ные и электрон-протонные столкновения, и тогда (10.4.30) дает

$$\frac{dP}{d\omega}=\frac{64Gn_e{}^2e^4}{5c^5}\left(\frac{2kT}{\pi m_e}\right)^{1/2}(1+\sqrt{2})\ln\Lambda. \qquad (10.4.31)$$

Частоту электронных столкновений можно в этом случае оценить следующим образом:

$$\omega_c\approx\frac{e^4n_e\langle v\rangle}{(kT)^2}\approx\frac{e^4n_e}{(kT)^{3/2}\sqrt{m_e}}. \qquad (10.4.32)$$

Уравнения (10.4.30) и (10.4.31) справедливы, если $\omega\gg\omega_c$ и и $\hbar\omega\ll kT$.

Эти результаты можно применить к водородной плазме в ядре Солнца. Внутри объема $2\cdot10^{31}$ см^3 эта плазма характеризуется следующими параметрами: $T\approx10^7$ К, $n_e\approx3\cdot10^{25}$ см$^{-3}$ и $\Lambda\approx\approx4$. Частота столкновений, определяемая (10.4.32), равна 10^{15} с$^{-1}$, что на три порядка меньше, чем тепловая частота $kT/\hbar\approx\approx10^{18}$ с$^{-1}$. Поэтому полную энергию гравитационного излучения можно оценить, умножая (10.4.31) на $VkT/\hbar$. Поступая таким образом, найдем, что тепловые столкновения в ядре Солнца порождают гравитационное излучение мощностью около 10^8 Вт.

§ 5. Квадрупольное излучение

До сих пор мы не делали никаких приближений, кроме того, основного, что поля слабые. (Использованные нами приближения волновой зоны $r\gg R$, $r\gg1/\omega$, $r\gg\omega R^2$ существенными не были, поскольку мы всегда выбирали достаточно большие r и эти ограничения выполнялись автоматически. Далее, так как энергия сохраняется, то интенсивность излучения, пронизывающего сферу большого радиуса r, равна интенсивности излучения через любую замкнутую поверхность, ограничивающую излучающую систему.) Теперь сделаем еще одно приближение, предположив, что радиус источника R много меньше, чем длина волны $1/\omega$:

$$\omega R\ll1. \qquad (10.5.1)$$

Большая часть радиации излучается на частотах порядка $\bar{v}/R$, где $\bar{v}$ — некоторая характерная скорость внутри системы, так что в действительности мы ввели приближение того же типа, что и приближение $\bar{v}\ll1$, сделанное в предыдущей главе.

Если справедливо условие (10.5.1), то фурье-образы, содержащиеся в соотношениях (10.4.14) и (10.4.16), можно приближенно представить в виде не зависящего от $\mathbf{k}$ интеграла:

$$T_{ij}(\mathbf{k},\ \omega)\approx\int d^3xT_{ij}(\mathbf{x},\ \omega). \qquad (10.5.2)$$

Использовав законы сохранения, перепишем это выражение в форме

$$\frac{\partial^2}{\partial x^i\,\partial x^j}\,T^{ij}(\mathbf{x},\ \omega) = -\omega^2 T^{00}(\mathbf{x},\ \omega).$$

Умножив последнее на $x^i x^j$ и интегрируя по $\mathbf{x}$, находим

$$T_{ij}(\mathbf{k},\ \omega) \approx -\frac{\omega^2}{2}\,D_{ij}(\omega), \tag{10.5.3}$$

$$D_{ij}(\omega) \equiv \int d^3x x^i x^j T^{00}(x,\ \omega). \tag{10.5.4}$$

Следовательно, мощность излучения в единичный телесный угол равна

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{G\omega^6}{4\pi} - \Lambda_{ij,\,lm}(\hat{k})\,D^*_{ij}(\omega)\,D_{lm}(\omega). \tag{10.5.5}$$

Если источник можно описать суммой фурье-компонент, то мощность излучения есть сумма членов типа (10.5.5). Если же источник представляется интегралом Фурье вида (10.4.1), то энергия, излучаемая в единицу телесного угла, равна

$$\frac{dE}{d\Omega} = \frac{1}{2}\,G\Lambda_{ij,\,lm}(\hat{k}) \int\limits_0^\infty \omega^6 D^*_{ij}(\omega)\,D_{lm}(\omega)\,d\omega. \tag{10.5.6}$$

Коэффициенты $D_{ij}(\omega)$ в (10.5.5) и (10.5.6) не зависят от направления излучения $\hat{k}$, поэтому можно раз и навсегда проинтегрировать по телесному углу. Используем следующие формулы:

$$\int d\Omega \hat{k}_i \hat{k}_j = \frac{4\pi}{3}\,\delta_{ij},$$

$$\int d\Omega \hat{k}_i \hat{k}_j \hat{k}_l \hat{k}_m = \frac{4\pi}{15}\,(\delta_{ij}\delta_{lm} + \delta_{il}\delta_{jm} + \delta_{im}\delta_{jl}).$$

(Вид правой части обусловлен симметрией и инвариантностью относительно вращения; численные коэффициенты можно вычислить, сворачивая i с j, а l с m.) Тогда находим

$$\int d\Omega \Lambda_{ij,\,lm}(\hat{k}) = \frac{2\pi}{15}\,[11\delta_{il}\delta_{jm} - 4\delta_{ij}\delta_{jm} + \delta_{im}\delta_{jl}],$$

и мощность излучения с некоторой дискретной частотой ω равна

$$P = \frac{2G\omega^6}{5}\left[D^*_{ij}(\omega)\,D_{ij}(\omega) - \frac{1}{3}\,|D_{ii}(\omega)|^2\right], \tag{10.5.7}$$

а при непрерывном распределении частот полная излучаемая энергия запишется в виде

$$E = \frac{4\pi G}{5} \int\limits_0^\infty \omega^6 \left[D^*_{ij}(\omega)\,D_{ij}(\omega) - \frac{1}{3}\,|D_{ii}(\omega)|^2\right] d\omega. \tag{10.5.8}$$

Прежде чем перейти к вычислению квадрупольного излучения, рождающегося в некоторых особых случаях, необходимо сделать несколько замечаний о методе вычислений.

А. Квадрупольное приближение применяют обычно к нерелятивистским системам, а для таких систем плотность энергии $T^{00}(\mathbf{x}, \omega)$ приближенно равна плотности массы покоя этой системы. Возможно, покажется неожиданным, что нет никакой необходимости явно учитывать в полном тензоре $T^{\mu\nu}$ члены с потенциальной и кинетической энергией, хотя если считать тензор $T^{\mu\nu}$ сохраняющимся, то эти члены необходимо включить. Действительно, для системы частиц, связанных гравитационными силами, необходимо в принципе выбирать $T^{\mu\nu}$ как полный «тензор» $\tau^{\mu\nu}$, построенный в § 6 гл. 7 и содержащий члены, нелинейные по полю. Однако, поскольку мы уже использовали при выводе уравнений (10.5.3) — (10.5.6) условия сохранения энергии и импульса и это дало результат, содержащий только T^{00}, можно аппроксимировать T^{00} плотностью массы покоя.

Б. Для произвольных систем колеблющихся и (или) вращающихся твердых тел часто очень трудно вычислить фурье-образ тензора $T^{00}(\mathbf{x}, \omega)$, определяемый соотношениями (10.4.1) или (10.4.2). Намного легче вычислить сначала моменты

$$D_{ij}(t) \equiv \int d^3x x^i x^j T^{00}(\mathbf{x}, t), \tag{10.5.9}$$

а затем $D_{ij}(\omega)$, записывая $D_{ij}(t)$ в виде интеграла Фурье

$$D_{ij}(t) = \int_0^\infty d\omega\, D_{ij}(\omega)\, e^{-i\omega t} + \text{к. с.} \tag{10.5.10}$$

или в виде суммы компонент Фурье

$$D_{ij}(t) = \sum_\omega e^{-i\omega t} D_{ij}(\omega) + \text{к. с.} \tag{10.5.11}$$

В. Может возникнуть вопрос: что принять за начало координат x^i в интеграле (10.5.4) для D_{ij}? В принципе это не существенно. При смещении начала координат на величину a_i, мы заменяем тензор D_{ij} следующим тензором:

$$\int (x^i - a^i)(x_j - a_j)\, T^{00}(\mathbf{x}, t)\, d^3x =$$
$$= \int x^i x^j T^{00}(\mathbf{x}, t)\, d^3x - a^i \int x^j T^{00}(\mathbf{x}, t)\, d^3x -$$
$$- a^j \int x^i T^{00}(\mathbf{x}, t)\, d^3x + a^i a^j \int T^{00}(\mathbf{x}, t)\, d^3x.$$

Но законы сохранения энергии и импульса требуют, чтобы последние три члена этого выражения были самое большее линейными

функциями времени, потому что

$$\frac{\partial}{\partial t}\int T^{00}(x,\ t)\,d^3x = -\int \frac{\partial}{\partial x^i}T^{i0}(x,\ t)\,d^3x = 0,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int x^i T^{00}(x,\ t)\,d^3x = \int x^i \frac{\partial^2}{\partial x^j\,\partial x^k}T^{jk}(x,\ t)\,d^3x =$$

$$= -\int \frac{\partial}{\partial x^j}T^{ij}(x,\ t)\,d^3x = 0.$$

Таким образом, смещение начала координат не приводит к изменению фурье-компонент с $\omega \neq 0$, т. е.

$$D_{ij}(\omega) \equiv \int x^i x^j T^{00}(\mathbf{x},\ \omega)\,d^3x =$$

$$= \int (x^i - a^i)(x^j - a^j)\,T^{00}(\mathbf{x},\ \omega)\,d^3x. \qquad (10.5.12)$$

Однако только тогда, когда T^{00} — плотность энергии всей системы, при вычислении $D_{ij}(\omega)$ можно свободно смещать начало координат.

Вычислим в качестве первого примера гравитационное излучение, порождаемое звуковыми волнами, распространяющимися в трубе, вытянутой вдоль оси z. Плотность колеблющегося вещества запишем так:

$$\rho = \rho_0 + \rho_1.$$

Здесь ρ_0 — постоянная невозмущенная величина, а ρ_1 — малое возмущение. Скорость вещества v (в направлении z) будем рассматривать также как малое возмущение и, кроме того, пренебрежем диссипативными эффектами. Тогда уравнения движения примут вид

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v}{\partial z} = 0,$$

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} + v_s^2 \frac{\partial \rho_1}{\partial z} = 0,$$

где v_s — скорость звука. Труба не поддерживается на концах (иначе нам необходимо было бы учитывать и гравитационное излучение от опоры!), поэтому давление $v_s^2\rho_1$ на концах трубы обращается в нуль. При таких граничных условиях общее решение уравнений для трубы, занимающей вдоль оси z отрезок от $z = 0$ до $z = L$, есть суперпозиция нормальных колебаний

$$v = -\varepsilon v_s \cos kz \sin(\omega t + \varphi), \qquad (10.5.13)$$

$$\rho_1 = \varepsilon \rho_0 \sin kz \cos(\omega t + \varphi), \qquad (10.5.14)$$

где ε — малое безразмерное число, ϕ — произвольная фаза, а k и ω равны

$$k = N\frac{\pi}{L}, \qquad \omega = N\pi\frac{v_s}{L}, \tag{10.5.15}$$

где N — любое положительное целое число. Так как на концах трубы v не обязательно обращается в нуль, то концы могут в общем случае смещаться на величины $\delta(0, t)$ и $\delta(L, t)$, определяемые формулой

$$\delta(z, t) \equiv \int v(z, t)\,dt = \varepsilon v_s \omega^{-1} \cos kz \cos(\omega t + \phi).$$

Зависящая от времени часть второго момента плотности массы задается в виде

$$D_{ij}(t) = n_i n_j A\left(\int_0^L \rho_1(z\ \ t)\, z^2\, dz + L^2 \rho_0 \delta(L, t)\right),$$

где A — площадь поперечного сечения трубы, а $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$ — единичный вектор в направлении z. Для четных N величина $D_{ij}(t)$ равна нулю, а для нечетных N она равняется

$$D_{ij}(t) = -\left(\frac{4 n_i n_j M L^2 \varepsilon}{N^3 \pi^3}\right) \cos(\omega t + \phi),$$

где $M \equiv \rho_0 A L$ — масса трубы [легко убедиться, что второй момент от распределения массы $D_{ij}(t)$ останется тем же, если при его вычислении начало координат выбрать не в точке $z = 0$]. Сравнивая это выражение с (10.5.11), видим, что $D_{ij}(t)$ имеет фурье-компоненту, равную

$$D_{ij}\left(N\pi\frac{v_s}{L}\right) = -\frac{2 n_i n_j M L^2 \varepsilon}{N^3 \pi^3}. \tag{10.5.16}$$

Таким образом, вычисленная по формуле (10.5.7) излучаемая мощность для любого нечетного N (в единицах СГС) равна

$$P = \frac{16 G M^2 v_s^6 \varepsilon^2}{15 L^2 c^5}. \tag{10.5.17}$$

В моменты времени, когда ρ_1 исчезает, т. е. когда v принимает наибольшие значения, этот результат можно сравнить с полной энергией осцилляций, которая в этом случае есть просто кинетическая энергия

$$E = \frac{1}{2}\rho_0 A \int_0^L v^2_{\text{макс}}(z)\, dz = \frac{1}{4} M v_s^2 \varepsilon^2.$$

Очевидно, что из-за излучения гравитационных волн осциллятор теряет энергию со скоростью

$$\Gamma_{\text{грав}} \equiv \frac{P}{E} = \frac{64 G M v_s^4}{15 L^2 c^5}. \tag{10.5.18}$$

Вычислим, например, интенсивность гравитационного излучения из-за акустических осцилляций в большом алюминиевом цилиндре, использованном как антенна в эксперименте Вебера по детектированию гравитационного излучения [1, 26, 27]. (Как мы увидим ниже, эффективное поперечное сечение такой антенны определяется величиной $\Gamma_{\text{грав}}$.) Цилиндр Вебера имел параметры:

$$L = 153 \text{ см}, \qquad v_s = 5{,}1 \cdot 10^5 \text{ см/с}, \qquad M = 1{,}4 \cdot 10^6 \text{ г}.$$

Следовательно, если единственный механизм потерь есть гравитационное излучение, то при нечетном N осцилляции (10.5.13) и (10.5.14) приведут к следующей скорости потери энергии:

$$\Gamma_{\text{грав}} = 4{,}7 \cdot 10^{-35} \text{ с}^{-1}. \tag{10.5.19}$$

В действительности реальная скорость распада моды с $N = 1$ в этом цилиндре составляет около 0,15 с^{-1} и в основном обусловливается вязкой диссипацией, происходящей в алюминии. Следовательно, относительная вероятность гравитационного излучения имеет следующий порядок:

$$\eta \equiv \frac{\Gamma_{\text{грав}}}{\Gamma} \approx 3 \cdot 10^{-34} \qquad N = 1 \tag{10.5.20}$$

Таким образом, любой обычный механизм осцилляций всегда будет приводить к гораздо большему количеству энергии, выделяемой в виде теплоты, чем в виде гравитационного излучения.

Рассмотрим другой пример. Вычислим мощность излучения, испускаемого вращающимся телом. Если тело жестко вращается вокруг 3-оси с угловой частотой T, то плотность массы T^{00} имеет вид

$$T^{00}(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}')$$

где $\rho(\mathbf{x}')$ — плотность массы, зависящая от координат $\mathbf{x}'$ системы, связанной с телом:

$$x_1 \equiv x_1' \cos \Omega t - x_2' \sin \Omega t,$$
$$x_2 \equiv x_1' \sin \Omega t + x_2' \cos \Omega t,$$
$$x_3 \equiv x_3'.$$

Следовательно, заменяя в (10.5.9) координаты, можно выразить $D_{ij}(t)$ через тензор момента инерции, записанный в координатах $\mathbf{x}'$, связанных с телом:

$$I_{ij} \equiv \int d^3x' x_i' x_j' \rho(\mathbf{x}'). \tag{10.5.21}$$

Для простоты рассмотрим вращение вокруг одной из главных осей эллипсоида инерции, так что $I_{13} = I_{23} = 0$, а оси x_1' и x_2' выберем вдоль других главных осей, так чтобы $I_{12} = 0$. Поскольку

I_{ij} диагонален, имеем

$$D_{11}(t)=\frac{1}{2}(I_{11}+I_{22})+\frac{1}{2}(I_{11}-I_{22})\cos 2\Omega t,$$

$$D_{12}(t)=\frac{1}{2}(I_{11}-I_{22})\sin 2\Omega t,$$

$$D_{22}(t)=\frac{1}{2}(I_{11}+I_{22})-\frac{1}{2}(I_{11}-I_{22})\cos 2\Omega t,$$

$$D_{13}(t)=D_{23}(t)=0,$$

$$D_{33}(t)=I_{33}.$$

Тогда в выражении (10.5.11) неисчезающие коэффициенты Фурье для $\omega = 2\Omega$ имеют вид

$$D_{11}(2\Omega)=-D_{22}(2\Omega)=iD_{12}(2\Omega)=\frac{1}{4}(I_{11}-I_{22}).$$

Согласно формуле (10.5.7), при удвоенной частоте вращения полная излучаемая мощность (в единицах СГС) равна

$$P(2\Omega)=\frac{32G\Omega^6I^2e^2}{5c^5}, \tag{10.5.22}$$

где I — момент инерции и e — сплюснутость:

$$I\equiv I_{11}+I_{22}, \tag{10.5.23}$$

$$e\equiv\frac{I_{11}-I_{22}}{I}. \tag{10.5.24}$$

Для тел, обладающих круговой симметрией относительно оси вращения, $e = 0$ и, следовательно, гравитационное излучение отсутствует. (В действительности этот вывод не связан с квадрупольным приближением, так как хотя рассматриваемое тело и вращается, оно имеет не зависящий от времени тензор энергии-импульса.) Для точечной массы m, фиксированной в точке $x_1' = r$, $x_2' = x_3' = 0$ во *вращающейся* системе координат, единственным отличным от нуля элементом I_{ij} будет $I_{11} = mr^2$; поэтому $I = mr^2$, $e = 1$ и соотношение (10.5.23) приводит к следующей формуле для мощности излучения:

$$P(2\Omega)=\frac{32G\Omega^6m^2r^4}{5c^5}. \tag{10.5.25}$$

Приведем пример. Орбитальное движение планеты Юпитер характеризуется параметрами

$$\Omega = 1{,}68\cdot10^{-8}\ \text{с}^{-1},\qquad m = 1{,}9\cdot10^{30}\ \text{г},\qquad r = 7{,}78\cdot10^{13}\ \text{см},$$

и уравнение (10.5.25) дает для мощности гравитационного излучения значение 5,3 кВт, т. е. даже меньшее, чем значение мощности гравитационного излучения, создаваемого тепловыми колебаниями в ядре Солнца, вычисленное в предыдущем параграфе.

Для того, чтобы заметить хоть какой-нибудь эффект изменения орбиты Юпитера из-за такой потери энергии, нужно наблюдать Юпитер значительно дольше, чем все время существования Солнечной системы.

Можно показать из более общих соображений, что эффектами гравитационного излучения в небесной механике можно пренебречь. Мощность излучения системы, состоящей из частиц со средней массой $\overline{M}$, средними размерами $\overline{r}$ и со средней скоростью $\overline{v}$, имеет на частоте $\omega \sim \overline{v}/\overline{r}$ следующий порядок [ср. с выражением (10.5.7)]:

$$P \sim G\left(\frac{\overline{v}}{\overline{r}}\right)^6 \overline{M}^2\overline{r}^4,$$

или, поскольку $G\overline{M}/\overline{r}$ есть величина порядка $\overline{v}^2$, получаем

$$P \sim \overline{M}\frac{\overline{v}^8}{\overline{r}}.$$

В такой системе средняя величина замедления частиц $\overline{a}_{\text{рад}}$ из-за потерь энергии определяется значением мощности P, деленной на импульс $\overline{M}\overline{v}$, т. е.

$$\overline{a}_{\text{рад}} \sim \frac{\overline{v}^7}{\overline{r}}.$$

Этот результат можно сравнить с ускорением порядка $\overline{v}^2/\overline{r}$, вычисленным в ньютоновской механике, и с постньютоновскими поправками, обсужденными в предыдущей главе, порядок которых $\overline{v}^4/\overline{r}$. [Величины, описывающие эффекты излучения, содержат *нечетные* степени $\overline{v}$, поскольку они представляют необратимые процессы, что было видно из использованного нами решения для рассеянной волны в формуле (10.4.4).] Поскольку реакция излучения слабее, чем постньютоновские поправки из-за умножения на $\overline{v}^3 < 10^{-12}$, то пренебрежение в предыдущей главе реакцией излучения совершенно оправдано. Действительно, если набраться терпения, мы могли бы (не сталкиваясь с эффектами гравитационного излучения!) вычислить пост-постньютоновские ускорения [2] [1]), порядок которых $\overline{v}^6/\overline{r}$.

Открытие пульсаров дало нам более перспективный источник гравитационного излучения. В § 4 гл. 11 читатель найдет обсуждение возможности того, что пульсары являются нейтронными звездами [4], масса которых порядка массы Солнца, радиус ~ 10 км и, следовательно, момент инерции I имеет порядок 10^{45} г·см^2. Родившийся от сверхновой пульсар может вращаться с частотой Ω порядка 10^4 с$^{-1}$ и поэтому, согласно формуле (10.5.22),

[1]) Обратное действие излучения рассмотрено в [3].

должен излучать гравитационные волны с интенсивностью $10^{55}e^2$ эрг/с. Для сравнения заметим, что полная энергия вращения пульсара составляла бы около 10^{53} эрг, и поэтому бо́льшая часть кинетической энергии пульсара излучалась бы в течение нескольких лет в виде гравитационных волн [1]) при том условии, что экваториальный эксцентриситет e был бы не менее 10^{-4}. В действительности это слишком большое значение для статического эксцентриситета, чтобы он мог сохраняться в огромном гравитационном поле нейтронной звезды, но это значение, вероятно, возникает за счет динамических эффектов. В частности, это может осуществляться в ранний период, до того как пульсар приобретает устойчивую равновесную конфигурацию. В конце концов пульсар замедлится настолько, что другие механизмы потерь, такие, как магнитное дипольное излучение (для которого $P \sim \Omega^4$), станут более важными, чем гравитационное излучение.

§ 6. Рассеяние и поглощение гравитационного излучения

Рассмотрим плоскую гравитационную волну с поляризацией $e_{\mu\nu}$ и волновым вектором k^μ, которая падает на мишень, находящуюся в начале координат. На большом расстоянии от мишени гравитационная волна будет в общем случае состоять из плоской волны и расходящейся волны (см., например, [7]):

$$h_{\mu\nu}(\mathbf{x}, t) \xrightarrow[r\to\infty]{} \left[e_{\mu\nu}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + f_{\mu\nu}(\hat{\mathbf{x}})\frac{e^{i\omega r}}{r}\right]e^{-i\omega t}, \qquad (10.6.1)$$

где $r \equiv |\mathbf{x}|$, $\hat{\mathbf{x}} \equiv \mathbf{x}/r$, $\omega \equiv |\mathbf{k}|$ и $f_{\mu\nu}$ — *амплитуда рассеяния*, которая может зависеть от $\hat{\mathbf{x}}$ и ω, но не от r или t.

Чтобы исследовать энергетический баланс между гравитационной волной и мишенью, необходимо разложить волну (10.6.1) на сходящуюся и расходящуюся волны. Плоскую волну в (10.6.1) можно разложить по полиномам Лежандра [8]:

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)P_l(\hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{x}})\,i^l j_l(\omega r).$$

Здесь j_l — сферические функции Бесселя порядка l (см. [8]). Поскольку существует асимптотическое соотношение (см. [8])

$$i^l j_l(\omega r) \to \frac{1}{2i\omega r}\left[e^{i\omega r} - (-1)^l e^{-i\omega r}\right],$$

[1]) Постепенное замедление пульсаров за счет обратного действия гравитационного излучения рассматривалось в работах [5, 6].