должен излучать гравитационные волны с интенсивностью $10^{55}e^2$ эрг/с. Для сравнения заметим, что полная энергия вращения пульсара составляла бы около 10^{53} эрг, и поэтому бо́льшая часть кинетической энергии пульсара излучалась бы в течение нескольких лет в виде гравитационных волн [1]) при том условии, что экваториальный эксцентриситет e был бы не менее 10^{-4}. В действительности это слишком большое значение для статического эксцентриситета, чтобы он мог сохраняться в огромном гравитационном поле нейтронной звезды, но это значение, вероятно, возникает за счет динамических эффектов. В частности, это может осуществляться в ранний период, до того как пульсар приобретает устойчивую равновесную конфигурацию. В конце концов пульсар замедлится настолько, что другие механизмы потерь, такие, как магнитное дипольное излучение (для которого $P \sim \Omega^4$), станут более важными, чем гравитационное излучение.

§ 6. Рассеяние и поглощение гравитационного излучения

Рассмотрим плоскую гравитационную волну с поляризацией $e_{\mu\nu}$ и волновым вектором k^μ, которая падает на мишень, находящуюся в начале координат. На большом расстоянии от мишени гравитационная волна будет в общем случае состоять из плоской волны и расходящейся волны (см., например, [7]):

$$h_{\mu\nu}(\mathbf{x}, t) \xrightarrow[r\to\infty]{} \left[e_{\mu\nu}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + f_{\mu\nu}(\hat{\mathbf{x}})\frac{e^{i\omega r}}{r}\right]e^{-i\omega t}, \qquad (10.6.1)$$

где $r \equiv |\mathbf{x}|$, $\hat{\mathbf{x}} \equiv \mathbf{x}/r$, $\omega \equiv |\mathbf{k}|$ и $f_{\mu\nu}$ — *амплитуда рассеяния*, которая может зависеть от $\hat{\mathbf{x}}$ и ω, но не от r или t.

Чтобы исследовать энергетический баланс между гравитационной волной и мишенью, необходимо разложить волну (10.6.1) на сходящуюся и расходящуюся волны. Плоскую волну в (10.6.1) можно разложить по полиномам Лежандра [8]:

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)P_l(\hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{x}})\,i^l j_l(\omega r).$$

Здесь j_l — сферические функции Бесселя порядка l (см. [8]). Поскольку существует асимптотическое соотношение (см. [8])

$$i^l j_l(\omega r) \to \frac{1}{2i\omega r}\left[e^{i\omega r} - (-1)^l e^{-i\omega r}\right],$$

[1]) Постепенное замедление пульсаров за счет обратного действия гравитационного излучения рассматривалось в работах [5, 6].

суммы по l можно рассматривать как разложения дельта-функций по полиномам Лежандра [1]):

$$\sum_l (2l+1) P_l(\mu) = 2\delta(1-\mu),$$

$$\sum_l (2l+1)(-1)^l P_l(\mu) = 2\delta(1+\mu).$$

Следовательно, на асимптотически больших расстояниях плоская волна представляется в виде расходящейся и сходящейся волн

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \xrightarrow[r\to\infty]{} \frac{e^{i\omega r}}{i\omega r}\delta(1-\hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{x}}) - \frac{e^{-i\omega r}}{i\omega r}\delta(1+\hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{x}}).$$

Тогда гравитационная волна (10.6.1) имеет следующее представление:

$$h_{\mu\nu} \xrightarrow[r\to\infty]{} [e_{\mu\nu}^{\text{расх}} e^{i\omega r} + e_{\mu\nu}^{\text{вход}} e^{-i\omega r}]\, e^{-i\omega t} + \text{к. с.} \tag{10.6.2}$$

где

$$e_{\mu\nu}^{\text{расх}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{i\omega r}[e_{\mu\nu}\delta(1-\hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{x}}) + i\omega f_{\mu\nu}(\hat{\mathbf{x}})], \tag{10.6.3}$$

$$e_{\mu\nu}^{\text{вход}}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{i\omega r} e_{\mu\nu}\delta(1+\hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{x}}). \tag{10.6.4}$$

Следуя тем же соображениям, что и в § 4 этой главы, можно вычислить полную мощность, *уносимую* расходящейся волной из сферы большого радиуса r, с помощью формулы

$$P_{\text{расх}} = \int d\Omega\, \langle t_{\text{расх}}^{0i}\rangle \hat{x}_i r^2, \tag{10.6.5}$$

где $\langle t_{\text{расх}}^{0i}\rangle$ — средний поток энергии, записанный в виде (10.3.5), но с заменой $e_{\mu\nu}$ на $e_{\mu\nu}^{\text{расх}}$. Усреднение проводится по пространственно-временным областям, размеры которых велики по сравнению с $1/\omega$ и малы по сравнению с r. Из выражения (10.6.3) следует, что $P_{\text{расх}}$ должно состоять из трех слагаемых:

$$P_{\text{расх}} = P_{\text{расс}} + P_{\text{интерф}} + P_{\text{пл. в}}, \tag{10.6.6}$$

которые возникают от собственно $f_{\mu\nu}$, интерференции между $f_{\mu\nu}$ и $e_{\mu\nu}$ и от самого $e_{\mu\nu}$ соответственно. Первый член, представляющий полную мощность, отклоненную от первоначального направления, можно вычислить, подставляя (10.3.5) в (10.6.5) и заменяя $e_{\mu\nu}$ на $f_{\mu\nu}/r$:

$$P_{\text{расс}} = \frac{\omega^2}{16\pi G}\int d\Omega \left[f^{\lambda\nu *}(\hat{\mathbf{x}}) f_{\lambda\nu}(\hat{\mathbf{x}}) - \frac{1}{2}|f^{\lambda}{}_{\lambda}(\hat{\mathbf{x}})|^2\right]. \tag{10.6.7}$$

---

[1]) Эти формулы можно проверить, умножая их на $P_l(\mu)$ и интегрируя по μ. Нужные для этого формулы интегрирования приведены, например, в § 14 книги Л. Шиффа [7].

Интерференционный член вычисляется аналогичным образом:

$$P_{\text{интерф}} = \frac{\omega^2}{8\pi G} \operatorname{Re} \left\{ -\frac{1}{i\omega} \int d\Omega \delta (1 - \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{x}}) \times \right.$$
$$\left. \times \left[e^{\lambda\nu *} f_{\lambda\nu} (\hat{\mathbf{x}}) - \frac{1}{2} e^{\lambda}{}_{\lambda}{}^{*} f^{\nu}{}_{\nu} (\hat{\mathbf{x}}) \right] \right\}.$$

Проинтегрировав по аргументу дельта-функции, получим $P_{\text{интерф}}$ в виде

$$P_{\text{интерф}} = -\frac{\omega}{4G} \operatorname{Im} \left\{ e^{\lambda\nu *} f_{\lambda\nu} (\hat{\mathbf{k}}) - \frac{1}{2} e^{\lambda}{}_{\lambda}{}^{*} f^{\nu}{}_{\nu} (\hat{\mathbf{k}}) \right\}. \qquad (10.6.8)$$

Последний член в (10.6.6), представляющий собой мощность, уносимую из сферы плоской волной, формально становится бесконечным при $r \to \infty$. Однако плоская волна уносит из любого объема столько же энергии, сколько и вносит в него, и поэтому энергия, приносимая в сферу радиусом r падающей волной (10.6.4), в точности равна третьему слагаемому в (10.6.6)

$$P_{\text{вход}} = P_{\text{пл. в}}. \qquad (10.6.9)$$

Таким образом, величина $P_{\text{пл. в}}$ исключается из уравнения сохранения энергии, и выражение для мощности, поглощенной мишенью, выглядит так:

$$P_{\text{погл}} = P_{\text{вход}} - P_{\text{расх}} = -P_{\text{расс}} - P_{\text{интерф}}. \qquad (10.6.10)$$

Поток энергии падающей волны записывается с помощью выражения (10.3.5), а именно

$$\Phi \equiv \langle t^{0i} \rangle \hat{\mathbf{k}}_i = \frac{\omega}{16\pi G} \left(e^{\lambda\nu *} e_{\lambda\nu} - \frac{1}{2} | e^{\nu}{}_{\nu} |^2 \right). \qquad (10.6.11)$$

Поэтому эффективное сечение упругого рассеяния гравитационной волны имеет вид

$$\sigma_{\text{расс}} \equiv \frac{P_{\text{расс}}}{\Phi} = \frac{\int d\Omega \left[f^{\lambda\nu *} (\hat{\mathbf{x}}) f_{\lambda\nu} (\hat{\mathbf{x}}) - \frac{1}{2} | f^{\lambda}{}_{\lambda} (\hat{\mathbf{x}}) |^2 \right]}{\left[e^{\lambda\nu *} e_{\lambda\nu} - \frac{1}{2} | e^{\nu}{}_{\nu} |^2 \right]}. \qquad (10.6.12)$$

Эту величину нужно отличать от *полного сечения рассеяния* или поглощения волны

$$\sigma_{\text{полн}} = \frac{P_{\text{расс}} + P_{\text{погл}}}{\Phi}. \qquad (10.6.13)$$

Согласно (10.6.10), полное сечение можно найти, вычисляя интерференцию между падающей и рассеянной волнами:

$$\sigma_{\text{полн}} = -\frac{P_{\text{интерф.}}}{\Phi}. \qquad (10.6.14)$$

С помощью (10.6.8) и (10.6.11) получаем

$$\sigma_{\text{полн}} = \frac{4\pi \operatorname{Im}\left\{ e^{\lambda\nu *} f_{\lambda\nu}(\hat{\mathbf{k}}) - \frac{1}{2} e^{\lambda}{}_{\lambda}{}^{*} f^{\nu}{}_{\nu}(\hat{\mathbf{k}}) \right\}}{\omega\left(e^{\lambda\nu *} e_{\lambda\nu} - \frac{1}{2} |e^{\lambda}{}_{\lambda}|^2 \right)}. \qquad (10.6.15)$$

Этот результат, утверждающий, что полное сечение рассеяния равно мнимой части амплитуды рассеяния *вперед*, умноженной на $4\pi/\omega$, был впервые получен в классической электродинамике [9, 10] и известен как *оптическая теорема*. Как здесь, так и в электродинамике этот результат есть следствие сохранения энергии, в то время как в квантовой механике аналогичная теорема следует из условия сохранения вероятности [11, 12].

Поскольку падающая волна слабая, то амплитуда рассеяния $f_{\lambda\nu}$ есть линейная комбинация из компонент первоначального поляризационного тензора $e_{\rho\sigma}$. Отсюда следует, что сечения (10.6.12) и (10.6.15) не зависят от *нормировки* $e_{\mu\nu}$, хотя они могут зависеть от $\mathbf{k}$ и от *вида* тензора поляризации. Цель теории гравитационного рассеяния — вычислить $f_{\lambda\nu}$; далее по формулам (10.6.12) и (10.6.15) можно уже определять всевозможные сечения.

§ 7. Детектирование гравитационного излучения

Эксперименты, целью которых было обнаружение гравитационного излучения, были проведены Вебером в шестидесятых годах [1, 26, 27], а в настоящее время такие эксперименты ставятся в лабораториях всего мира. В большинстве экспериментов используется *резонансная квадрупольная антенна*, роль которой может играть любая «малая» механическая или гидродинамическая система с естественной модой свободных колебаний. Оказывается так, что эффективное сечение такой антенны можно оценить, используя только оптическую теорему, выведенную нами в предыдущем параграфе, не вникая во взаимодействие между гравитационной волной и антенной.

Предположим прежде всего, что антенна много меньше длины волны $2\pi/\omega$ и потому рассеянная гравитационная волна есть чисто квадрупольное излучение. Исходя из тех же соображений, которые привели нас ранее к формулам (10.4.10), (10.4.12), (10.5.3) и (10.5.4), можно заключить, что амплитуда рассеяния в выражении (10.6.1) имеет вид

$$f_{\mu\nu}(\hat{\mathbf{x}}) = t_{\mu\nu}(\hat{\mathbf{x}}) - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} t^{\lambda}{}_{\lambda}(\hat{\mathbf{x}}), \qquad (10.7.1)$$

где $t_{\mu\nu}$ — тензор, пропорциональный фурье-образу вызываемого волной возмущения в $T_{\mu\nu}$. Сохранение энергии-импульса приводит, как и раньше, к соотношениям

$$t_{0i}(\hat{\mathbf{x}}) = -\hat{x}_j t_{jk}, \qquad t_{00}(\hat{\mathbf{x}}) = \hat{x}_i \hat{x}_j t_{ij}, \qquad (10.7.2)$$