

плоскую электромагнитную волну. Вектор поляризации при этом изменяется следующим образом:

$$e'_\alpha = R_{\alpha\beta} e_\beta,$$

а потому

$$\begin{aligned} e'_\pm &= \exp(\pm i\theta) e_\pm, \\ e'_3 &= e_3, \end{aligned}$$

где

$$e_\pm \equiv e_1 \mp ie_2.$$

Таким образом, электромагнитные волны можно разложить на составляющие со спиральностью  $\pm 1$  и 0. Однако физический смысл есть только у компонент со спиральностью  $\pm 1$ , а не 0, так же как гравитационные волны могут иметь спиральность  $\pm 2$ , но не  $\pm 1$  или 0. Все это и имеется в виду, когда мы, пользуясь классическим языком, говорим, что электромагнитные и гравитационные возмущения переносятся волнами со спином 1 и 2 соответственно.

### § 3. Энергия и импульс плоских волн

Физический смысл плоско-волнового решения (10.2.1) становится сразу ясным, если вычислить энергию и импульс, переносимые волной. Согласно выражению (7.6.4), гравитационный тензор энергии-импульса с точностью до членов порядка  $h^2$  задается следующим образом:

$$t_{\mu\nu} \approx \frac{1}{8\pi G} \left[ -\frac{1}{2} h_{\mu\nu} \eta^{\lambda\rho} R_{\lambda\rho}^{(1)} + \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h^{\lambda\rho} R_{\lambda\rho}^{(1)} + R_{\mu\nu}^{(2)} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \eta^{\lambda\rho} R_{\lambda\rho}^{(2)} \right],$$

где  $R_{\mu\nu}^{(N)}$  — член разложения тензора Риччи порядка  $N$  по  $h_{\mu\nu}$ . Метрика  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$  удовлетворяет уравнениям Эйнштейна первого порядка  $R_{\mu\nu}^{(1)} = 0$ , так что в  $t_{\mu\nu}$  можно опустить эти члены и использовать следующую форму:

$$t_{\mu\nu} \approx \frac{1}{8\pi G} \left[ R_{\mu\nu}^{(2)} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \eta^{\lambda\rho} R_{\lambda\rho}^{(2)} \right]. \quad (10.3.1)$$

[В случае реальной метрики в нуль обращается  $R_{\mu\nu}$ , а не  $R_{\mu\nu}^{(1)}$ , и  $t_{\mu\nu}$  определяется только членами первого порядка в выражении (7.6.4). Здесь используется тем не менее  $R_{\mu\nu}^{(1)}$ , а не  $R_{\mu\nu}$ , который равен нулю, поскольку  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$  удовлетворяет уравнениям Эйнштейна первого порядка, а не точным уравнениям. Различия возникают только в порядке  $h^3$ .] Чтобы вычислить  $R_{\mu\nu}^{(2)}$ , надо подставить выражение (10.2.1) в (7.6.15); результат оказывается очень громоздким, но его можно упростить, усредняя  $t_{\mu\nu}$  по области пространства-времени, много большей чем  $|k|^{-1}$ .

(Это обычный способ вычисления энергии и импульса любой волны.) Усреднение обращает в нуль все члены, пропорциональные  $\exp(\pm 2ik_\lambda x^\lambda)$ , оставляя только перекрестные члены, не зависящие от  $x^\mu$ :

$$\begin{aligned} \langle R_{\mu\nu}^{(2)} \rangle = & \operatorname{Re} \{ e^{\lambda\rho*} [k_\mu k_\nu e_{\lambda\rho} - k_\mu k_\lambda e_{\nu\rho} - \\ & - k_\nu k_\rho e_{\mu\lambda} + k_\lambda k_\rho e_{\mu\nu}] + \left[ e^{\lambda\rho} k_\lambda - \frac{1}{2} e_\lambda^\lambda k_\rho \right]^* \times \\ & \times [k_\mu e^\rho_\nu + k_\nu e^\rho_\mu - k^\rho e_{\mu\nu}] - \\ & - \frac{1}{2} [k_\lambda e_{\rho\nu} + k_\nu e_{\rho\lambda} - k_\rho e_{\lambda\nu}]^* \times \\ & \times [k^\lambda e^\rho_\mu + k_\mu e^{\rho\lambda} - k^\rho e_\mu^\lambda] \}. \end{aligned} \quad (10.3.2)$$

Пока еще не использованы условия (10.2.2) и (10.2.3), отвечающие гармоническим координатам. Поэтому на какое-то время откажемся от системы гармонических координат и прибавим к  $h_{\mu\nu}(x)$  следующий член:

$$i(q_\mu \varepsilon_\nu + q_\nu \varepsilon_\mu) \exp(iq_\lambda x^\lambda) - i(q_\mu \varepsilon_\nu^* + q_\nu \varepsilon_\nu^*) \exp(-iq_\lambda x^\lambda), \quad (10.3.3)$$

где  $q_\mu q^\mu \neq 0$ . При усреднении по пространственно-временным интервалам, много большим чем  $|q - k|^{-1}$ , интерференция между (10.2.4) и (10.3.3) *пропадает* и  $\langle R_{\mu\nu}^{(2)} \rangle$  оказывается состоящим из (10.3.2) и еще одного такого же члена, в котором заменены  $k$  на  $q$ , а  $e_{\mu\nu}$  на  $q_\mu \varepsilon_\nu + q_\nu \varepsilon_\mu$ . Однако, проверяя (10.3.2), легко видеть, что этот второй член *исчезает* и поэтому  $\langle R_{\mu\nu}^{(2)} \rangle$ , а следовательно, и  $\langle t_{\mu\nu} \rangle$  можно без потери общности вычислить в гармонических координатах.]

Если подставить теперь в (10.3.2) условия гармонических координат (10.2.2) и (10.2.3), получим

$$\langle R_{\mu\nu}^{(2)} \rangle = \frac{k_\mu k_\nu}{2} (e^{\lambda\rho*} e_{\lambda\rho} - \frac{1}{2} |e^\lambda_\lambda|^2). \quad (10.3.4)$$

Величина  $\eta^{\lambda\rho} \langle R_{\lambda\rho}^{(2)} \rangle$  исчезает, поскольку  $k^\rho k_\rho = 0$ , и, следовательно, выражение (10.3.1) приводит к усредненному тензору энергии-импульса плоской волны:

$$\langle t_{\mu\nu} \rangle = \frac{k_\mu k_\nu}{16\pi G} \left( e^{\lambda\rho*} e_{\lambda\rho} - \frac{1}{2} |e^\lambda_\lambda|^2 \right). \quad (10.3.5)$$

Заметим, что «калибровочное преобразование» (10.2.7) заменяет отдельные члены в  $\langle t_{\mu\nu} \rangle$  на следующие:

$$\begin{aligned} e'^{\lambda\rho*} e'_{\lambda\rho} &= e^{\lambda\rho*} e_{\lambda\rho} + 2\operatorname{Re} \varepsilon_\rho^* k^\rho e^\lambda_\lambda + 2 |e_\rho^\lambda k^\rho|^2, \\ e'^\lambda_\lambda &= e^\lambda_\lambda + 2k^\lambda \varepsilon_\lambda, \end{aligned}$$

однако  $\langle t_{\mu\nu} \rangle$  — величина калибровочно-инвариантная! Таким образом, коль скоро энергия и импульс связаны между собой, поляризации  $e_{\mu\nu}$  и  $e_{\mu\nu} + k_\mu \varepsilon_\nu + k_\nu \varepsilon_\mu$  соответствуют одной и той же

физической волне и, следовательно, существует не шесть, а только два физически оправданных значения поляризационных параметров. В частности, распространяющаяся вдоль оси  $z$  волна, волновой вектор и тензор поляризации которой задаются соотношениями (10.2.8) и (10.2.9), имеет следующий тензор энергии-импульса:

$$\langle t_{\mu\nu} \rangle = \frac{k_\mu k_\nu}{8\pi G} (|e_{11}|^2 + |e_{12}|^2), \quad (10.3.6)$$

который через спиральные амплитуды (10.2.15) записывается так:

$$\langle t_{\mu\nu} \rangle = \frac{k_\mu k_\nu}{16\pi G} (|e_+|^2 + |e_-|^2). \quad (10.3.7)$$

#### § 4. Возбуждение гравитационных волн

Вычислим энергию, отдаваемую системой в виде гравитационного излучения. Представим тензор энергии-импульса системы в виде интеграла Фурье:

$$T_{\mu\nu}(x, t) = \int_0^\infty d\omega T_{\mu\nu}(x, \omega) e^{i\omega t} + \text{к. с.}, \quad (10.4.1)$$

либо в виде суммы фурье-компонент:

$$T_{\mu\nu}(x, t) = \sum_\omega e^{-i\omega t} T_{\mu\nu}(x, \omega) + \text{к. с.} \quad (10.4.2)$$

(Здесь символ «+ к. с.» означает «плюс комплексно-сопряженное выражение».) Произведем сперва вычисления для одной фурье-компоненты:

$$T_{\mu\nu}(x, t) = T_{\mu\nu}(x, \omega) e^{-i\omega t} + \text{к. с.}, \quad (10.4.3)$$

а затем вернемся к более общей системе, описываемой соотношениями (10.4.1) и (10.4.2).

Из (10.1.11) следует, что поле, излучаемое источником (10.4.3), имеет вид

$$h_{\mu\nu}(x, t) = 4G \int \frac{d^3 x'}{|x - x'|} S_{\mu\nu}(x') \exp \{-i\omega t + i\omega |x - x'|\} + \text{к. с.}, \quad (10.4.4)$$

где

$$S_{\mu\nu}(x, \omega) \equiv T_{\mu\nu}(x, \omega) - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} T^\lambda_\lambda(x, \omega). \quad (10.4.5)$$

Предположим, что мы исследуем излучение, находясь в волновой зоне, т. е. на расстоянии  $r \equiv |x|$  от источника, много большем, чем размер  $R = |x'|_{\max}$  источника, и, кроме того, величина  $r$