физической волне и, следовательно, существует не шесть, а только два физически оправданных значения поляризационных параметров. В частности, распространяющаяся вдоль оси z волна, волновой вектор и тензор поляризации которой задаются соотношениями (10.2.8) и (10.2.9), имеет следующий тензор энергии-импульса:

$$\langle t_{\mu\nu}\rangle = \frac{k_\mu k_\nu}{8\pi G}\left(|e_{11}|^2+|e_{12}|^2\right), \tag{10.3.6}$$

который через спиральные амплитуды (10.2.15) записывается так:

$$\langle t_{\mu\nu}\rangle = \frac{k_\mu k_\nu}{16\pi G}\left(|e_+|^2+|e_-|^2\right). \tag{10.3.7}$$

§ 4. Возбуждение гравитационных волн

Вычислим энергию, отдаваемую системой в виде гравитационного излучения. Представим тензор энергии-импульса системы в виде интеграла Фурье:

$$T_{\mu\nu}(\mathbf{x},\ t) = \int_0^\infty d\omega T_{\mu\nu}\ (\mathbf{x},\ \omega)\, e^{i\omega t} + \text{к. с.}, \tag{10.4.1}$$

либо в виде суммы фурье-компонент:

$$T_{\mu\nu}\ (\mathbf{x},\ t) = \sum_\omega e^{-i\omega t} T_{\mu\nu}\ (\mathbf{x},\ \omega) + \text{к. с.} \tag{10.4.2}$$

(Здесь символ «+к. с.» означает «плюс комплексно-сопряженное выражение».) Произведем сперва вычисления для одной фурье-компоненты:

$$T_{\mu\nu}(\mathbf{x},\ t) = T_{\mu\nu}(\mathbf{x},\ \omega)\, e^{-i\omega t} + \text{к. с.}, \tag{10.4.3}$$

а затем вернемся к более общей системе, описываемой соотношениями (10.4.1) и (10.4.2).

Из (10.1.11) следует, что поле, излучаемое источником (10.4.3), имеет вид

$$h_{\mu\nu}(\mathbf{x},\ t) = 4G \int \frac{d^3\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} S_{\mu\nu}(\mathbf{x}') \exp\{-i\omega t + i\omega\,|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|\} + \text{к. с.}, \tag{10.4.4}$$

где

$$S_{\mu\nu}(\mathbf{x},\ \omega) \equiv T_{\mu\nu}(\mathbf{x},\ \omega) - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} T^\lambda{}_\lambda(\mathbf{x},\ \omega). \tag{10.4.5}$$

Предположим, что мы исследуем излучение, находясь в волновой зоне, т. е. на расстоянии $r \equiv |\mathbf{x}|$ от источника, много большем, чем размер $R = |\mathbf{x}'|_{\text{макс}}$ источника, и, кроме того, величина r

намного больше, чем ωR^2 и $1/\omega$. Тогда знаменатель $|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|$ в (10.4.4) можно заменить на r, а в экспоненте написать приближенно

$$|\mathbf{x}-\mathbf{x}'| \approx r-\mathbf{x}'\cdot\hat{\mathbf{x}}, \qquad \hat{\mathbf{x}} \equiv \frac{\mathbf{x}}{r}.$$

Тогда поле примет вид

$$h_{\mu\nu}(\mathbf{x}, t) = \frac{4G}{r}\exp(i\omega r - i\omega t)\int d^3x' S_{\mu\nu}(\mathbf{x}', \omega)\, e^{-i\omega\hat{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{x}'} + \text{к. с.} \quad (10.4.6)$$

Поскольку по предположению $r\omega$ — величина большая, то выражение (10.4.6) выглядит как плоская волна:

$$h_{\mu\nu}(\mathbf{x}, t) = e_{\mu\nu}(\mathbf{x}, \omega)\exp(ik_\mu x^\mu) + \text{к. с.} \quad (10.4.7)$$

с «волновым вектором» и «тензором поляризации», задаваемыми в виде

$$\mathbf{k} = \omega\hat{\mathbf{x}}, \qquad k^0 \equiv \omega, \quad (10.4.8)$$

$$\varepsilon_{\mu\nu}(\mathbf{x}, \omega) \equiv \frac{4G}{r}\int d^3x' S_{\mu\nu}(\mathbf{x}', \omega)\, e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'}. \quad (10.4.9)$$

Удобнее выразить явно $e_{\mu\nu}$ через фурье-образ тензора $T_{\mu\nu}$:

$$e_{\mu\nu}(\mathbf{x}, \omega) = \frac{4G}{r}\left[T_{\mu\nu}(\mathbf{k}, \omega) - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}T^\lambda{}_\lambda(\mathbf{k}, \omega)\right], \quad (10.4.10)$$

$$T_{\mu\nu}(\mathbf{k}, \omega) \equiv \int d^3x' T_{\mu\nu}(\mathbf{x}', \omega)\, e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'}. \quad (10.4.11)$$

Закон сохранения для $T_{\mu\nu}(\mathbf{x}, t)$ имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}T^\mu{}_\nu(\mathbf{x}, t) = 0.$$

Применяя его к (10.4.3), получаем

$$\frac{\partial}{\partial x^i}T^i{}_\nu(\mathbf{x}, \omega) - i\omega T^0{}_\nu(\mathbf{x}, \omega) = 0.$$

Умножая последнее выражение на $e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$ и интегрируя по $\mathbf{x}$, находим, что $T_{\mu\nu}(\mathbf{k}, \omega)$ подчиняется следующему алгебраическому соотношению:

$$k_\mu T^\mu{}_\nu(\mathbf{k}, \omega) = 0, \quad (10.4.12)$$

где вектор k^μ задается выражением (10.4.8). Отметим попутно, что (10.4.10) подчиняется условию гармоничности координат (10.2.3).

Вычислим приходящуюся на единицу телесного угла мощность излучения, испускаемого в направлении $\hat{x}$. Поскольку $r \gg 1/\omega$, то в качестве вектора потока энергии можно принять величину $\langle t^{i0}\rangle$, усредненную по области пространства-времени, много большей чем $1/\omega$. Тогда мощность излучения на единицу телесного угла

равна
$$\frac{dP}{d\Omega}=r^2\hat{x}^i\langle t^{i0}\rangle.$$

Используя для $\langle t^{\mu\nu}\rangle$ выражение (10.3.5), получаем
$$\frac{dP}{d\Omega}=\frac{r^2(\mathbf{k}\cdot\hat{\mathbf{x}})\,k^0}{16\pi G}\left[e^{\lambda\nu*}(\mathbf{x},\,\omega)\,e_{\lambda\nu}(\mathbf{x},\,\omega)-\frac{1}{2}\,|\,e^{\lambda}{}_{\lambda}(\mathbf{x},\,\omega)\,|^2\right],$$
а подставляя сюда выражения (10.4.8) и (10.4.10) для k^μ и $e_{\lambda\nu}$ соответственно, видим, что множитель r^2 сокращается и окончательное выражение выглядит так:
$$\frac{dP}{d\Omega}=\frac{G\omega^2}{\pi}\left[T^{\lambda\nu*}(\mathbf{k},\,\omega)\,T_{\lambda\nu}(\mathbf{k},\,\omega)-\frac{1}{2}\,|\,T^{\lambda}{}_{\lambda}(\mathbf{k},\,\omega)\,|^2\right]. \qquad (10.4.13)$$
Мы решили задачу, раз вычислили фурье-образ (10.4.11).

Удобно выразить (10.4.13) через чисто пространственно-подобные компоненты $T^{\lambda\nu}(\mathbf{k},\,\omega)$. Из (10.4.12) следует
$$T_{0i}(\mathbf{k},\,\omega)=-\hat{k}^jT_{ji}(\mathbf{k},\,\omega),$$
$$T_{00}(\mathbf{k},\,\omega)=\hat{k}^i\hat{k}^jT_{ji}(\mathbf{k},\,\omega),$$
где $\hat{\mathbf{k}}\equiv\mathbf{k}/\omega\equiv\hat{\mathbf{x}}$. Подстановка этих выражений в (10.4.13) дает
$$\frac{dP}{d\Omega}=\frac{G\omega^2}{\pi}\Lambda_{ij,\,lm}(\hat{\mathbf{k}})\,T^{ij*}(\mathbf{k},\,\omega)\,T^{lm}(\mathbf{k},\,\omega), \qquad (10.4.14)$$
где
$$\Lambda_{ij,\,lm}(\hat{\mathbf{k}})\equiv\delta_{il}\delta_{jm}-2\hat{k}_j\hat{k}_m\delta_{il}+$$
$$+\frac{1}{2}\hat{k}_i\hat{k}_j\hat{k}_l\hat{k}_m-\frac{1}{2}\delta_{ij}\delta_{lm}+\frac{1}{2}\delta_{ij}\hat{k}_l\hat{k}_m+\frac{1}{2}\delta_{lm}\hat{k}_i\hat{k}_j. \qquad (10.4.15)$$

Если тензор энергии-импульса есть *сумма* типа (10.4.2) отдельных фурье-компонент, то поле $h_{\mu\nu}$ можно представить в волновой зоне как сумму плоских волн (10.4.7). Тогда гравитационный тензор энергии-импульса будет задаваться в виде двойной суммы по этим фурье-компонентам, однако при усреднении по временному интервалу, намного превосходящему наибольший период биений (т. е. обратную величину наименьшей разности частот), перекрестные члены исчезают. В этом случае энергия будет иметь вид суммы членов, подобных (10.4.14), по одному на каждую частоту источника.

Если же тензор энергии-импульса есть *интеграл* Фурье, то поле $h_{\mu\nu}$ представляется в волновой зоне в виде интеграла по ω от отдельных плоских волн (10.4.7), а гравитационный тензор энергии-импульса будет записываться тогда как двойной интеграл $\int\int d\omega\,d\omega'$ от произведения этих членов. Подынтегральное выражение содержит зависящую от времени экспоненту $\exp(-i(\omega-\omega')\,t)$, однако здесь уже нет никакого «наибольшего периода биений», и поэтому мы не станем вычислять среднюю мощность, а подсчитаем полную излучаемую энергию. Эта величина определяется как интеграл от мощности по всему временному интервалу, и в результате множители $e^{-i\omega t}e^{i\omega' t}$ в двойном интеграле для мощности заменяются величиной

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i(\omega-\omega')t)\,dt = 2\pi\delta(\omega-\omega').$$

Таким образом, энергия, излучаемая в единичный телесный угол, ориентированный вдоль $\mathbf{k}$, выражается в виде однократного интеграла:

$$\frac{dE}{d\Omega} = 2G\int_0^\infty \omega^2\left[T^{\lambda\nu *}(\mathbf{k},\omega)\,T_{\lambda\nu}(\mathbf{k},\omega) - \frac{1}{2}\,|T^{\lambda}{}_{\lambda}(\mathbf{k},\omega)|^2\right]d\omega, \qquad (10.4.16)$$

который можно следующим образом записать через пространственно-пространственные компоненты:

$$\frac{dE}{d\Omega} = 2G\Lambda_{ij,\,lm}(\hat{\mathbf{k}})\int_0^\infty \omega^2 T^{ij*}(\mathbf{k},\omega)\,T^{lm}(\mathbf{k},\omega)\,d\omega.$$

В качестве примера рассмотрим систему n свободных частиц, которые, первоначально двигаясь с постоянной скоростью $\mathbf{v}_n$, сталкиваются в момент времени $t=0$ в начале координат, а затем вновь разлетаются, теперь уже со скоростями $\widetilde{\mathbf{v}}_n$. В этом случае тензор энергии-импульса задается следующим образом:

$$T^{\mu\nu}(\mathbf{x},t) = \sum_n \frac{P_n{}^{\mu}P_n{}^{\nu}}{E_n}\,\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{v}_n t)\,\theta(-t) + \sum_n \frac{\widetilde{P}_n{}^{\mu}\widetilde{P}_n{}^{\nu}}{\widetilde{E}_n}\,\delta^3(\mathbf{x}-\widetilde{\mathbf{v}}_n t)\,\theta(t), \qquad (10.4.17)$$

где $P_n{}^0 = E_n = m_n(1-\mathbf{v}_n{}^2)^{-1/2}$ и $\mathbf{P}_n = E_n\mathbf{v}_n$ — энергия и импульс n-й налетающей частицы, $\widetilde{P}_n{}^0 = \widetilde{E}_n$ и $\widetilde{\mathbf{P}}_n$ — аналогичные величины для рассеянных частиц, а θ — функция ступеньки:

$$\theta(s) = \begin{cases} +1, & s>0, \\ 0, & s<0. \end{cases} \qquad (10.4.18)$$

Функции θ и δ^3 имеют, как известно, следующие интегральные представления:

$$\theta(s) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{+i\omega s}}{\omega - i\varepsilon}\,d\omega, \qquad \varepsilon\to 0+, \qquad (10.4.19)$$

$$\delta^3(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\mathbf{k}\,e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \qquad (10.4.20)$$

[Отметим, что для доказательства (10.4.19) контур интегрирования можно замкнуть большим полукругом в нижней или верхней полуплоскости в зависимости от того, будет ли $s < 0$ или $s > 0$. Чтобы доказать (10.4.20), необходимо просто взять фурье-образ от обеих частей.] Отсюда видно, что $T^{\mu\nu}(\mathbf{x}, t)$ (10.4.1) имеет следующий вид:

$$T^{\mu\nu}(\mathbf{x}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^4 i}\left[\sum_n \frac{P_n{}^\mu P_n{}^\nu}{E_n}\int d^3\mathbf{k}\,\frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{\omega - \mathbf{v}_n\cdot\mathbf{k} - i\varepsilon} - \right.$$
$$\left. - \sum_n \frac{\widetilde{P}_n{}^\mu \widetilde{P}_n{}^\nu}{\widetilde{E}_n}\int d^3\mathbf{k}\,\frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{\omega - \widetilde{\mathbf{v}}_n\cdot\mathbf{k} + i\varepsilon}\right],$$

а фурье-образ (10.4.11) выглядит так:

$$T^{\mu\nu}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{2\pi i}\left[\sum_n \frac{P_n{}^\mu P_n{}^\nu}{E_n(\omega - \mathbf{v}_n\cdot\mathbf{k} - i\varepsilon)} - \sum_n \frac{\widetilde{P}_n{}^\mu \widetilde{P}_n{}^\nu}{\widetilde{E}_n(\omega - \widetilde{\mathbf{v}}_n\cdot\mathbf{k} + i\varepsilon)}\right].$$

Если $\omega = |\mathbf{k}|$ и $|\mathbf{v}_n| < 1$, то величина $\omega - \mathbf{v}_n\cdot\mathbf{k}$ в знаменателе не может обратиться в нуль и член $\pm i\varepsilon$ можно опустить. (Случай частиц, движущихся со скоростью света, будет рассматриваться ниже.) Далее, учитывая, что $E_n(\mathbf{v}_n\cdot\mathbf{k} - \omega) = p_n{}^\lambda k_\lambda \equiv (P_n\cdot k)$, можно записать $T^{\mu\nu}$ в виде

$$T^{\mu\nu}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{2\pi i}\sum_N \frac{P_N{}^\mu P_N{}^\nu \eta_N}{(P_N\cdot k)}. \qquad (10.4.21)$$

Здесь N пробегает по всем номерам частиц как в начальном, так и в конечном состояниях, а знаковый множитель η_N определяется так:

$$\eta_N = \begin{cases} +1, & N \text{ в конечном состоянии,} \\ -1, & N \text{ в начальном состоянии.} \end{cases}$$

Отметим, что (10.4.12) будет выполняться, поскольку

$$k_\nu T^{\mu\nu}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{2\pi i}\sum_N P_N{}^\mu \eta_N,$$

а это обращается в нуль, так как $\sum_N P_N{}^\mu \eta_N$ есть просто разность начального и конечного полных импульсов.

Приходящаяся на единицу телесного угла и на единицу интервала частот гравитационная энергия, излучаемая в направлении $\hat{\mathbf{k}}$ на частоте ω, выражается с помощью соотношения (10.4.16) в следующем виде:

$$\left(\frac{dE}{d\Omega\, d\omega}\right) = \frac{G\omega^2}{2\pi^2}\sum_{N, M}\frac{\eta_N \eta_M}{(P_N\cdot k)(P_M\cdot k)} \times$$
$$\times\left[(P_N\cdot P_M)^2 - \frac{1}{2} m_N{}^2 m_M{}^2\right]. \qquad (10.4.22)$$

Попытка вычислить полную излучаемую энергию, интегрируя выражение (10.4.22) по ω от 0 до ∞, приведет к результату, расходящемуся как $\int^{\infty} d\omega$. Это обусловливается принятым приближением, согласно которому столкновения происходят мгновенно; в действительности же они происходят за время Δt, и поэтому интеграл по ω обрезается при значениях ω порядка $1/\Delta t$.

Заметим, что если при столкновениях ни один из импульсов $P_N{}^\mu$ не меняется, вклады от падающих и разлетающихся частиц в выражении (10.4.21) сокращаются и тензор $T_{\mu\nu}(\mathbf{k}, \omega)$ обращается в нуль. Гравитационные волны излучаются только тогда, когда частицы действительно ускоряются.

Легко видеть, что выражение (10.4.22) становится бесконечным, если одна из частиц, участвующих в реакции (скажем, с $N = 1$), имеет нулевую массу и импульс, параллельный вектору $\mathbf{k}$, поскольку тогда $P_1 \cdot k = E_1\omega\,(\hat{\mathbf{P}}_1 \cdot \hat{\mathbf{k}} - 1) \to 0$. Однако эта сингулярность только кажущаяся, поскольку, когда $\mathbf{P}_1$ становится параллельным $\mathbf{k}$, можно считать, что для всех $M \neq 1$ величина $(P_1 \cdot P_M)$ в (10.4.22) пропорциональна $(k \cdot P_M)$, и поэтому сингулярная часть принимает вид

$$\frac{G\omega^2}{\pi^2}\frac{\eta_1}{(P_1 \cdot k)}\sum_{M\neq 1}\frac{\eta_M}{(P_M \cdot k)}(P_1 \cdot P_M)^2 \sim \sum_{M\neq 1}\eta_M\,(P_1 \cdot P_M).$$

Мы уже отмечали, что величина $\sum_M \eta_M P_M{}^\mu$ обращается в нуль, если суммировать по всем частицам; поэтому правая часть есть просто $-\eta_1 P_1{}^2$, а эта величина в свою очередь равна нулю, так как по предположению частица 1 имеет нулевую массу. Таким образом, применение выражения (10.4.22) к столкновению фотонов, нейтронов или даже, забегая немного вперед, гравитонов не встречает затруднений.

Полную излучаемую при столкновениях гравитационную энергию, приходящуюся на единицу частоты, можно получить, интегрируя выражение (10.4.22) по направлению вектора $\hat{\mathbf{k}}$. Получаем следующий результат:

$$\frac{dE}{d\omega} = \frac{G}{2\pi}\sum_{NM}\eta_N\eta_M m_N m_M\,\frac{1+\beta_{NM}^2}{\beta_{NM}(1-\beta_{NM}^2)^{1/2}}\ln\left(\frac{1+\beta_{NM}}{1-\beta_{NM}}\right), \qquad (10.4.23)$$

где β_{NM} — относительная скорость частиц N и M — записывается так:

$$\beta_{NM} \equiv \left[1 - \frac{m_N^2 m_M^2}{(P_N \cdot P_M)^2}\right]^{1/2}.$$

Для нерелятивистского двухчастичного упругого рассеяния формула (10.4.23) принимает следующий вид:

$$\frac{dE}{d\omega} = \frac{8G}{5\pi}\,\mu^2 v^4 \sin^2\theta, \qquad (10.4.24)$$

где μ — приведенная масса, v — относительная скорость, θ — угол рассеяния в системе центра масс.

Гравитационное излучение, порожденное столкновениями, происходящими в газе, можно вычислить, суммируя радиационную энергию отдельных столкновений, задаваемую уравнениями (10.4.23) или (10.4.24), если столкновения достаточно разделены во времени, чтобы не было интерференции между отдельными актами. Условие отсутствия интерференции можно записать так:

$$\omega \gg \omega_c, \tag{10.4.25}$$

где ω_c есть частота тепловых столкновений частиц газа. (Если $\omega \ll \omega_c$, то газ ведет себя как жидкость, а не как совокупность независимых частиц.) Если выполняется (10.4.25), мощность, приходящаяся на единицу объема и частоты, равна

$$\frac{dP}{d\omega} = \frac{8G}{5\pi} \sum_{(a,\,b)} \mu_{ab}^2 n_a n_b \left\langle v_{ab}^5 \int \frac{d\sigma_{ab}}{d\Omega} \sin^2\theta \, d\Omega \right\rangle, \tag{10.4.26}$$

где n_a есть плотность числа частиц типа a в газе, $d\sigma_{ab}/d\Omega$ — дифференциальное сечение рассеяния в системе центра масс; суммирование идет по всем типам пар частиц, а усреднение $\langle \ldots \rangle$ проводится по всем столкновениям.

Для примера вычислим гравитационное излучение, возникающее при кулоновских столкновениях в плазме. Резерфордовское сечение рассеяния равно

$$\frac{d\sigma_{ab}}{d\Omega} = \frac{e_a{}^2 e_b{}^2}{4 v_{ab}^4 \mu_{ab}^2 \sin^4(\theta/2)}. \tag{10.4.27}$$

Интеграл по θ должен быть обрезан снизу минимальным значением угла $1/\Lambda$, где $\Lambda \gg 1$ определяется дебаевской экранировкой кулоновских сил при больших параметрах столкновений. В этом случае имеем

$$\int \frac{d\sigma_{ab}}{d\Omega} \sin^2\theta \, d\Omega \approx \frac{4\pi e_a{}^2 e_b{}^2 \ln\Lambda}{\mu_{ab}{}^2 v_{ab}{}^4}. \tag{10.4.28}$$

Вышло среднее значение v_{ab}, которое для распределения Максвелла — Больцмана равно

$$\langle v_{ab} \rangle = 2\left(\frac{2kT}{\pi\mu_{ab}}\right)^{1/2}. \tag{10.4.29}$$

Подставив (10.4.28) и (10.4.29) в (10.4.26), получим (в системе СГС) мощность излучения на единицу объема и частоты:

$$\frac{dP}{d\omega} = \frac{64G}{5c^5}\left(\frac{2kT}{\pi}\right)^{1/2} \ln\Lambda \sum_{(a,\,b)} \frac{n_a n_b e_a{}^2 e_b{}^2}{\sqrt{\mu_{ab}}}. \tag{10.4.30}$$

Обычно $\ln\Lambda$ есть величина порядка 10. Для полностью ионизированной плазмы водорода необходимо учесть электрон-электронные и электрон-протонные столкновения, и тогда (10.4.30) дает

$$\frac{dP}{d\omega}=\frac{64Gn_e^2e^4}{5c^5}\left(\frac{2kT}{\pi m_e}\right)^{1/2}(1+\sqrt{2})\ln\Lambda. \qquad (10.4.31)$$

Частоту электронных столкновений можно в этом случае оценить следующим образом:

$$\omega_c\approx\frac{e^4n_e\langle v\rangle}{(kT)^2}\approx\frac{e^4n_e}{(kT)^{3/2}\sqrt{m_e}}. \qquad (10.4.32)$$

Уравнения (10.4.30) и (10.4.31) справедливы, если $\omega\gg\omega_c$ и и $\hbar\omega\ll kT$.

Эти результаты можно применить к водородной плазме в ядре Солнца. Внутри объема $2\cdot10^{31}$ см^3 эта плазма характеризуется следующими параметрами: $T\approx10^7$ К, $n_e\approx3\cdot10^{25}$ см$^{-3}$ и $\Lambda\approx\approx4$. Частота столкновений, определяемая (10.4.32), равна 10^{15} с$^{-1}$, что на три порядка меньше, чем тепловая частота $kT/\hbar\approx\approx10^{18}$ с$^{-1}$. Поэтому полную энергию гравитационного излучения можно оценить, умножая (10.4.31) на $VkT/\hbar$. Поступая таким образом, найдем, что тепловые столкновения в ядре Солнца порождают гравитационное излучение мощностью около 10^8 Вт.

§ 5. Квадрупольное излучение

До сих пор мы не делали никаких приближений, кроме того, основного, что поля слабые. (Использованные нами приближения волновой зоны $r\gg R$, $r\gg1/\omega$, $r\gg\omega R^2$ существенными не были, поскольку мы всегда выбирали достаточно большие r и эти ограничения выполнялись автоматически. Далее, так как энергия сохраняется, то интенсивность излучения, пронизывающего сферу большого радиуса r, равна интенсивности излучения через любую замкнутую поверхность, ограничивающую излучающую систему.) Теперь сделаем еще одно приближение, предположив, что радиус источника R много меньше, чем длина волны $1/\omega$:

$$\omega R\ll1. \qquad (10.5.1)$$

Большая часть радиации излучается на частотах порядка $\bar{v}/R$, где $\bar{v}$ — некоторая характерная скорость внутри системы, так что в действительности мы ввели приближение того же типа, что и приближение $\bar{v}\ll1$, сделанное в предыдущей главе.

Если справедливо условие (10.5.1), то фурье-образы, содержащиеся в соотношениях (10.4.14) и (10.4.16), можно приближенно представить в виде не зависящего от $\mathbf{k}$ интеграла:

$$T_{ij}(\mathbf{k},\omega)\approx\int d^3x\,T_{ij}(\mathbf{x},\omega). \qquad (10.5.2)$$