g}_{00} = -\frac{(2\omega+3)\,M^2G^2}{(\omega+2)\,r^2}, \tag{9.9.25}$$

$$\overset{2}{g}_{ij} = \left(\frac{2\omega+1}{\omega+2}\right)\frac{MG}{r}\,\delta_{ij} + \frac{MG}{\omega+2}\,\frac{x_ix_j}{r^3}. \tag{9.9.26}$$

Таким образом, теория Бранса — Дикке разделяет утверждение теории Эйнштейна, что гравитационное поле вне статической сферически-симметричной массы зависит только от M, но не от каких-либо других свойств массы.

Это решение можно сравнить с общим разложением Робертсона (8.3.7) в гармонических координатах, которое (для $\alpha = 1$) дает

$$\overset{2}{g}_{00} = \frac{2MG}{r},$$

$$\overset{4}{g}_{00} = -(\gamma - 1 + 2\beta)\,\frac{M^2G^2}{r^2},$$

$$\overset{2}{g}_{ij} = (3\gamma - 1)\,\delta_{ij}\frac{MG}{r} + (1-\gamma)\,\frac{MGx_ix_j}{r^3}.$$

Следовательно, результаты Бранса — Дикке (9.9.24) — (9.9.26) можно воспроизвести, задав параметры Робертсона с помощью формул

$$\gamma = \frac{\omega+1}{\omega+2}, \qquad \beta = 1. \tag{9.9.27}$$

Эти формулы уже использовались в предыдущей главе при сравнении теории Бранса — Дикке с экспериментом.

Отметим, что элемент $\overset{3}{g}_{i0} \equiv \zeta_i$ метрического тензора для статической системы, задаваемый уравнением (9.9.15), имеет вид

$$\zeta_i = -4G\left(\frac{2\omega+3}{2\omega+4}\right)\int \frac{\overset{1}{T}{}^{i0}(\mathbf{x}',\,t)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\,d^3x'. \tag{9.9.28}$$

Отсюда следует, что влияние вращения сферической массы на прецессию спина и перигелия в теории Бранса — Дикке (для $0 < \omega < \infty$) меньше, чем в общей теории относительности, в $(2\omega + 3)/(2\omega + 4)$ раз.

Наиболее критические проверки теории Бранса — Дикке — это те, которые связаны с проверкой «очень сильного» принципа эквивалентности. В любой точке P гравитационного поля можно выбрать локально-инерциальную систему координат, в которой в этой точке $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ и $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = 0$. Однако поле Бранса — Дикке ξ — скаляр, а потому не исчезает в точке P, а будет задаваться уравнениями (9.9.6) и (9.9.13):

$$\xi \approx \overset{2}{\xi} = -(\omega + 2)^{-1}\phi,$$

где ϕ — ньютоновский гравитационный потенциал. Уравнение (9.9.4) показывает, что в этой системе координат гравитационное поле малой массы, введенной в точку P, можно вычислить, как обычно, но гравитационная константа G должна быть заменена следующей величиной:

$$G_{\text{эфф}} = G(1 + \xi)^{-1} \approx G[1 + (\omega + 2)^{-1}\phi]. \qquad (9.9.29)$$

Например, при $\omega = 6$ и ϕ, равном его значению на поверхности Земли, $-6{,}9 \cdot 10^{-10}$, эффективная гравитационная константа, измеряемая на поверхности Земли в эксперименте Кавендиша, будет меньше, чем «истинная» гравитационная константа, измеряемая на спутнике, летящем на высокой орбите, на $\sim (1 - 8) \cdot 10^{-11}$.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Chandrasekhar S., The Post-Newtonian Equations of Hydrodynamics in General Relativity, The Post-Newtonian Effects on the Equilibrium of the Maclaurin Spheroids, The Stability of Gaseous Masses in the Post-Newtonian Approximation, в книге Relativity Theory and Astrophysics. 3. Stellar Structure, ed. J. Ehlers, Providence, R.I., 1967 (см. перевод: *Чандрасекар Ш.*, Введение в учение о строении звезд, ИЛ, 1950).

Goldberg J. N., The Equations of Motion, в книге Gravitation: An Introduction to Current Research, ed. L. Witten, Wiley, 1962, p. 102.

Infeld L., *Plebanski J.*, Motion and Relativity, Pergamon Press, 1960 (см. перевод: *Инфельд Л.*, *Плебаньский Е.*, Движение и релятивизм. Движение тел в общей теории относительности. ИЛ, 1962).

Фок В., Теория пространства, времени и тяготения, Физматгиз, 1961.

Ландау Л. Д., *Лифшиц Е. М.*, Теория поля, Физматгиз, 1962.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Einstein A.*, *Infeld L.*, *Hoffmann B.*, Ann. Math., 39, 65 (1938); *Einstein A.*, *Infeld L.*, Ann. Math., 41, 455 (1940); *Einstein A.*, *Infeld L.*, Canad. J. Math., 1, 209 (1949) (см. перевод: *Эйнштейн А.*, Собрание научных трудов, «Наука», 1966, т. 2, стр. 450, 532, 674).