§ 9. Гравитационные возмущения в гравитационных полях

В предыдущих параграфах была описана лоренц-инвариантная теория слабых гравитационных волн в пространстве-времени Минковского. В дальнейшем, в гл. 15, посвященной космологии, нам понадобится общая ковариантная теория распространения слабых гравитационных возмущений в гравитационном поле $g_{\mu\nu}$.

Согласно уравнению (6.1.5), если при некотором возмущении величина $g_{\mu\nu}$ изменяется на $g_{\mu\nu}+\delta g_{\mu\nu}$ при малом $\delta g_{\mu\nu}$, то в первом порядке по $\delta g_{\mu\nu}$ имеем

$$\delta R_{\mu\varkappa}=\frac{\partial\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda}}{\partial x^{\varkappa}}-\frac{\partial\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\varkappa}}{\partial x^{\lambda}}+\delta\Gamma^{\eta}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\varkappa\eta}+\delta\Gamma^{\lambda}_{\varkappa\nu}\Gamma^{\eta}_{\mu\lambda}-\delta\Gamma^{\eta}_{\mu\varkappa}\Gamma^{\lambda}_{\lambda\eta}-\delta\Gamma^{\lambda}_{\lambda\eta}\Gamma^{\eta}_{\mu\varkappa},$$

где $\delta\Gamma^{\lambda}_{\varkappa\eta}$ есть изменение аффинной связности:

$$\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}=-g^{\lambda\rho}\delta g_{\rho\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}+\frac{1}{2}g^{\lambda\rho}\left[\frac{\partial\delta g_{\rho\mu}}{\partial x^{\nu}}+\frac{\partial\delta g_{\rho\nu}}{\partial x^{\mu}}-\frac{\partial\delta g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}}\right].$$

Отметим, что $\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ можно выразить в виде тензора

$$\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}=\frac{1}{2}g^{\lambda\rho}\left[(\delta g_{\rho\mu})_{;\nu}+(\delta g_{\rho\nu})_{;\mu}-(\delta g_{\mu\nu})_{;\rho}\right]. \qquad (10.9.1)$$

Ковариантные производные здесь, естественно, построены с помощью невозмущенной аффинной связности $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$. Так как $\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ есть тензор, то изменение тензора Риччи можно также записать через ковариантные производные следующим образом:

$$\delta R_{\mu\varkappa}=(\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda})_{;\varkappa}-(\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\varkappa})_{;\lambda}. \qquad (10.9.2)$$

Это соотношение известно как *тождество Палатини*. Выраженное через $\delta g_{\mu\nu}$, оно имеет вид

$$\delta R_{\mu\varkappa}=\frac{1}{2}g^{\lambda\rho}\left[(\delta g_{\lambda\rho})_{;\mu;\varkappa}-(\delta g_{\rho\mu})_{;\varkappa;\lambda}-(\delta g_{\rho\varkappa})_{;\mu;\lambda}+(\delta g_{\mu\varkappa})_{;\rho;\lambda}\right]. \qquad (10.9.3)$$

Предполагается, что невозмущенное гравитационное поле $g_{\mu\nu}$ и тензор энергии-импульса $T_{\mu\nu}$ удовлетворяют уравнениям поля Эйнштейна. Условием того, что этим же уравнениям удовлетворяют и $g_{\mu\nu}+\delta g_{\mu\nu}$ и $T_{\mu\nu}+\delta T_{\mu\nu}$, является

$$\frac{1}{2}g^{\lambda\rho}\left[(\delta g_{\lambda\rho})_{;\mu;\varkappa}-(\delta g_{\rho\mu})_{;\varkappa;\lambda}-(\delta g_{\rho\varkappa})_{;\mu;\lambda}+(\delta g_{\mu\varkappa})_{;\rho;\lambda}\right]=$$
$$=-8\pi G\left[\delta T_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\rho\sigma}\delta T_{\rho\sigma}+\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\delta g_{\lambda\eta}T^{\lambda\eta}-\frac{1}{2}\delta g_{\mu\nu}T^{\lambda}{}_{\lambda}\right]. \qquad (10.9.4)$$

Изменение источника поля $\delta T_{\mu\nu}$ подчиняется следующему закону сохранения:

$$(\delta T^{\nu\mu})_{;\mu}+T^{\nu\lambda}\delta\Gamma^{\mu}_{\mu\lambda}+T^{\lambda\mu}\delta\Gamma^{\nu}_{\mu\lambda}=0. \qquad (10.9.5)$$

Общая ковариантность этих уравнений очевидна.

Так же как и для гравитационных полей, заданных в пространстве-времени Минковского, здесь важно отличать физическое возмущение от простого изменения системы координат. С этой целью рассмотрим произвольное бесконечно малое преобразование координат

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu - \varepsilon^\mu(x), \tag{10.9.6}$$

где $\varepsilon^\mu(x)$ — некое инфинитезимальное векторное поле. Частные производные, возникающие в правилах преобразования тензора, имеют здесь вид

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} = \delta^\mu_\nu - \frac{\partial \varepsilon^\mu(x)}{\partial x^\nu},$$

$$\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} = \delta^\nu_\mu + \frac{\partial \varepsilon^\nu(x)}{\partial x^\mu} + 0(\varepsilon^2).$$

Поскольку уравнения Эйнштейна общековариантны, а $g_{\mu\nu}(x)$ является решением уравнения для тензора энергии-импульса $T_{\mu\nu}(x)$, то решением уравнения для $T'_{\mu\nu}(x)$ служит $g'_{\mu\nu}(x)$, определяемое следующим образом:

$$g'_{\mu\nu}(x) = g'_{\mu\nu}(x') + \frac{\partial g_{\mu\nu}(x)}{\partial x^\lambda}\varepsilon^\lambda(x) + 0(\varepsilon^2) =$$

$$= g_{\mu\nu}(x) + g_{\lambda\nu}(x)\frac{\partial \varepsilon^\lambda(x)}{\partial x^\mu} + g_{\lambda\mu}(x)\frac{\partial \varepsilon^\lambda(x)}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\mu\nu}(x)}{\partial x^\lambda}\varepsilon^\lambda(x)$$

и аналогичным образом определяется $T'_{\mu\nu}(x)$. Записывая это выражение в ковариантной форме, мы можем сделать вывод, что тензор

$$g'_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu}(x) + \Delta_\varepsilon g_{\mu\nu}(x) \tag{10.9.7}$$

является решением уравнений Эйнштейна для тензора энергии-импульса, имеющего вид

$$T'_{\mu\nu}(x) = T_{\mu\nu}(x) + \Delta_\varepsilon T_{\mu\nu}(x), \tag{10.9.8}$$

где

$$\Delta_\varepsilon g_{\mu\nu} \equiv \varepsilon_{\mu;\nu} + \varepsilon_{\nu;\mu}, \tag{10.9.9}$$

$$\Delta_\varepsilon T_{\mu\nu} \equiv T^\lambda{}_\mu \varepsilon_{\lambda;\nu} + T^\lambda{}_\nu \varepsilon_{\lambda;\mu} + T_{\mu\nu;\lambda}\varepsilon^\lambda. \tag{10.9.10}$$

(Заметим, что $\Delta_\varepsilon g_{\mu\nu}$ имеет ту же форму, что и $\Delta_\varepsilon T_{\mu\nu}$, за исключением того, что ковариантные производные от $g_{\mu\nu}$ равны нулю, в то время как у $T_{\mu\nu}$ они существуют.) Отсюда с помощью прямого вычисления можно показать, что $\delta g_{\mu\nu} = \Delta_\varepsilon g_{\mu\nu}$ есть решение уравнения поля (10.9.4) для возмущения источника $\delta T_{\mu\nu} = \Delta_\varepsilon T_{\mu\nu}$. Но так как уравнение (10.9.4) является *линейным* дифференциальным уравнением, то, задавая любое решение $\delta g_{\mu\nu}$, можно всегда найти другие решения вида $\delta g_{\mu\nu} + \Delta_\varepsilon g_{\mu\nu}$ с тем же

самым физическим содержанием. Свобода прибавлять к произвольным функциям $\varepsilon^\mu(x)$ члены $\Delta_\varepsilon g_{\mu\nu}$ соответствует «калибровочной инвариантности», обсужденной в § 1 этой главы.

Оператор Δ_ε, введенный в уравнениях (10.9.9) и (10.9.10), можно обобщить на произвольные тензоры, считая, что члены, содержащие свертку тензора с ковариантной производной ε, входят со знаком «+» для каждого ковариантного индекса, и со знаком «—» для каждого контравариантного индекса, т. е. для скаляров, векторов, а также для контравариантных и смешанных тензоров второго ранга эту операцию можно определить так:

$$\Delta_\varepsilon S \equiv S_{;\lambda}\varepsilon^\lambda,$$

$$\Delta_\varepsilon V_\mu = V^\lambda \varepsilon_{\lambda;\mu} + V_{\mu;\lambda}\varepsilon^\lambda,$$

$$\Delta_\varepsilon U^\mu \equiv -U^\lambda \varepsilon^\mu{}_{;\lambda} + U^\mu{}_{;\lambda}\varepsilon^\lambda,$$

$$\Delta_\varepsilon T^{\mu\nu} \equiv -T^{\lambda\nu}\varepsilon^\mu{}_{;\lambda} - T^{\mu\lambda}\varepsilon^\nu{}_{;\lambda} + T^{\mu\nu}{}_{;\lambda}\varepsilon^\lambda,$$

$$\Delta_\varepsilon T^\mu{}_\nu \equiv -T^\lambda{}_\nu \varepsilon^\mu{}_{;\lambda} + T^\mu{}_\lambda \varepsilon^\lambda{}_{;\nu} + T^\mu{}_{\nu;\lambda}\varepsilon^\lambda$$

и т. д. Оператор Δ_ε, определенный таким путем, известен как *производная Ли*. В общем случае бесконечно малое координатное преобразование любого тензора T приводит к новому тензору, равному прежнему тензору *в той же самой координатной точке* плюс производная Ли $\Delta_\varepsilon T$. Легко показать, что оператор Δ_ε имеет те же самые общие свойства, как и обычные или ковариантные производные, а именно он линеен:

$$\Delta_\varepsilon [aA^\mu{}_\nu + bB^\mu{}_\nu] = a\Delta_\varepsilon A^\mu{}_\nu + b\Delta_\varepsilon B^\mu{}_\nu, \quad a,\ b \text{ — постоянные скаляры,}$$

подчиняется правилу Лейбница

$$\Delta_\varepsilon (A^\mu{}_\nu B^\lambda) = B^\lambda \Delta_\varepsilon A^\mu{}_\nu + A^\mu{}_\nu \Delta_\varepsilon B^\lambda$$

и коммутирует с оператором свертки

$$\delta^\lambda_\nu \Delta_\varepsilon T^{\mu\nu}{}_\lambda = \Delta_\varepsilon T^{\mu\lambda}{}_\lambda \equiv -T^{\nu\lambda}{}_\lambda \varepsilon^\mu{}_{;\nu} + T^{\mu\lambda}{}_{\lambda;\nu}\varepsilon^\nu.$$

В частности, производная Ли тензора энергии-импульса идеальной несжимаемой жидкости равна

$$\Delta_\varepsilon T_{\mu\nu} = p\Delta_\varepsilon g_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\Delta_\varepsilon p + (p+\rho)\,[U_\mu \Delta_\varepsilon U_\nu + U_\nu \Delta_\varepsilon U_\mu] + \\ + U_\mu U_\nu\,[\Delta_\varepsilon p + \Delta_\varepsilon \rho].$$

Поэтому $\Delta_\varepsilon g_{\mu\nu}$ есть решение уравнений Эйнштейна для жидкости, скорость, давление и плотность которой возмущаются величинами $\Delta_\varepsilon U_\mu$, $\Delta_\varepsilon p$ и $\Delta_\varepsilon \rho$ соответственно.

Решение уравнений поля (10.9.4), вообще говоря, очень сложно, за исключением простого случая однородной и изотропной невозмущенной метрики $g_{\mu\nu}$. Этот случай будет рассмотрен в § 10 гл. 15.