в частности, что первый член в V можно переписать так:

$$
-G\int_0^R 4\pi r\mathcal{M}(r)\,\rho(r)\,dr = -\frac{G}{2}\int_0^R \frac{1}{r}\,d\left(\mathcal{M}^2(r)\right) =
$$
$$
= -\frac{GM^2}{2R} - \frac{G}{2}\int_0^R \frac{\mathcal{M}^2(r)}{r^2}\,dr = \frac{\phi(R)\,\mathcal{M}(R)}{2} -
$$
$$
-\frac{1}{2}\int_0^R \mathcal{M}(r)\,d\phi(r) = \frac{1}{2}\int_0^R \phi(r)\,d\mathcal{M}(r), \qquad (11.1.31)
$$

где ϕ — ньютоновский потенциал, задаваемый внутри звезды следующим образом:

$$
\phi(r) = -\frac{GM}{R} - G\int_r^R \frac{\mathcal{M}(r')}{r'^2}\,dr'.
$$

Высшие члены, входящие в выражения для T и V, мы обсудим в § 5 гл. 11.

Повторим основной вывод: приняв, что звезда имеет вполне определенные, постоянные по всему объему энтропию на нуклон и химический состав, можно определить все свойства звезды, включая $\rho(r)$, $p(r)$, $n(r)$, $e(r)$, M, N и E, как функции центральной плотности $\rho(0)$. Все это *не* относится к обычным звездам типа Солнца, в которых распределение энтропии не постоянно в объеме, а должно быть определено из уравнения радиационного равновесия. Однако материал, рассмотренный в данном параграфе, создает достаточную основу для изучения экзотических структур, о которых шла речь в начале этой главы.

§ 2. Устойчивость

Получив решение фундаментальных уравнений (11.1.13) и (11.1.14), мы еще не завершили работу. Такое решение описывает равновесное состояние звезды, однако равновесие может быть как устойчивым, так и неустойчивым. В большинстве задач астрофизиков интересуют только устойчивые решения.

Для того чтобы сказать, будет ли некоторая частная конфигурация неустойчивой, необходимо в общем случае вычислить частоты ω_n всех нормальных мод конфигурации и проверить, будет ли хотя бы какая-нибудь из частот ω_n иметь положительную мнимую часть. В этом случае фактор $\exp(-i\omega_n t)$, определяющий временну́ю зависимость моды, будет расти экспоненциально и система станет неустойчивой. Однако часто, исходя только из равновесного решения, можно судить о том, будет ли соответствующая конфигурация устойчивой.

Для этого необходимо воспользоваться следующей теоремой [1–3].

Теорема 1. Звезда, состоящая из идеальной жидкости и имеющая постоянные химический состав и энтропию на нуклон, может перейти из устойчивого состояния в неустойчивое относительно некоторой частной радиальной нормальной моды, только если величина центральной плотности $\rho(0)$ такова, что равновесная энергия E и число нуклонов N стационарны, т. е.

$$\frac{\partial E(\rho(0);\ s, \ldots)}{\partial \rho(0)} = 0,$$

$$\frac{\partial N(\rho(0);\ s, \ldots)}{\partial \rho(0)} = 0.$$

Под «радиальной» нормальной модой подразумевается такая мода осцилляции, в которой плотность возмущений $\delta\rho$ есть функция только r и t и в которой ядерные реакции, вязкость, теплопроводность и передача лучистой энергии не играют роли.

Доказательство теоремы начнем с замечания о том, что диссипативные силы здесь отсутствуют, поэтому динамические уравнения инвариантны относительно обращения времени и задают квадраты частот ω_n^2 разных нормальных колебаний в виде *действительных* функций от $\rho(0)$, как в случае колебаний, которые возникают в электрической цепи без омического сопротивления. Для каждой частоты $\omega_n^2 > 0$ существуют две устойчивые моды. Для каждого $\omega_n^2 < 0$ существуют две моды, из которых одна экспоненциально спадает, а другая экспоненциально растет соответственно как $\exp(-|\omega_n|t)$ и $\exp(+|\omega_n|t)$. Таким образом, переход от стабильности к нестабильности происходит только при значении $\rho(0)$, для которого ω_n^2 *равно нулю.*

Рассмотрим значение $\rho(0)$, для которого одна из частот ω_n почти равна нулю. Пройдет много времени, пока осцилляции или экспоненциальное возрастание не переведут равновесную конфигурацию в некоторую близкую конфигурацию $\rho(r) + \delta\rho(r)$. Этот процесс происходит очень медленно, а потому $\rho(r) + \delta\rho(r)$ должна быть также почти равновесной конфигурацией. В отсутствие ядерных реакций новая конфигурация будет иметь тот же постоянный в объеме химический состав, что и старая. Если отсутствует вязкость, теплопроводность или передача лучистой энергии, то новая конфигурация будет иметь то же количество энтропии на нуклон, что и прежняя конфигурация. Более того, законы сохранения энергии и числа частиц требуют, чтобы новая конфигурация имела ту же энергию E и барионное число N, что и раньше. Однако $\delta\rho(0)$ не может обращаться в нуль, поскольку равновесная конфигурация полностью определена (для данного химического состава и заданного s) величиной $\rho(0)$; если же $\delta\rho(0)$ равно нулю, то $\delta\rho(r)$ обращается в нуль для всех r и нормальная мода отсутствует. Таким образом, в точке перехода от устойчивости к неустойчивости существует близкая равновесная конфигурация с отличным от прежнего значением $\rho(0)$, но с теми же однородными распределениями энтропии на нуклон и химического состава и с теми же E и N. Именно это и требовалось доказать.

Эта теорема особенно полезна, поскольку часто только на основании качественных аргументов можно показать, что равновесная конфигурация является устойчивой для достаточно малых (или больших) $\rho(0)$ или неустойчивой для достаточно больших (или малых) $\rho(0)$; теорема указывает точно, где возникает переход от устойчивости к неустойчивости. В качестве примера такого качественного рассмотрения полезно переформулировать основные уравнения, описывающие строение звезды, на основе вариационного принципа (см. книгу [1], гл. 3).

Теорема 2. Данная звездная конфигурация с однородными распределениями энтропии на нуклон и химического состава будет удовлетворять уравнениям (11.1.12), (11.1.13), выведенным при условии равновесия, в том и только в том случае, если величина M, определяемая формулой

$$M \equiv \int 4\pi r^2 \rho(r)\, dr,$$

устойчива по отношению ко всем вариациям $\rho(r)$, оставляющим неизменной величину

$$N \equiv \int 4\pi r^2 n(r) \left[1 - \frac{2G\mathcal{M}(r)}{r}\right]^{-1/2} dr$$

и не меняющим энтропию на нуклон и однородность химического состава. [Совершенно ясно, что если энтропия на нуклон и химический состав фиксированы, то из уравнения состояния можно определить как $p(r)$, так и $n(r)$ в виде функций от $\rho(r)$. Равновесие устойчиво по отношению к радиальным колебаниям тогда и только тогда, когда величина M, или, что то же, E, имеет *минимум* по отношению ко всем таким вариациям.

Чтобы доказать эту теорему, используем метод множителей Лагранжа (см., например, [4]): M будет стационарным по отношению ко всем вариациям, оставляющим N фиксированным, в том и только в том случае, если существует константа λ, для которой $M - \lambda N$ стационарно по отношению ко всем вариациям. В общем случае для заданной вариации $\delta\rho(r)$ изменение $M - \lambda N$ запишется в виде

$$\delta M-\lambda\delta N=\int\limits_0^\infty 4\pi r^2\delta\rho(r)\,dr=$$

$$=\lambda\int\limits_0^\infty 4\pi r^2\left[1-\frac{2G\mathcal{M}(r)}{r}\right]^{-1/2}\delta n(r)\,dr-$$

$$-\lambda G\int\limits_0^\infty 4\pi r\left[1-\frac{2G\mathcal{M}(r)}{r}\right]^{-3/2}n(r)\,\delta\mathcal{M}(r)\,dr.$$

(Интегрирование проводится до бесконечности только из соображений удобства записи; в действительности же подынтегральные выражения исчезают вне радиуса $R+\delta R$.) По предположению, эти вариации не меняют энтропию на нуклон. Поэтому имеем

$$\delta\left(\frac{\rho}{n}\right)+p\delta\left(\frac{1}{n}\right)=0,$$

и, следовательно,

$$\delta n(r)=\frac{n(r)}{p(r)+\rho(r)}\,\delta\rho(r).$$

Также справедлива формула

$$\delta\mathcal{M}(r)=\int\limits_0^r 4\pi r'^2\delta\rho(r')\,dr'.$$

Изменяя порядок интегрирования в последнем члене, получаем

$$\delta M-\lambda\delta N=\int\limits_0^\infty 4\pi r^2\left\{1-\frac{\lambda n(r)}{p(r)+\rho(r)}\left[1-\frac{2G\mathcal{M}(r)}{r}\right]^{-1/2}-\right.$$

$$\left.-\lambda G\int\limits_r^\infty 4\pi r'n(r')\left[1-\frac{2G\mathcal{M}(r')}{r'}\right]^{-3/2}dr'\right\}\delta\rho(r)\,dr.$$

Таким образом, $\delta M-\lambda\delta N$ будет обращаться в нуль для всех $\delta\rho(r)$ тогда и только тогда, когда

$$\frac{1}{\lambda}=\frac{n(r)}{p(r)+\rho(r)}\left[1-\frac{2G\mathcal{M}(r)}{r}\right]^{-1/2}+$$

$$+G\int\limits_r^\infty 4\pi r'n(r')\left[1-\frac{2G\mathcal{M}(r')}{r'}\right]^{-3/2}dr'.$$

Это будет справедливо для некоторого значения множителя Лагранжа λ в том и только в том случае, если правая часть последнего соотношения не будет зависеть от r, т. е. если

$$\left\{\frac{n'}{p+\rho}-\frac{n(p'+\rho')}{(p+\rho)^2}\right\}\left[1-\frac{2G\mathscr{M}}{r}\right]^{-1/2}+$$
$$+\frac{Gn}{p+\rho}\left\{4\pi r\rho-\frac{\mathscr{M}}{r^2}\right\}\left[1-\frac{2G\mathscr{M}}{r}\right]^{-3/2}-$$
$$-4\pi Grn\left[1-\frac{2GM}{r}\right]^{-3/2}=0.$$

Условие однородности распределения энтропии, приходящейся на один нуклон, приводит к равенству

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{\rho}{n}\right)+p\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{n}\right)=0.$$

и, следовательно,

$$n'(r)=\frac{n(r)\,\rho'(r)}{p(r)+\rho(r)}.$$

Таким образом, δM обращается в нуль для всех $\delta\rho(r)$, которые дают $\delta N=0$, тогда и только тогда, когда верно соотношение

$$-r^2p'=G\left[1-\frac{2G\mathscr{M}}{k}\right]^{-1}[p+\rho]\,[\mathscr{M}+4\pi r^3p],$$

что и требовалось доказать.

Если член в δM, имеющий *второй* порядок по $\delta\rho(r)$, положительно определен для всех возмущений, то, для того чтобы породить какое-либо возмущение, необходимо подводить энергию, т. е. звезда будет устойчивой. Если же для некоторого возмущения $\delta\rho(r)$ величина δM может во втором порядке быть отрицательной, то с увеличением кинетической энергии это возмущение будет расти и звезда станет неустойчивой.

§ 3. Ньютоновские звезды: политропы и белые карлики

Большинство звезд правильно описываются ньютоновской физикой без учета эффектов общей теории относительности. Такие ньютоновские звезды заслуживают нашего внимания, во-первых, потому, что они представляют собой предельные случаи более экзотических объектов, интересных с точки зрения общей теории относительности, и, во-вторых, их изучение позволяет нам понять качественные свойства указанных объектов.

В ньютоновской астрофизике внутренняя энергия и давление много меньше плотности массы покоя, т. е.

$$e\ll m_{\text{н}}n,\qquad p\ll m_{\text{н}}n, \tag{11.3.1}$$