Все разрушается,
Нет места для покоя,
И лишь анархия заполнила миры.

В. Ейтс, Второе пришествие

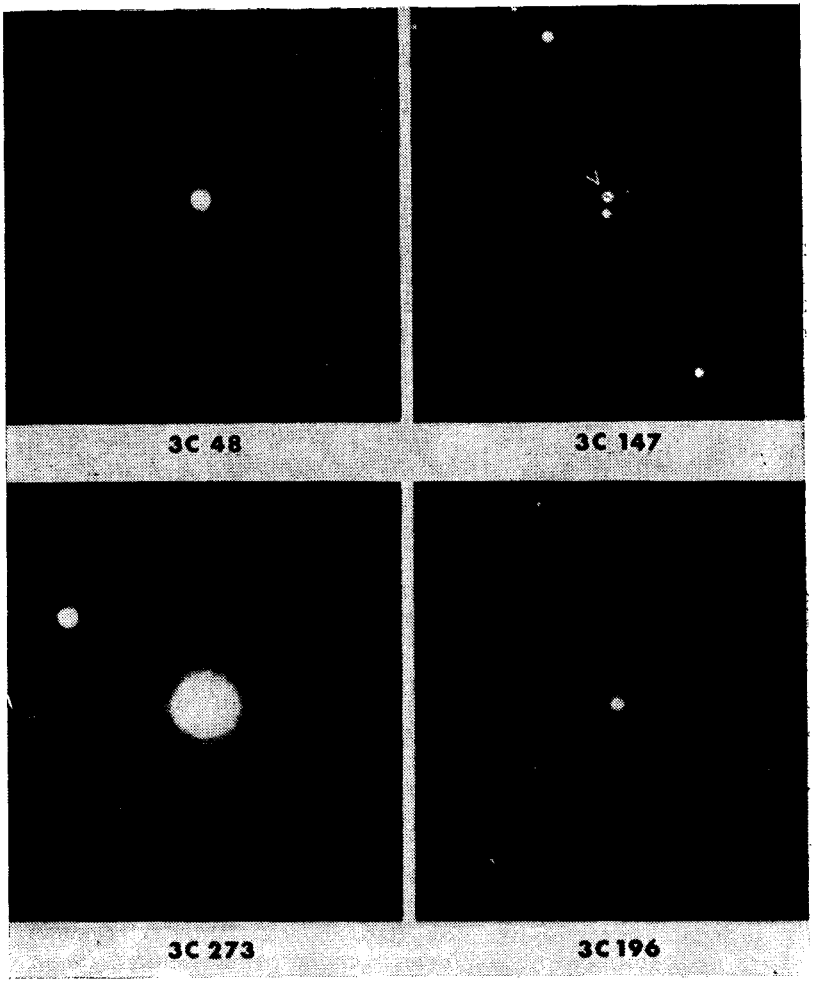
Глава 11

РАВНОВЕСИЕ В ЗВЕЗДАХ И КОЛЛАПС

Гравитационные поля настолько слабы, что обычно в своей деятельности астрофизик пренебрегает эффектами общей теории относительности. В этой главе мы рассмотрим различные объекты, для которых релятивистские эффекты играют важную, а в некоторых случаях даже доминирующую роль. Одним из таких объектов является нейтронная звезда —«холодная» звезда, состоящая в основном из нейтронов и удерживающаяся от коллапса за счет давления вырожденного нейтронного газа. В качестве другого примера можно назвать сверхтяжелую звезду, т. е. существующее за счет радиационного давления гигантское тело, в котором гравитационные эффекты могут обеспечивать баланс между устойчивостью и неустойчивостью. Самым впечатляющим из всех объектов является черная дыра — тело, ввергнутое в безысходный гравитационный коллапс.

Существование нейтронных звезд и черных дыр было предсказано на чисто теоретической основе в 1930 г. главным образом в работах Дж. Роберта Оппенгеймера и его сотрудников. Однако эти экзотические объекты приводились лишь в виде курьезов в учебниках, пока начиная с 1960 г. в результате наблюдений в радиочастотном и оптическом диапазонах не стало известно большое число новых странных объектов.

Первыми были обнаружены квазизвездные объекты (КЗО, или квазар), похожие на звезды по своим оптическим изображениям, содержащие часто мощные компактные радиоисточники и дающие красное смещение $\Delta\lambda/\lambda$ в пределах от 0,131 до 3 и больше (фиг. 11.1). Можно выдвинуть три разных объяснения этого красного смещения, а именно: оно может возникать из-за эффекта Доплера, вызванного либо локальным взрывом, либо общим космологическим удалением очень отдаленных объектов (см. гл. 14), или же оно может появляться из-за мощных гравитационных полей внутри самих объектов. В любом случае, вероятно, гравитационные эффекты будут играть важную роль в объяснении существования квазаров. Если эти объекты расположены относительно близко, но движутся с релятивистскими скоростями, то должен быть найден некоторый источник энергии, который мог бы с эффективностью, близкой к 100%, превращать массу в кинети-



Фиг. 11.1. Четыре квазара.

Фотографии были получены на 200-дюймовом телескопе, расположенном на горе Паломар. Положения квазаров определены радиоастрономическими методами.

ческую энергию. Если квазары находятся на космологических расстояниях, то их видимая оптическая светимость указывает на то, что их абсолютная светимость намного выше, чем у самых больших галактик, а для этого опять-таки им необходимо иметь новый мощный источник энергии. Только гравитационное тяготение, по-видимому, способно создавать источники таких энергий, и в связи с этим открытие квазаров пробудило вновь интерес

к явлению гравитационного коллапса. И наконец, если красное смещение у квазаров вызвано гравитацией, то эти объекты должны быть настолько сильно сжаты, что их структура может быть описана только с помощью общей теории относительности, а не ньютоновской механики.

Квазары являются только наиболее эффектными образцами в ряду плохо изученных объектов, обнаруженных в недавние годы, таких, как галактики Сейферта, гигантские эллиптические галактики с мощными компактными радиоисточниками, источники рентгеновского излучения, ядра галактик, которые иногда видны в состоянии взрыва, и т. д. Совершенно не ясно, сможет ли общая теория относительности хоть как-нибудь справиться с этими объектами.

В последние несколько лет были обнаружены еще одни представители астрономической кунсткамеры. Это пульсары — радиоисточники, пульсирующие с частотой от нескольких десятых герца до 30 Гц. Пульсары часто связаны с оптическими и даже с рентгеновскими источниками, пульсирующими с той же частотой. В настоящее время складывается общее мнение, что пульсары — это нейтронные звезды, теоретически открытые еще в 1930 г., но обладающие огромной скоростью вращения, в результате чего тем или иным образом возникают наблюдаемые пульсации.

Профессиональное обсуждение квазаров, ядер галактик, пульсаров и других подобных объектов потребовало бы от нас рассмотрения эффектов переноса энергии излучения фотонов и нейтрино, турбулентности, ядерных сил, магнитных полей, и прежде всего эффекта вращения. Кроме того, подобный подход потребовал бы обсуждения результатов огромной вычислительной работы с применением вычислительной техники. Работая над данной главой, я старался ограничиться простейшими вычислениями, которые можно провести аналитически без особых затруднений. Эти простые вычисления не очень помогают в понимании детальной картины астрономических наблюдений, однако позволяют оценить ту роль, которую общая теория относительности может играть в изучении астрофизических явлений.

§ 1. Дифференциальные уравнения для звездных структур

Рассмотрим прежде всего общерелятивистский механизм вычисления давления, плотности и гравитационных полей внутри сферически симметричных статических звезд.

Метрика должна быть выбрана в «стандартной» форме (§ 1 гл. 8):

$$g_{rr} = A(r), \qquad g_{\theta\theta} = r^2, \qquad g_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2\theta,$$
$$g_{tt} = -B(r), \qquad g_{\mu\nu} = 0 \text{ для } \mu \neq \nu. \tag{11.1.1}$$

Предположим, что тензор энергии-импульса здесь тот же, что и у идеальной жидкости (§ 4 гл. 5):

$$T_{\mu\nu} = pg_{\mu\nu} + (p + \rho)\, U_\mu U_\nu, \tag{11.1.2}$$

где p — собственное давление, ρ — плотность собственной полной энергии, а U_μ — 4-вектор скорости, определенный так, что

$$g^{\mu\nu} U_\mu U_\nu = -1. \tag{11.1.3}$$

Поскольку жидкость находится в покое, имеем

$$U_r = U_\theta = U_\varphi = 0, \quad U_t = -(-g^{tt})^{-1/2} = -\sqrt{B(r)}. \tag{11.1.4}$$

Наше предположение о временно́й независимости и сферической симметрии приводит к тому, что p и ρ являются функциями только радиальной координаты r.

Используя соотношения (11.1.1) — (11.1.4) и компоненты тензора Риччи, заданные выражением (8.1.13), находим, что уравнения Эйнштейна (7.1.15) имеют вид

$$R_{rr} = \frac{B''}{2B} - \frac{B'}{4B}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) - \frac{A'}{rA} = -4\pi G(\rho - p)\, A, \tag{11.1.5}$$

$$R_{\theta\theta} = -1 + \frac{r}{2A}\left(-\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) + \frac{1}{A} = -4\pi G(\rho - p)\, r^2, \tag{11.1.6}$$

$$R_{tt} = -\frac{B''}{2A} + \frac{B'}{4A}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) - \frac{B'}{rA} = -4\pi G(\rho + 3p)\, B. \tag{11.1.7}$$

Штрих означает d/dr. (Мы не станем ниже выписывать уравнение для $R_{\varphi\varphi}$, поскольку оно идентично уравнению для $R_{\theta\theta}$ или уравнениям для недиагональных элементов $R_{\mu\nu}$, утверждающим просто, что нуль равен нулю.) Напомним, кроме того, уравнения гидростатического равновесия (5.4.5)

$$\frac{B'}{B} = -\frac{2p'}{p + \rho}. \tag{11.1.8}$$

Первым шагом в решении этих уравнений будет построение уравнения только для $A(r)$. Для этого запишем прежде всего

$$\frac{R_{rr}}{2A} + \frac{R_{\theta\theta}}{r^2} + \frac{R_{tt}}{2B} = -\frac{A'}{rA^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{1}{Ar^2} = -8\pi G\rho \tag{11.1.9}$$

и перепишем это уравнение следующим образом:

$$\left(\frac{r}{A}\right)' = 1 - 8\pi G\rho r^2. \tag{11.1.10}$$

Решение этого уравнения при $A(0)$ конечном имеет вид

$$A(r) = \left[1 - \frac{2G\mathcal{M}(r)}{r}\right]^{-1}, \tag{11.1.11}$$

где

$$\mathscr{M}(r) \equiv \int_0^r 4\pi r'^2 \rho(r')\, dr' \qquad (11.1.12)$$

Используем выражения (11.1.11) и (11.1.8), чтобы исключить из уравнения (11.1.6) гравитационные поля $A(r)$, $B(r)$:

$$-1+\left[1-\frac{2G\mathscr{M}}{r}\right]\left[1-\frac{rp'}{p+\rho}\right]+\frac{G\mathscr{M}}{r}-4\pi G\rho r^2=-4\pi G(\rho-p)\,r^2.$$

Перепишем последнее уравнение следующим образом:

$$-r^2p'(r)=G\mathscr{M}(r)\,\rho(r)\left[1+\frac{p(r)}{\rho(r)}\right]\left[1+\frac{4\pi r^3 p(r)}{\mathscr{M}(r)}\right]\times$$
$$\times\left[1-\frac{2G\mathscr{M}(r)}{r}\right]^{-1}. \qquad (11.1.13)$$

Это — основное уравнение ньютоновской астрофизики (см. § 3 гл. 11), в которое введены общерелятивистские поправки в виде трех последних множителей.

Эту главу мы посвятим прежде всего изоэнтропическим звездам, т. е. таким звездам, в которых величина энтропии s, приходящаяся на один нуклон, не меняется по всей звезде. Это бывает в случае двух совершенно разных типов звезд.

А. Звезды при абсолютном нуле. Когда звезда полностью исчерпала свое термоядерное топливо, она может стать белым карликом (§ 3 гл. 11) или нейтронной звездой (§ 4 гл. 11), в которых температура практически равна абсолютному нулю. Тогда, согласно теореме Нернста, энтропия, приходящаяся на один нуклон, будет равна нулю во всей звезде.

Б. Звезды в состоянии конвективного равновесия. Если наиболее действенным механизмом передачи энергии внутри звезды является конвекция, то в равновесии энтропия, приходящаяся на один нуклон, должна быть почти постоянной во всей звезде, ибо в противном случае малый элемент среды, содержащий A нуклонов, будет приобретать или терять энергию $A\Delta s/T$ при переходе от одной части звезды к другой, и конвекция будет нарушать распределение энергии. Сверхтяжелые звезды, обсуждаемые в § 5 гл. 11, обычно считаются находящимися в конвективном равновесии.

Будем считать также, что звезды, которые мы рассматриваем, имеют постоянный химический состав повсюду внутри звезды.

Важность принятых предположений состоит в том, что в общем случае давление p можно выразить как функцию плотности ρ,

энтропии на один нуклон s и химического состава. Следовательно, если s и химический состав постоянны повсюду в звезде, то $p(r)$ можно считать функцией только от $\rho(r)$ без *явной* зависимости от r.

Задавая $p(r)$ как функцию $p(\rho(r))$, рассмотрим два дифференциальных уравнения первого порядка для $p(r)$ и $\mathscr{M}(r)$. Одно из них — это уравнение (11.1.13), а другое получается дифференцированием уравнения (11.1.12):

$$\mathscr{M}'(r) = 4\pi r^2 \rho(r). \tag{11.1.14}$$

Кроме того, из (11.1.12) следует начальное условие

$$\mathscr{M}(0) = 0. \tag{11.1.15}$$

Уравнения (11.1.13) — (11.1.15) вместе с уравнением состояния, задающим $p(\rho)$, смогут служить для определения $\rho(r)$, $\mathscr{M}(r)$, $p(r)$ и т. д. повсюду в звезде, как только будет задано *второе* начальное условие, т. е. величина $\rho(0)$. Дифференциальные уравнения (11.1.13) и (11.1.14) необходимо проинтегрировать от центра звезды до некоторого радиуса $r = R$ внутри звезды, в которой $p(\rho(r))$ становится равным нулю. Расстояние от центра звезды до R мы будем рассматривать как радиус звезды с центральной плотностью $\rho(0)$.

Вернемся к вычислению метрики. Определив $\rho(r)$, $\mathscr{M}(r)$ и и $p(r)$, можно с помощью (11.1.11) немедленно получить $A(r)$; чтобы найти $B(r)$, используем уравнение (11.1.13), позволяющее переписать (11.1.8) в виде

$$\frac{B'}{B} = \frac{2G}{r^2}\left[\mathscr{M} + 4\pi r^3 p\right]\left[1 - \frac{2G\mathscr{M}}{r}\right]^{-1}.$$

Решение этого уравнения при условии, что $B(\infty) = 1$, имеет вид

$$B(r) = \exp\left\{-\int_r^\infty \frac{2G}{r^2}\left[\mathscr{M}(r') + 4\pi r'^3 p(r')\right]\left[1 - \frac{2G\mathscr{M}(r')}{r'}\right]^{-1} dr'\right\} \tag{11.1.16}$$

Таким образом, решение найдено. [Кстати, у нас нет необходимости использовать отдельно уравнения (11.1.5) и (11.1.7) для R_{rr} и R_{tt}, поскольку эти уравнения следуют из уравнений (11.1.6), (11.1.8) и (11.1.9), которые *уже применялись* в наших вычислениях. Это не является неожиданным, поскольку уравнение (11.1.8) как раз и является уравнением сохранения импульса, которое выводится *с помощью* тождеств Бианки из уравнений Эйнштейна (11.1.5) — (11.1.7).]

Вне звезды $p(r)$ и $\rho(r)$ обращаются в нуль, а $\mathscr{M}(r)$ становится постоянным, $\mathscr{M}(R)$; поэтому из соотношений (11.1.11) и (11.1.16) следует

$$B(r) = A^{-1}(r) = 1 - \frac{2G\mathscr{M}(R)}{r} \quad \text{для } r \geqslant R. \tag{11.1.17}$$

Из обсуждения, проведенного в § 2 гл. 8, следует, что постоянная $\mathscr{M}(R)$, появляющаяся в асимптотическом гравитационном поле (11.1.17), должна быть равна массе звезды M, определяемой как полная энергия звезды и ее гравитационного поля, т. е.

$$M = \mathscr{M}(R) \equiv \int_0^R 4\pi r^2 \rho(r)\, dr. \qquad (11.1.18)$$

Таким образом, (11.1.17) является просто внешним решением Шварцшильда.

Может показаться парадоксальным, что M, которое должно содержать энергию гравитационного поля, задается выражением (11.1.18) в виде интеграла от плотности энергии только вещества (включая излучение). Выход состоит в том, что (11.1.18) *не* утверждает, что M есть полная энергия вещества. Полная энергия вещества отнюдь не является вполне определенной величиной, но ее все же можно вычислить, разбивая звезду на имеющие малый объем элементы, энергия которых измеряется в локально-инерциальной системе отсчета; это дает энергию вещества в виде

$$M_{\text{вещества}} \equiv \int \sqrt{g}\, \rho\, dr\, d\theta\, d\phi = \int_0^R 4\pi r^2 \sqrt{A(r)\, B(r)}\, \rho(r)\, dr. \qquad (11.1.19)$$

Разность между (11.1.18) и (11.1.19) можно считать энергией гравитационного поля. Однако такое разбиение не является особенно полезным и не будет использоваться ниже.

Гораздо большую информацию можно извлечь, сравнивая выражение (11.1.18) с энергией M_0, которую вещество звезды имело бы, будучи «измельченным до бесконечности». Эта величина есть просто

$$M_0 = m_{\text{н}} N, \qquad (11.1.20)$$

где $m_{\text{н}} = 1{,}66 \cdot 10^{-24}$ г — масса покоя нуклона, а N — число нуклонов в звезде. Число нуклонов определяется как

$$N = \int \sqrt{g} J_{\text{н}}^0\, dr\, d\theta\, d\psi = \int_0^R 4\pi r^2 \sqrt{A(r)\, B(r)}\, J_{\text{н}}^0(r)\, dr, \qquad (11.1.21)$$

где $J_{\text{н}}^{\mu}$ — сохраняющийся ток числа нуклонов. Удобно выразить $J_{\text{н}}^0$ через *собственную* плотность числа нуклонов n, т. е. плотность числа нуклонов, измеренную в локально-инерциальной системе, связанной со звездой. Величина n определяется так:

$$n = -U_{\mu} J_{\text{н}}^{\mu} = \sqrt{B}\, J_{\text{н}}^0. \qquad (11.1.22)$$

[См. соотношения (11.1.4). Напомним, что в локально-инерциальной системе координат $U_0 = -1$.] Тогда выражение (11.1.21)

принимает вид

$$N = \int_0^R 4\pi r^2 \sqrt{A(r)}\, n(r)\, dr =$$

$$= \int_0^R 4\pi r^2 \left[1 - \frac{2G\mathcal{M}(r)}{r}\right]^{-1/2} n(r)\, dr. \quad (11.1.23)$$

Собственная плотность числа нуклонов $n(r)$ является функцией собственной плотности $\rho(r)$, химического состава и энтропии s на один нуклон, поэтому, раз мы задали $\rho(0)$, величины $n(r)$ и N фиксированы для звезды с заданными постоянными s и химическим составом.

Внутренняя энергия звезды задается в виде

$$E \equiv M - m_{\text{н}} N. \quad (11.1.24)$$

Определим следующим образом плотность собственной внутренней энергии вещества:

$$e(r) \equiv \rho(r) - m_{\text{н}} n(r) \quad (11.1.25)$$

и запишем (11.1.24) в виде

$$E = T + V, \quad (11.1.26)$$

где T и V — соответственно тепловая и гравитационная энергии звезды:

$$T \equiv \int_0^R 4\pi r^2 \left[1 - \frac{2G\mathcal{M}(r)}{r}\right]^{-1/2} e(r)\, dr. \quad (11.1.27)$$

$$V \equiv \int_0^R 4\pi r^2 \left\{1 - \left[1 - \frac{2G\mathcal{M}(r)}{r}\right]^{-1/2}\right\} \rho(r)\, dr. \quad (11.1.28)$$

Разлагая квадратные корни, получаем

$$T = \int_0^R 4\pi r^2 \left\{1 + \frac{G\mathcal{M}(r)}{r} + \ldots\right\} e(r)\, dr. \quad (11.1.29)$$

$$V = -\int_0^R 4\pi r^2 \left\{\frac{G\mathcal{M}(r)}{r} + \frac{3G^2\mathcal{M}^2(r)}{2r^2} + \ldots\right\} \rho(r)\, dr. \quad (11.1.30)$$

Первые члены в T и V нам знакомы — это есть ньютоновские величины тепловой и гравитационной энергий звезды; заметим,

в частности, что первый член в V можно переписать так:

$$-G\int_0^R 4\pi r\mathscr{M}(r)\,\rho(r)\,dr = -\frac{G}{2}\int_0^R \frac{1}{r}\,d\left(\mathscr{M}^2(r)\right) =$$

$$= -\frac{GM^2}{2R} - \frac{G}{2}\int_0^R \frac{\mathscr{M}^2(r)}{r^2}\,dr = \frac{\phi(R)\,\mathscr{M}(R)}{2} -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^R \mathscr{M}(r)\,d\phi(r) = \frac{1}{2}\int_0^R \phi(r)\,d\mathscr{M}(r), \qquad (11.1.31)$$

где ϕ — ньютоновский потенциал, задаваемый внутри звезды следующим образом:

$$\phi(r) = -\frac{GM}{R} - G\int_r^R \frac{\mathscr{M}(r')}{r'^2}\,dr'.$$

Высшие члены, входящие в выражения для T и V, мы обсудим в § 5 гл. 11.

Повторим основной вывод: приняв, что звезда имеет вполне определенные, постоянные по всему объему энтропию на нуклон и химический состав, можно определить все свойства звезды, включая $\rho(r)$, $p(r)$, $n(r)$, $e(r)$, M, N и E, как функции центральной плотности $\rho(0)$. Все это *не* относится к обычным звездам типа Солнца, в которых распределение энтропии не постоянно в объеме, а должно быть определено из уравнения радиационного равновесия. Однако материал, рассмотренный в данном параграфе, создает достаточную основу для изучения экзотических структур, о которых шла речь в начале этой главы.

§ 2. Устойчивость

Получив решение фундаментальных уравнений (11.1.13) и (11.1.14), мы еще не завершили работу. Такое решение описывает равновесное состояние звезды, однако равновесие может быть как устойчивым, так и неустойчивым. В большинстве задач астрофизиков интересуют только устойчивые решения.

Для того чтобы сказать, будет ли некоторая частная конфигурация неустойчивой, необходимо в общем случае вычислить частоты ω_n всех нормальных мод конфигурации и проверить, будет ли хотя бы какая-нибудь из частот ω_n иметь положительную мнимую часть. В этом случае фактор $\exp(-i\omega_n t)$, определяющий временну́ю зависимость моды, будет расти экспоненциально и система станет неустойчивой. Однако часто, исходя только из равновесно-