ческих антенн до очень низких температур, порядка миллиградусов по Кельвину. Если работа антенны ограничена тепловым шумом, то понижение температуры в 10^{+5} раз увеличит точность в 10^5 раз. Группа московских ученых [27] пытается обнаружить гравитационное излучение с помощью улучшенного оборудования и проектирует новые типы гравитационных волновых антенн [28]. Вебер продолжает свои исследования, используя новые антенны и другое оборудование. Лучшее, что может делать сейчас теоретик,— это ждать, когда экспериментаторы достигнут какого-то согласия в вопросе о том, действительно ли гравитационное излучение наблюдалось.

§ 8. Квантовая теория гравитации *

В настоящее время не существует сколько-нибудь полной и самосогласованной квантовой теории гравитации, и, чтобы подробно описать попытки создания такой теории, пришлось бы выйти за рамки этой книги. Однако представляется возможным и, наверное, даже полезным дать читателю понятие о том, как такая квантовая теория могла бы выглядеть.

Для начала на простейшем уровне будем считать элементарно, что гравитационная плоская волна с волновым вектором k_μ и спиральностью ± 2 состоит из *гравитонов* — квантов с вектором энергии-импульса $p^\mu = \hbar k^\mu$ и проекциями спина на направление движения, равными $\pm 2\hbar$. (Здесь $\hbar = 1{,}054 \cdot 10^{-27}$ эрг/с.) Поскольку $k_\mu k^\mu = 0$, то, подобно фотону и нейтрино, гравитон — это частица с нулевой массой. Согласно выражению (2.8.4), тензор энергии-импульса ансамбля гравитонов, каждый из которых имеет 4-импульс $p^\mu_i = \hbar k^\mu$, равен

$$T_{\mu\nu} = \frac{\hbar k_\mu k_\nu}{\omega} \mathcal{N}, \tag{10.8.1}$$

где $\mathcal{N}$ — число гравитонов на единицу объема. Сравнивая (10.8.1) с выражением, найденным нами для плоской гравитационной волны,

$$\langle t_{\mu\nu} \rangle = \frac{k_\mu k_\nu}{16\pi G} \left(|e_+|^2 + |e_-|^2 \right), \tag{10.8.2}$$

можно сделать вывод, что в плоской волне плотность числа гравитонов со спиральностью ± 2 равна

$$\mathcal{N}_\pm = \frac{\omega}{16\pi\hbar G} |e_\pm|^2. \tag{10.8.3}$$

*) Этот и следующий параграфы лежат несколько в стороне от основной линии книги и могут быть опущены при первом чтении.

Плотность полного числа гравитонов имеет вид

$$\mathcal{N}' = \mathcal{N}_+ + \mathcal{N}_- = \frac{\omega}{16\pi\hbar G}\left(e^{\lambda\nu *}e_{\lambda\nu} - \frac{1}{2}\,|\,e^{\lambda}{}_{\lambda}\,|^2\right). \qquad (10.8.4)$$

Аналогичным образом, можно рассматривать в (10.4.13) мощность, теряемую произвольной системой в виде гравитационного излучения, как интенсивность излучения $d\Gamma$ гравитонов с энергией $\hbar\omega$ в телесный угол $d\Omega$:

$$d\Gamma = \frac{dP}{\hbar\omega} = \frac{G\omega\, d\Omega}{\hbar\pi}\left[T^{\lambda\nu *}(k, \omega)\, T_{\lambda\nu}(k, \omega) - \frac{1}{2}\,|\,T^{\lambda}{}_{\lambda}(k, \omega)\,|^2\right]. \qquad (10.8.5)$$

Однако здесь под тензором энергии-импульса $T^{\lambda\nu}(k, \omega)$ необходимо понимать уже матричный элемент оператора тензора энергии-импульса между начальным и конечным состояниями. В частности, ширина перехода атома из состояния a в состояние b путем гравитационного излучения в квадрупольном приближении записывается так:

$$\Gamma(a \to b) = \frac{2G\omega^5}{5\hbar}\left[D^*_{ij}(a \to b)\, D_{ij}(a \to b) - \frac{1}{3}\,|\,D_{ij}(a \to b)\,|^2\right], \qquad (10.8.6)$$

где

$$D_{ij}(a \to b) \equiv m_e \int \psi^*_b(\mathbf{x})\, x_i x_j \psi_a(\mathbf{x})\, d^3\mathbf{x}, \qquad (10.8.7)$$

а ψ_a, ψ_b — волновые функции начального и конечного состояний. Например, ширина перехода с излучением одного гравитона атомом водорода из состояния $3d$ ($m = 2$) в состояние $1s$ равна

$$\Gamma(3d \to 1s) = \frac{2^{23} G m_e{}^3 c}{3^7 5^{15} (137)^6 \hbar^2} = 2{,}5 \cdot 10^{-44}\ \text{с}^{-1}.$$

Совершенно ясно, что нет никакой возможности наблюдать такой переход.

Приведенные выше оценки относятся к процессам, в которых переходы возникают именно из-за излучения гравитона, а потому гравитон имеет определенную частоту $\omega = (E_a - E_b)/\hbar$. Можно рассмотреть также процесс, протекающий любым другим образом, например за счет столкновения частиц, и поставить вопрос: какова вероятность излучения гравитона в таком процессе? В этом случае частоты гравитонов образуют непрерывный спектр, поэтому используем формулу (10.4.22) для излучаемой энергии, разделив ее на $\hbar\omega$. Тогда вероятность излучения в телесный угол $d\Omega$ гравитона с частотой в $d\omega$ равна

$$dP = \frac{G\omega^2\, d\omega\, d\Omega P_c}{2\pi^2\hbar\omega} \sum_{N,\,M} \frac{\eta_N \eta_M}{(P_N \cdot k)\,(P_M \cdot k)} \times$$
$$\times \left[(P_N \cdot P_M)^2 - \frac{1}{2} m_N{}^2 m_M{}^2\right], \qquad (10.8.8)$$

где P_c — вероятность столкновения без излучения гравитона; суммирование по N и M, как и раньше, производится по всем частицам в начальном ($\eta = -1$) и конечном ($\eta = +1$) состояниях. Эту формулу можно вывести чисто квантовомеханическими методами [29].

Следует заметить, что вероятность излучения dP пропорциональна $d\omega/\omega$ [множитель $(P \cdot k)$ в знаменателе пропорционален ω], поэтому полная вероятность излучения гравитационных волн при столкновении расходится логарифмически как при $\omega \to \infty$, так и при $\omega \to 0$. С расходимостью при $\omega \to \infty$, т. е. с «ультрафиолетовой» расходимостью, мы столкнулись еще в классике. Этот вид расходимости возникает из-за предположения, что столкновения происходят мгновенно; эту расходимость можно исключить, обрезав интеграл по ω при значении $\omega \sim 1/\Delta t \sim \bar{E}/\hbar$, где Δt — длительность столкновения, а $\bar{E}$, согласно принципу неопределенности, есть некая типичная энергия столкновений. Второй вид расходимости — «инфракрасная» расходимость, возникающая при $\omega = 0$,— есть чисто квантовомеханический эффект, здесь он появился исключительно из-за того, что при вычислении вероятности излучения мы разделили значение излучаемой энергии dE на величину $\hbar\omega$. Эту расходимость можно устранить, учитывая то, что P_c — вероятность столкновений без излучения гравитонов — сама по себе расходится логарифмически из-за испускания и поглощения источником виртуальных гравитонов и что эти расходимости взаимно уничтожаются [30]. Таким образом, приняв простейшие представления о квантовой природе гравитационного излучения, мы неизбежно обнаруживаем связи реальных и виртуальных гравитонов.

Квантовая интерпретация гравитационного излучения приводит к простому выводу соотношений между вероятностями поглощения и излучения гравитонов. Представим себе, что имеется абсолютно черная полость с температурой T в теле, настолько большом и плотном, что оно непроницаемо для гравитационного излучения. Пусть полость будет заполнена электромагнитным и гравитационным излучением, находящимся в равновесии с содержащей их оболочкой. Используя те же статистические соображения, которые для электромагнитного излучения приводят к распределению Планка (см., например, [31]), получаем, что приходящееся на единицу объема число состояний гравитона с частотой, лежащей между ω и $\omega + d\omega$, равно

$$n(\omega)\, d\omega = \frac{\omega^2\, d\omega}{\pi^2}\left[\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) - 1\right]^{-1}, \qquad (10.8.9)$$

где $k = 1{,}38 \cdot 10^{-16}$ эрг/К — постоянная Больцмана. (При выводе этого выражения был учтен тот факт, что гравитон, подобно фотону, имеет два независимых состояния поляризации.) Для того

чтобы поддерживалось состояние равновесия, интенсивность поглощения $A(\omega)$ единичного гравитона стенками полости должна быть следующим образом связана с приходящейся на единичный объем интенсивностью излучения $E(\omega)\,d\omega$ гравитона с частотой между ω и $\omega + d\omega$:

$$A(\omega)\,n(\omega)\,d\omega = E(\omega)\,d\omega. \tag{10.8.10}$$

Это соотношение можно записать также в виде [34]

$$E(\omega) = I(\omega) + S(\omega), \tag{10.8.11}$$

где

$$S(\omega) = \left(\frac{\omega^2}{\pi^2}\right) \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{kT}\right) A(\omega), \tag{10.8.12}$$

$$I(\omega) = n(\omega) \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{kT}\right) A(\omega). \tag{10.8.13}$$

Величину $S(\omega)$ мы рассматриваем, как скорость *спонтанного* гравитационного излучения, приходящуюся на единичный объем и единичный интервал частот.

[(10.8.12) можно вывести также и из «кроссинг-симметрии» между излучением и поглощением; ω^2/π^2 — множитель, учитывающий «фазовое пространство», а $\exp(-\hbar\omega/kT)$ — множитель Больцмана, представляющий собой относительную вероятность того, что атом находится на верхнем уровне и способен излучить гравитон или находится на нижнем уровне и способен поглотить гравитон.] Оставшийся член $I(\omega)$, пропорциональный $n(\omega)$, можно рассматривать как приходящуюся на единицу объема и частот скорость *индуцированного* излучения гравитационных волн — эффект, связанный с бозе-статистикой газа, состоящего из гравитонов (см. [7], стр. 449).

Полезно заметить, что выражения (10.8.12) и (10.8.13) остаются справедливыми даже в том случае, когда гравитационное излучение не находится в равновесии с веществом и формула (10.8.9) для $n(\omega)$ не выполняется. Необходимо только, чтобы при температуре T вещество находилось в состоянии теплового равновесия. Например, разделив выражение (10.4.26) на $\hbar\omega$, можно вычислить приходящуюся на единицу объема и частоты интенсивность $S(\omega)$ спонтанного излучения гравитонов в нерелятивистском газе при условии, что частота гравитона ω лежит в интервале $\omega_c \ll \omega \ll kT/\hbar$. Выражение (10.8.12) приводит тогда к следующей формуле для скорости поглощения таких гравитонов:

$$A(\omega) = \frac{8\pi G}{5\hbar\omega^3} \sum_{a,b} \mu_{ab}^2 n_a n_b \left\langle v_{ab}^5 \int \frac{d\sigma_{ab}}{d\Omega} \sin^2\theta\, d\Omega \right\rangle$$

Поведение $A(\omega)$ как ω^{-3} может при высокой температуре эту величину сделать неожиданно большой для низкочастотных гравито-

нов в газе. Однако индуцированное излучение эффективно уменьшает интенсивность поглощения в $kT/\hbar\omega$ раз. В сегодняшней Вселенной, по-видимому, не возникает ситуации, когда поглощение гравитационного излучения играло бы важную роль.

То, что мы здесь изложили, можно назвать *полуклассической* теорией гравитации. Развитие действительно квантовой теории гравитации, к сожалению, намного сложнее. Один из подходов к такой задаче — это построение гамильтониана взаимодействия, который мог бы описывать рождение и уничтожение гравитонов, и затем вычисление вероятностей переходов в виде степенного ряда по этому взаимодействию. Обычно гамильтониан строится из квантованных *полей* вида

$$h_{\rho\nu}(x) = \sum_{\mu} \int d^3k \{a(\mathbf{k}, \mu)\, e_{\rho\nu}(\mathbf{k}, \mu) \times$$
$$\times \exp(ik_\lambda x^\lambda) + a^\dagger(\mathbf{k}, \mu)\, e^*_{\rho\nu}(\mathbf{k}, \mu) \exp(-ik_\lambda x^\lambda)\}, \qquad (10.8.14)$$

где $e_{\rho\nu}(\mathbf{k}, \mu)$ — тензор поляризации гравитона с импульсом $\hbar\mathbf{k}$ и спиральностью μ, а $a(\mathbf{k}, \mu)$ и $a^\dagger(\mathbf{k}, \mu)$ — *операторы рождения и уничтожения*, удовлетворяющие следующим коммутационным соотношениям:

$$[a(\mathbf{k}, \mu), a^\dagger(\mathbf{k}', \mu')] = \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}')\, \delta_{\mu\mu'}, \qquad (10.8.15)$$

$$[a(\mathbf{k}, \mu), a(\mathbf{k}', \mu')] = [a^\dagger(\mathbf{k}, \mu), a^\dagger(\mathbf{k}', \mu')] = 0. \qquad (10.8.16)$$

Трудности такого подхода возникают из-за того, что оператор (10.8.15) не может быть лоренцевым тензором, поскольку суммирование по спиральностям ограничено физическими значениями $\mu = \pm 2$; как мы видели в § 2 этой главы, истинный тензор имел бы спиральности 0, ± 1, ± 2. Мы можем, правда, исходить из истинного тензора, а затем подвергнуть $e_{\mu\nu}$ градиентному преобразованию, чтобы исключить нефизические значения спиральности 0 и ± 1. Однако если мы выбираем калибровку таким образом, то $h_{\mu\nu}$ не будет уже тензором. Если, действуя по-другому, считать, что e_{13}, e_{23}, e_{10}, e_{20}, e_{00}, e_{03} и e_{33} исчезают, когда $\mathbf{k}$ направлено по 3-оси, то калибровочное условие не является лоренц-инвариантным. Действительно, если сделать эти компоненты равными нулю, то при лоренц-преобразовании Λ^μ_ν величина $h_{\mu\nu}$ не перейдет просто в $\Lambda_\mu{}^\rho\, \Lambda_\nu{}^\sigma h_{\rho\sigma}$, а подвергнется дополнительному градиентному преобразованию [33]:

$$h_{\mu\nu} \to \Lambda_\mu{}^\rho \Lambda_\nu{}^\sigma h_{\rho\sigma} + \frac{\partial \varepsilon_\mu}{\partial x^\nu} + \frac{\partial \varepsilon_\nu}{\partial x^\mu}.$$

Итак, построение гамильтониана из данных объектов и получение таким образом лоренц-инвариантных вероятностей переходов является нелегкой задачей.

Существуют два возможных пути ее решения. Один из них — это допустить нетензорный характер $h_{\mu\nu}$ и использовать для вывода лоренц-инвариантных правил вычисления амплитуд переходов нековариантный гамильтонов формализм [34—36]. Эта программа достаточно легко реализуется в электродинамике, однако в общей теории относительности ее пока что не удается завершить из-за самодействия гравитационного поля. В другом подходе, предложенном впервые Фейнманом [37], исходят из явно лоренц-инвариантного формализма, а затем каким-нибудь способом пытаются исключить появление среди физических состояний нефизических частиц со спиральностями 0 и ± 1. Эта программа успешно завершена в работах Фадеева и Попова [38], Мандельстама [39] и Де Витта [40].

К сожалению, в квантовой теории гравитации формулировка общих правил вычисления вероятностей переходов вскрыла лишь наличие другой трудности. Оказалось, что теория содержит бесконечности, возникающие при интегрировании по большим виртуальным импульсам. В квантовой электродинамике возникают аналогичные бесконечности, но только в трех или четырех специальных случаях, где они связаны с перенормировкой массы заряда и волновых функций [41]. В отличие от этого квантовая теория гравитации содержит неограниченное множество бесконечностей, в чем можно убедиться, исходя из элементарных соображений размерности. Действительно, гравитационная константа имеет размерность $\hbar/m^2$, а потому безразмерная амплитуда вероятности порядка G^n будет расходиться как интеграл $\int p^{2n-1}\,dp$ по импульсному пространству. В связи с этим теория гравитации более похожа на неперенормируемые теории, например на фермиевскую теорию бета-распада, чем на квантовую электродинамику.

Несмотря на эти трудности, из квантовой теории гравитации можно сделать один очень важный вывод: невозможно построить лоренц-инвариантную квантовую теорию частиц с нулевой массой и спиральностью ± 2 без введения в теорию калибровочной инвариантности некоторого вида [29, 30], ибо только в этом случае взаимодействие нетензорного поля $h_{\mu\nu}$ может приводить к лоренц-инвариантным амплитудам переходов. Однако в § 2 мы видели, что теория гравитационного излучения калибровочно-инвариантна, так как общая теория относительности общековариантна, а, как следует из обсуждения, приведенного в § 1 гл. 4, общая ковариантность есть лишь математическое выражение принципа эквивалентности. Таким образом, оказывается, что принцип эквивалентности, на котором основана вся классическая общая теория относительности, есть сам по себе следствие требования, чтобы квантовая теория гравитации была лоренц-инвариантна.