и вследствие этого решение (10.1.11) для источника $S_{\mu\nu}$, заключенного в конечный объем, автоматически удовлетворяет условию гармонических координат (10.1.9). (Доказательство этого идентично тому, которое используется в электродинамике при вычислении векторного потенциала с калибровочным условием Лоренца.) К решению (10.1.11) можно добавить любое решение однородного уравнения:

$$\Box^2 h_{\mu\nu} = 0, \tag{10.1.13}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} h^\mu{}_\nu = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^\nu} h^\mu{}_\mu. \tag{10.1.14}$$

Выражение (10.1.11) мы интерпретируем как гравитационное излучение, создаваемое источником $S_{\mu\nu}$, в то время как любой дополнительный член, удовлетворяющий (10.1.13) и (10.1.14), представляет собой гравитационное излучение, приходящее из бесконечности. Появление в (10.1.11) временного аргумента $t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ показывает, что гравитационные эффекты распространяются с единичной скоростью, т. е. со скоростью света.

§ 2. Плоские волны

Рассмотрим плоские волновые решения однородных уравнений (10.1.13) и (10.1.14), ибо они играют важную роль сами по себе и, кроме того, как мы увидим далее, запаздывающие волны переходят в плоские при $r \to \infty$. Общее решение уравнений (10.1.13) и (10.1.14) есть линейная суперпозиция решений, записанная в виде

$$h_{\mu\nu}(x) = e_{\mu\nu} \exp(ik_\lambda x^\lambda) + e^*_{\mu\nu} \exp(-ik_\lambda x^\lambda). \tag{10.2.1}$$

Такое решение удовлетворяет уравнению (10.1.13), если

$$k_\mu k^\mu = 0, \tag{10.2.2}$$

и условию (10.1.14), если справедливо соотношение

$$k_\mu e^\mu{}_\nu = \frac{1}{2} k_\nu e^\mu{}_\mu. \tag{10.2.3}$$

(Опускать и поднимать индексы мы будем по-прежнему с помощью $\eta_{\mu\nu}$, так что $k^\mu \equiv \eta^{\mu\nu} k_\nu$.) Матрица $e_{\mu\nu}$ с очевидностью симметрична:

$$e_{\mu\nu} = e_{\nu\mu}. \tag{10.2.4}$$

Будем называть ее *тензором поляризации*.

Симметричная матрица (4×4) имеет в общем случае десять независимых компонент. Однако четыре соотношения (10.2.3) уменьшают число их до шести, а из этих шести только две компоненты имеют смысл физических степеней свободы. Совершая преобразование координат $x^\mu \to x^\mu + \varepsilon^\mu(x)$, мы заменяем метрику

$\eta_{\mu\nu}+h_{\mu\nu}$ новой метрикой $\eta_{\mu\nu}+h'_{\mu\nu}$, где $h'_{\mu\nu}$ задается выражением (10.1.8). Положим, что мы выбрали $\varepsilon^\mu(x)$ в виде

$$\varepsilon^\mu(x)=i\varepsilon^\mu\exp(ik_\lambda x^\lambda)-i\varepsilon^{\mu *}\exp(-ik_\lambda x^\lambda). \tag{10.2.5}$$

Тогда (10.1.8) приводит к выражению

$$h'_{\mu\nu}(x)=e'_{\mu\nu}\exp(ik_\lambda x^\lambda)+e'^{*}_{\mu\nu}\exp(-ik_\lambda x^\lambda), \tag{10.2.6}$$

где

$$e'_{\mu\nu}=e_{\mu\nu}+k_\mu\varepsilon_\nu+k_\nu\varepsilon_\mu. \tag{10.2.7}$$

[Заметим, что волны по-прежнему удовлетворяют условию гармоничности координат (10.2.3).] Можно сделать вывод, что для произвольных значений четырех параметров ε_μ тензоры поляризации $e'_{\mu\nu}$ и $e_{\mu\nu}$ соответствуют одной и той же физической картине. Именно поэтому из шести независимых компонент, удовлетворяющих (10.2.3) и (10.2.4), только $6-4=2$ имеют физическое значение. Например, рассмотрим волны с волновым вектором

$$k^1=k^2=0, \qquad k^3=k^0\equiv k>0, \tag{10.2.8}$$

распространяющиеся вдоль оси z в сторону возрастающих значений z. В этом случае (10.2.3) приводит к условиям

$$e_{31}+e_{01}=e_{32}+e_{02}=0,$$

$$e_{33}+e_{03}=-e_{03}-e_{00}=\frac{1}{2}(e_{11}+e_{22}+e_{33}-e_{00}).$$

Эти четыре соотношения позволяют выразить e_{i0} и e_{22} через остальные шесть компонент $e_{\mu\nu}$

$$e_{01}=-e_{31}, \qquad e_{02}=-e_{32}, \qquad e_{03}=-\frac{1}{2}(e_{33}+e_{00}),$$
$$e_{22}=-e_{11}. \tag{10.2.9}$$

Тогда в системе координат, преобразующейся согласно (10.1.7) и (10.2.5), эти шесть независимых компонент $e_{\mu\nu}$ заменяются компонентами $e'_{\mu\nu}$ в соответствии с уравнением (10.2.7) следующим образом:

$$e'_{11}=e_{11}, \qquad e'_{12}=e_{12},$$
$$e'_{13}=e_{13}+k\varepsilon_1, \qquad e'_{23}=e_{23}+k\varepsilon_2,$$
$$e'_{33}=e_{33}+2k\varepsilon_1, \qquad e'_{00}=e_{00}-2k\varepsilon_0.$$

Только компоненты e_{11} и e_{12} имеют абсолютный физический смысл. Действительно, всегда можно найти преобразование координат с

$$\varepsilon_1=-\frac{e_{13}}{k}, \qquad \varepsilon_2=-\frac{e_{23}}{k}, \qquad \varepsilon_3=-\frac{e_{33}}{2k}, \qquad \varepsilon_0=\frac{e_{00}}{2k},$$

которое обратит в нуль все компоненты $e'_{\mu\nu}$, кроме e'_{11}, e'_{12} и $e'_{22} = -e'_{11}$.

Различие между отдельными компонентами тензора поляризации станет ясным, если понять, как меняется $e_{\mu\nu}$ при вращении системы координат вокруг оси z, т. е. при следующем преобразовании Лоренца:

$$
\begin{aligned}
&R_1{}^1 = \cos\theta, && R_1{}^2 = \sin\theta,\\
&R_2{}^1 = -\sin\theta, && R_2{}^2 = \cos\theta,\\
&R_3{}^3 = R_0{}^0 = 1, \quad \text{все остальные} && R_\mu{}^\nu = 0.
\end{aligned}
\tag{10.2.10}
$$

Поскольку такое преобразование оставляет инвариантным k_μ (т. е. $R_\mu{}^\nu k_\nu = k_\mu$), то преобразованию подвергается только тензор $e_{\mu\nu}$, переходящий в тензор

$$e'_{\mu\nu} = R_\mu{}^\rho R_\nu{}^\sigma e_{\rho\sigma}. \tag{10.2.11}$$

Используя соотношение (10.2.9), найдем

$$e'_\pm = \exp(\pm 2i\theta)\, e_\pm, \tag{10.2.12}$$

$$f'_\pm = \exp(\pm i\theta)\, f_\pm, \tag{10.2.13}$$

$$e'_{33} = e_{33}, \qquad e'_{00} = e_{00}, \tag{10.2.14}$$

где

$$e_\pm \equiv e_{11} \mp ie_{12} = -e_{22} \mp ie_{12}, \tag{10.2.15}$$

$$f_\pm \equiv e_{31} \mp ie_{32} = -e_{01} \pm ie_{02}. \tag{10.2.16}$$

Будем говорить, что любая плоская волна ψ, преобразующаяся при повороте на угол θ относительно направления распространения по правилу

$$\psi' = e^{ih\theta}\psi, \tag{10.2.17}$$

имеет *спиральность* h. Итак, видно, что гравитационную плоскую волну можно разложить на следующие компоненты: $e_\pm$, обладающие спиральностью ± 2, $f_\pm$ со спиральностью ± 1, а также e_{00} и e_{33} с нулевой спиральностью. Однако нетрудно убедиться в том, что компоненты со спиральностью 0 и ± 1 можно обратить в нуль подходящим выбором системы координат, и поэтому *физический смысл имеют лишь компоненты со спиральностью* ± 2.

Обратимся еще раз к полезной аналогии с электродинамикой. Уравнения Максвелла в лоренцевой калибровке имеют вид (2.7.12) и (2.7.13); в пустом пространстве эти уравнения приобретают вид, аналогичный уравнениям (10.1.13) и (10.1.14):

$$\Box^2 A_\alpha = 0, \qquad \frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\alpha} = 0$$

для метрики, записанной в гармонических координатах. (Сейчас мы имеем дело с инерциальной системой координат, а потому

$\Box^2 \equiv \eta^{\alpha\beta}\,\partial^2/\partial x^\alpha\,\partial x^\beta$.) Так же как для уравнений (10.2.1) — (10.2.3), решение данных уравнений можно записать в виде плоской волны:

$$A_\alpha = e_\alpha \exp(ik_\beta x^\beta) + e_\alpha^* \exp(-ik_\beta x^\beta),$$

где

$$k_\alpha k^\alpha = 0,$$
$$x_\alpha e^\alpha = 0.$$

Вообще говоря, e^α имел бы четыре независимые компоненты, но условие $k_\alpha e^\alpha$ понижает число независимых компонент до трех, так же как условие (10.2.3) сводит к шести число независимых компонент $e_{\mu\nu}$. Далее, не меняя физических полей **E** и **B** и не отказываясь от лоренцевой калибровки, можно аналогично (10.1.8) и (10.2.5) изменить A_α путем калибровочного преобразования:

$$A_\alpha \to A'_\alpha = A_\alpha + \frac{\partial\Phi}{\partial x_\alpha},$$

$$\Phi(x) = i\varepsilon \exp(ik_\beta x^\beta) - i\varepsilon^* \exp(-ik_\beta x^\beta).$$

По аналогии с (10.2.6) и (10.2.7) новый потенциал можно также записать в виде

$$A'_\alpha = e'_\alpha \exp(ik_\beta x^\beta) + e'^*_\alpha \exp(-ik_\beta x^\beta),$$

$$e'_\alpha = e_\alpha - \varepsilon k_\alpha.$$

Параметр ε — произвольный, так что из трех алгебраически независимых компонент e_α только две (3 — 1) имеют физический смысл, точно так же как общая ковариантность оставляет физический смысл только двум из шести независимых компонент. Чтобы выделить эти две компоненты e_α, рассмотрим распространяющуюся вдоль оси z волну с вектором k^α, задаваемым соотношениями (10.2.8). Тогда из условия $k_\alpha e^\alpha = 0$ следует равенство

$$e_0 = -e_3,$$

аналогично тому как условие (10.2.3) позволяет выразить e_{22} и e_{0i} через остальные шесть компонент $e_{\mu\nu}$. Далее, рассматриваемое калибровочное преобразование оставляет инвариантным и e_1 и e_2, но заменяет e_3 на

$$e'_3 = e_3 - \varepsilon k.$$

Следовательно, выбирая $\varepsilon = e_3/k$, можно обратить e'_3 в нуль, а потому только e_1 и e_2 обладают физическим смыслом. Точно так же, только e_{11} и e_{12} нельзя обратить в нуль никаким преобразованием координат. И наконец, физический смысл рассматриваемых двух компонент можно найти, подвергая вращению (10.2.10) плоскую электромагнитную волну. Вектор поляризации при этом изменяется следующим образом:

$$e'_\alpha = R_\alpha{}^\beta e_\beta,$$

а потому

$$e'_\pm = \exp(\pm i\theta)\, e_\pm,$$

$$e'_3 = e_3,$$

где

$$e_\pm \equiv e_1 \mp i e_2.$$

Таким образом, электромагнитные волны можно разложить на составляющие со спиральностью ± 1 и 0. Однако физический смысл есть только у компонент со спиральностью ± 1, а не 0, так же как гравитационные волны могут иметь спиральность ± 2, но не ± 1 или 0. Все это и имеется в виду, когда мы, пользуясь классическим языком, говорим, что электромагнитные и гравитационные возмущения переносятся волнами со спином 1 и 2 соответственно.

§ 3. Энергия и импульс плоских волн

Физический смысл плоско-волнового решения (10.2.1) становится сразу ясным, если вычислить энергию и импульс, переносимые волной. Согласно выражению (7.6.4), гравитационный тензор энергии-импульса с точностью до членов порядка h^2 задается следующим образом:

$$t_{\mu\nu} \approx \frac{1}{8\pi G}\left[-\frac{1}{2} h_{\mu\nu}\eta^{\lambda\rho}R^{(1)}_{\lambda\rho} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h^{\lambda\rho}R^{(1)}_{\lambda\rho} + R^{(2)}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\eta^{\lambda\rho}R^{(2)}_{\lambda\rho}\right],$$

где $R^{(N)}_{\mu\nu}$ — член разложения тензора Риччи порядка N по $h_{\mu\nu}$. Метрика $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ удовлетворяет уравнениям Эйнштейна первого порядка $R^{(1)}_{\mu\nu} = 0$, так что в $t_{\mu\nu}$ можно опустить эти члены и использовать следующую форму:

$$t_{\mu\nu} \approx \frac{1}{8\pi G}\left[R^{(2)}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\eta^{\lambda\rho}R^{(2)}_{\lambda\rho}\right]. \tag{10.3.1}$$

[В случае реальной метрики в нуль обращается $R_{\mu\nu}$, а не $R^{(1)}_{\mu\nu}$, и $t_{\mu\nu}$ определяется только членами первого порядка в выражении (7.6.4). Здесь используется тем не менее $R^{(1)}_{\mu\nu}$, а не $R_{\mu\nu}$, который равен нулю, поскольку $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ удовлетворяет уравнениям Эйнштейна первого порядка, а не точным уравнениям. Различия возникают только в порядке h^3.] Чтобы вычислить $R^{(2)}_{\mu\nu}$, надо подставить выражение (10.2.1) в (7.6.15); результат оказывается очень громоздким, но его можно упростить, усредняя $t_{\mu\varkappa}$ по области пространства-времени, много большей чем $|\mathbf{k}|^{-1}$.