Ничто великое по самой природе не может быть точным.

Эдмунд Бэрк,
Речь о системе американского налогообложения, 1774 г.

Глава 10

ГРАВИТАЦИОННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

Как мы видели, есть много общих черт между явлениями гравитации и электродинамики. Поэтому не следует воспринимать как неожиданный тот факт, что уравнения Эйнштейна, подобно уравнениям Максвелла, имеют радиационные решения. Однако никто пока не сумел с достоверностью обнаружить гравитационное излучение, и причину этого не трудно отыскать: теория Эйнштейна предсказывает, что в обычных атомных процессах гравитационное излучение зарождается в крайне малых количествах. Например, вероятность того, что переход между двумя атомными состояниями, произойдет за счет гравитационного, а не электромагнитного излучения, имеет порядок GE^2/e^2, где E — выделяющаяся энергия, e — заряд электрона. Для $E \approx 1$ эВ вероятность перехода составляет около $3 \cdot 10^{-54}$.

Почему же тогда изучают гравитационное излучение? Одна из причин — это, конечно, надежда на то, что, может быть, удастся найти сильный источник гравитационного излучения. Такой источник, возможно, уже обнаружен (§ 7 гл. 10). Однако гравитационное излучение представляло бы интерес, даже если бы не было никаких надежд когда-либо его обнаружить, поскольку теория гравитационного излучения является естественным мостом между общей теорией относительности и современной микроскопической физикой.

В последние годы мы научились в микроскопических явлениях описывать фундаментальные наблюдаемые, пользуясь такими понятиями, как элементарные частицы и их столкновения. Пример из классической электродинамики: плоское решение волновых уравнений Максвелла интерпретируется наиболее естественным образом как частица — фотон. Аналогично, радиационные решения уравнений Эйнштейна приводят к понятию частицы гравитационного излучения — *гравитону*.

К сожалению, теория гравитационного излучения очень сложна из-за нелинейности уравнений Эйнштейна. В духе идей § 6 гл. 7 можно сказать, что любая гравитационная волна и сама является некоторым распределением энергии и импульса, вносящим вклад в гравитационное поле этой волны. Это усложнение не позволяет найти общие радиационные решения точных уравнений Эйнштейна.

Существуют два пути обхода этой трудности. Первый — изучать радиационные решения уравнений Эйнштейна только для слабых полей, которые описывают волны, переносящие не столь большие энергию и импульс, чтобы это влияло на их собственное распространение. Второй — длинный и сложный — это искать частные решения точных полевых уравнений Эйнштейна. Благодаря многим математическим ухищрениям во втором случае удалось получить довольно изящные результаты. Однако эту главу мы посвятим только первому подходу — рассмотрению слабых полей. Одна из причин этого состоит в том, что интенсивность любого гравитационного излучения, по-видимому, очень низка. Другая — более глубокая — связана с тем, что придать точный смысл понятию элементарная частица можно, только рассматривая ее вдали от всех других частиц, а для гравитонов это как раз и соответствует решению полевых уравнений в приближении слабого поля.

Читатель не должен отсюда делать вывод, что невозможность найти общие точные решения нелинейных полевых уравнений оставляет какой-то фундаментальный пробел в нашем понимании теории гравитации. Действительно, аналогичные проблемы возникают и в электродинамике, где точный расчет электромагнитного поля, создаваемого затухающим током электрического осциллятора, является сильно нелинейной задачей, поскольку поле само действует на ток, его создавший. Хотя эта проблема не была решена и много лет спустя после создания теории Максвелла, не оставалось сомнений, что электрические осцилляторы порождают электромагнитные волны, изучением которых занимался Максвелл. Гравитационные волны — более сложное явление, чем электромагнитные, так как они дают вклад в свой собственный источник и вне материальной гравитационной антенны. Однако если мы находимся далеко — в волновой зоне, где поля слабые, то как электромагнитные, так и гравитационные волны обладают простыми свойствами.

§ 1. Приближение слабого поля

Предположим, что метрика близка к метрике Минковского $\eta_{\mu\nu}$

$$g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}+h_{\mu\nu}, \tag{10.1.1}$$

где $|h_{\mu\nu}|\ll 1$. В первом порядке по h тензор Риччи имеет вид

$$R_{\mu\nu}\approx\frac{\partial}{\partial x^\nu}\Gamma^\lambda_{\lambda\mu}-\frac{\partial}{\partial x^\lambda}\Gamma^\lambda_{\mu\nu}+O(h^2), \tag{10.1.2}$$

а аффинная связность

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu}=\frac{1}{2}\eta^{\lambda\rho}\left[\frac{\partial}{\partial x^\mu}h_{\rho\nu}+\frac{\partial}{\partial x^\nu}h_{\rho\mu}-\frac{\partial}{\partial x^\rho}h_{\mu\nu}\right]+O(h^2). \tag{10.1.3}$$

Коль скоро мы ограничились первым порядком по h, то поднимать и опускать *все* индексы следует с помощью $\eta^{\mu\nu}$, а не $g^{\mu\nu}$, т. е.

$$\eta^{\lambda\rho}h_{\rho\nu} \equiv h^{\lambda}{}_{\nu}, \qquad \eta^{\lambda\rho}\frac{\partial}{\partial x^{\rho}} \equiv \frac{\partial}{\partial x_{\lambda}} \text{ и т. д.}$$

При таком подходе уравнения (10.1.2) и (10.1.3) дают тензор Риччи в первом порядке:

$$R_{\mu\nu} \approx R^{(1)}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\left(\Box^2 h_{\mu\nu} - \frac{\partial^2}{\partial x^{\lambda}\,\partial x^{\mu}}\,h^{\lambda}{}_{\nu} - \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}\,\partial x^{\nu}}\,h^{\lambda}{}_{\mu} + \frac{\partial^2}{\partial x^{\mu}\,\partial x^{\nu}}\,h^{\lambda}{}_{\lambda}\right).$$

Следовательно, уравнения поля Эйнштейна запишутся следующим образом:

$$\Box^2 h_{\mu\nu} - \frac{\partial^2}{\partial x^{\lambda}\,\partial x^{\mu}}\,h^{\lambda}{}_{\nu} - \frac{\partial^2}{\partial x^{\lambda}\,\partial x^{\nu}}\,h^{\lambda}{}_{\mu} + \frac{\partial^2}{\partial x^{\mu}\,\partial x^{\nu}}\,h^{\lambda}{}_{\lambda} = -16\pi G S_{\mu\nu}, \tag{10.1.4}$$

$$S_{\mu\nu} \equiv T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}T^{\lambda}{}_{\lambda}. \tag{10.1.5}$$

Здесь $T_{\mu\nu}$ берется в низшем порядке по $h_{\mu\nu}$, т. е. не зависит от $h_{\mu\nu}$, и удовлетворяет обычному закону сохранения

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}T^{\mu}{}_{\nu} = 0. \tag{10.1.6}$$

(Если гравитационные силы играют важную роль в структуре излучающей системы, то вместо $\tau^{\mu\nu}$ можно использовать $T^{\mu\nu}$; см. § 6 гл. 7.) Отметим, что закон сохранения (10.1.6), записанный в такой форме, обеспечивает согласованность уравнений (10.1.4), поскольку (10.1.6) предполагает справедливость соотношения

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}S^{\mu}{}_{\nu} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}S^{\lambda}{}_{\lambda},$$

в то время как линеаризованный тензор Риччи удовлетворяет тождеству Бианки в следующей форме:

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}R^{(1)\mu}{}_{\nu} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\left[\Box^2 h^{\lambda}{}_{\lambda} - \frac{\partial^2 h^{\lambda\nu}}{\partial x^{\lambda}\,\partial x^{\nu}}\right] = \frac{1}{2}\,\frac{\partial R^{(1)\lambda}{}_{\lambda}}{\partial x^{\nu}}.$$

Как уже обсуждалось в § 4 гл. 7, нельзя ожидать, что такое уравнение поля, как (10.1.4), приведет к единственному решению, поскольку, задав любое решение, можно всегда заменой координат получить другие решения. Наиболее общее преобразование координат, оставляющее поле слабым, имеет вид

$$x^{\mu} \to x'^{\mu} = x^{\mu} + \varepsilon^{\mu}(x), \tag{10.1.7}$$

где $\partial\varepsilon^{\mu}/\partial x^{\nu}$ — самое большее того же порядка величины, что и $h_{\mu\nu}$. В новой системе координат метрика записывается в форме

$$g'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\lambda}}\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\rho}}g^{\lambda\rho}$$

или, так как $g^{\mu\nu} \approx \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}$, можно записать

$$h'^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} - \frac{\partial \varepsilon^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} \eta^{\lambda\nu} - \frac{\partial \varepsilon^{\nu}}{\partial x^{\rho}} \eta^{\rho\mu}.$$

Таким образом, если $h_{\mu\nu}$ есть решение уравнения (10.1.4), то должно быть

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{\partial \varepsilon_{\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \varepsilon_{\nu}}{\partial x^{\mu}}, \tag{10.1.8}$$

где $\varepsilon_{\mu} \equiv \varepsilon^{\nu}\eta_{\mu\nu}$ есть четыре малые, а в остальном произвольные функции от x^{μ}. В том, что (10.1.8) тоже есть решение, можно убедиться непосредственно, подставляя его в уравнение (10.1.4); это свойство — следствие так называемой *калибровочной инвариантности* уравнения поля.

Калибровочная инвариантность уравнения поля (10.1.4) создает трудности, когда приходится явно решать уравнение. Однако эти трудности можно устранить, выбирая какую-нибудь частную калибровку, т. е. некоторую систему координат. Наиболее удобно работать в *системе гармонических координат*, для которых

$$g^{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = 0.$$

Если использовать (10.1.3), то в первом порядке получаем

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} h^{\mu}{}_{\nu} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} h^{\mu}{}_{\mu}. \tag{10.1.9}$$

То, что такой выбор всегда возможен, следует из общих соображений, приведенных в § 4 гл. 7; из выражения (10.1.8) можно также видеть, что если $h_{\mu\nu}$ не удовлетворяет (10.1.9), то, совершая преобразования координат (10.1.7), при условии

$$\Box^2 \varepsilon_{\nu} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} h^{\mu}{}_{\nu} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} h^{\mu}{}_{\mu}$$

мы найдем некоторый тензор $h'_{\mu\nu}$, который уже удовлетворяет (10.1.9).

Поэтому будем считать, что $h_{\mu\nu}$ действительно решение уравнения (10.1.9).

Подставляя (10.1.9) в (10.1.4), можно записать уравнение поля в виде

$$\Box^2 h_{\mu\nu} = -16\pi G S_{\mu\nu}. \tag{10.1.10}$$

Одно из решений представляет собой *запаздывающий потенциал*

$$h_{\mu\nu}(\mathbf{x}, t) = 4G \int d^3\mathbf{x}' \, \frac{S_{\mu\nu}(\mathbf{x}', t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \tag{10.1.11}$$

Мы уже отмечали, что закон сохранения (10.1.6) для $T^{\mu\nu}$ эквивалентен

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} S^{\mu}{}_{\nu} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} S^{\mu}{}_{\mu} \tag{10.1.12}$$

и вследствие этого решение (10.1.11) для источника $S_{\mu\nu}$, заключенного в конечный объем, автоматически удовлетворяет условию гармонических координат (10.1.9). (Доказательство этого идентично тому, которое используется в электродинамике при вычислении векторного потенциала с калибровочным условием Лоренца.) К решению (10.1.11) можно добавить любое решение однородного уравнения:

$$\Box^2 h_{\mu\nu} = 0, \tag{10.1.13}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} h^\mu{}_\nu = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^\nu} h^\mu{}_\mu. \tag{10.1.14}$$

Выражение (10.1.11) мы интерпретируем как гравитационное излучение, создаваемое источником $S_{\mu\nu}$, в то время как любой дополнительный член, удовлетворяющий (10.1.13) и (10.1.14), представляет собой гравитационное излучение, приходящее из бесконечности. Появление в (10.1.11) временного аргумента $t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ показывает, что гравитационные эффекты распространяются с единичной скоростью, т. е. со скоростью света.

§ 2. Плоские волны

Рассмотрим плоские волновые решения однородных уравнений (10.1.13) и (10.1.14), ибо они играют важную роль сами по себе и, кроме того, как мы увидим далее, запаздывающие волны переходят в плоские при $r \to \infty$. Общее решение уравнений (10.1.13) и (10.1.14) есть линейная суперпозиция решений, записанная в виде

$$h_{\mu\nu}(x) = e_{\mu\nu} \exp(ik_\lambda x^\lambda) + e^*_{\mu\nu} \exp(-ik_\lambda x^\lambda). \tag{10.2.1}$$

Такое решение удовлетворяет уравнению (10.1.13), если

$$k_\mu k^\mu = 0, \tag{10.2.2}$$

и условию (10.1.14), если справедливо соотношение

$$k_\mu e^\mu{}_\nu = \frac{1}{2} k_\nu e^\mu{}_\mu. \tag{10.2.3}$$

(Опускать и поднимать индексы мы будем по-прежнему с помощью $\eta_{\mu\nu}$, так что $k^\mu \equiv \eta^{\mu\nu} k_\nu$.) Матрица $e_{\mu\nu}$ с очевидностью симметрична:

$$e_{\mu\nu} = e_{\nu\mu}. \tag{10.2.4}$$

Будем называть ее *тензором поляризации*.

Симметричная матрица (4×4) имеет в общем случае десять независимых компонент. Однако четыре соотношения (10.2.3) уменьшают число их до шести, а из этих шести только две компоненты имеют смысл физических степеней свободы. Совершая преобразование координат $x^\mu \to x^\mu + \varepsilon^\mu(x)$, мы заменяем метрику