него соотношения не будет зависеть от r, т. е. если

$$\left\{\frac{n'}{p+\rho}-\frac{n(p'+\rho')}{(p+\rho)^2}\right\}\left[1-\frac{2G\mathscr{M}}{r}\right]^{-1/2}+$$
$$+\frac{Gn}{p+\rho}\left\{4\pi r\rho-\frac{\mathscr{M}}{r^2}\right\}\left[1-\frac{2G\mathscr{M}}{r}\right]^{-3/2}-$$
$$-4\pi Grn\left[1-\frac{2GM}{r}\right]^{-3/2}=0.$$

Условие однородности распределения энтропии, приходящейся на один нуклон, приводит к равенству

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{\rho}{n}\right)+p\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{n}\right)=0.$$

и, следовательно,

$$n'(r)=\frac{n(r)\rho'(r)}{p(r)+\rho(r)}.$$

Таким образом, δM обращается в нуль для всех $\delta\rho(r)$, которые дают $\delta N=0$, тогда и только тогда, когда верно соотношение

$$-r^2p'=G\left[1-\frac{2G\mathscr{M}}{k}\right]^{-1}[p+\rho][\mathscr{M}+4\pi r^3p],$$

что и требовалось доказать.

Если член в δM, имеющий *второй* порядок по $\delta\rho(r)$, положительно определен для всех возмущений, то, для того чтобы породить какое-либо возмущение, необходимо подводить энергию, т. е. звезда будет устойчивой. Если же для некоторого возмущения $\delta\rho(r)$ величина δM может во втором порядке быть отрицательной, то с увеличением кинетической энергии это возмущение будет расти и звезда станет неустойчивой.

§ 3. Ньютоновские звезды: политропы и белые карлики

Большинство звезд правильно описываются ньютоновской физикой без учета эффектов общей теории относительности. Такие ньютоновские звезды заслуживают нашего внимания, во-первых, потому, что они представляют собой предельные случаи более экзотических объектов, интересных с точки зрения общей теории относительности, и, во-вторых, их изучение позволяет нам понять качественные свойства указанных объектов.

В ньютоновской астрофизике внутренняя энергия и давление много меньше плотности массы покоя, т. е.

$$e\ll m_{\text{н}}n,\qquad p\ll m_{\text{н}}n,\tag{11.3.1}$$

поэтому полная плотность в основном определяется плотностью массы покоя, а именно

$$\rho \approx m_{\text{н}} n. \tag{11.3.2}$$

Кроме того, выполняются соотношения

$$p \ll \rho, \qquad 4\pi r^3 \eta \ll \mathscr{M}.$$

Далее, гравитационный потенциал мал везде, т. е.

$$\frac{2G\mathscr{M}}{r} \ll 1. \tag{11.3.3}$$

При этих условиях фундаментальное уравнение (11.1.13) принимает вид

$$-r^2 p'(r) = G\mathscr{M}(r)\,\rho(r), \tag{11.3.4}$$

где $\mathscr{M}(r)$ определяется следующим образом:

$$\mathscr{M}(r) \equiv \int_0^r 4\pi r'^2 \rho(r')\,dr'. \tag{11.3.5}$$

Разделив уравнение (11.3.4) на $\rho(r)$ и продифференцировав его по r, объединим уравнения (11.3.4) и (11.3.5) в единственное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d}{dr}\frac{r^2}{\rho(r)}\frac{dp(r)}{dr} = -4\pi G r^2 \rho(r). \tag{11.3.6}$$

Для того чтобы $\rho(0)$ было конечным, необходимо, чтобы $p'(0)$ обращалось в нуль. Следовательно, задавая уравнение состояния $p = p(\rho)$ (при условии $dp/d\rho \neq 0$), мы можем найти $\rho(r)$, если решим уравнение (11.3.6) со следующими начальными условиями: $\rho(0)$ равно некоторой заданной величине, а

$$\rho'(0) = 0. \tag{11.3.7}$$

[Уравнение (11.3.7) вытекает также из требования, чтобы $\rho(r)$ была аналитической функцией от x, y и z при $x = y = z = 0$.]

Далее, нам необходимо получить уравнение состояния. Обычно плотность внутренней энергии пропорциональна давлению, т. е.

$$e \equiv \rho - m_{\text{н}} n = (\gamma - 1)^{-1} p. \tag{11.3.8}$$

[Здесь $(\gamma - 1)^{-1}$ — константа пропорциональности; величина γ не будет отношением удельных теплоемкостей, если только e и p не будут пропорциональны температуре.] Тогда условие однородности энтропии, приходящейся на один нуклон, запишется следующим образом:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{\rho}{n}\right) + p\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{d}{dr}\left(\frac{e}{n}\right) + p\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{n}\right) =$$
$$= \frac{1}{\gamma - 1}\left\{\gamma p \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n}\right)\frac{dp}{dr}\right\} = 0,$$

и, следовательно,

$$p \sim n^{\gamma},$$

или, поскольку $\rho \approx m_{\text{н}} n$, последнее выражение примет вид

$$p = K\rho^{\gamma}. \tag{11.3.9}$$

Константа пропорциональности K зависит от величины энтропии, приходящейся на нуклон, и от химического состава, но не зависит от r или $\rho(0)$. Любая звезда, для которой уравнение состояния имеет вид (11.3.9), называется *политропой*.

В случае политропы фундаментальное уравнение (11.3.6) можно преобразовать к безразмерному виду. Введем новую независимую переменную ξ с помощью соотношения

$$r = \left(\frac{k\gamma}{4\pi G(\gamma-1)}\right)^{1/2} \rho(0)^{(\gamma-2)/2}\xi \tag{11.3.10}$$

и зависящую от нее новую переменную θ следующим образом:

$$\rho = \rho(0)\,\theta^{1/(\gamma-1)}, \qquad p = K\rho(0)^{\gamma}\,\theta^{\gamma/(\gamma-1)}. \tag{11.3.11}$$

Тогда уравнение (11.3.6) примет вид

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\xi^2\frac{d\theta}{d\xi} + \theta^{1/(\gamma-1)} = 0. \tag{11.3.12}$$

Граничные условия для функции $\theta(\xi)$ запишутся так:

$$\theta(0) = 1, \qquad \theta'(0) = 0 \tag{11.3.13}$$

[см. уравнение (11.3.7)]. Функция $\theta(\xi)$, определяемая соотношениями (11.3.12) и (11.3.13), называется *функцией Лейна — Эмдена* с индексом $(\gamma-1)^{-1}$ (эти функции широко обсуждаются в книге [5]). Если ξ близко к нулю, уравнение (11.3.12) приводит к следующему разложению:

$$\theta(\xi) = 1 - \frac{\xi^2}{6} + \frac{\xi^4}{120(\gamma-1)} - \ldots. \tag{11.3.14}$$

Можно также показать, что для $\gamma > {}^6/_5$ функция $\theta(\xi)$ обращается в нуль при некотором конечном значении $\xi = \xi_1$, т. е.

$$\theta(\xi_1) = 0. \tag{11.3.15}$$

С помощью выражения (11.3.10) можно, таким образом, задать радиус звезды

$$R = \left(\frac{K\gamma}{4\pi G(\gamma-1)}\right)^{1/2} \rho(0)^{(\gamma-2)/2}\,\xi_1, \tag{11.3.16}$$

Применим решение Лейна — Эмдена также для вычисления массы звезды:

$$M \equiv \int_0^R 4\pi r^2 \rho(r)\, dr =$$

$$= 4\pi\rho(0)^{(3\gamma-4)/2} \left(\frac{K\gamma}{4\pi G(\gamma-1)}\right)^{3/2} \int_0^{\xi_1} \xi^2 \theta^{1/(\gamma-1)}(\xi)\, d\xi =$$

$$= 4\pi\rho(0)^{(3\gamma-4)/2} \left(\frac{K\gamma}{4\pi G(\gamma-1)}\right)^{3/2} \xi_1^2 \,|\, \theta'(\xi_1) \,|.$$

Исключая из (11.3.16) и (11.3.17) величину $\rho(0)$, получаем соотношение между M и R:

$$M = 4\pi R^{(3\gamma-4)/(\gamma-2)} \left(\frac{K\gamma}{4\pi G(\gamma-1)}\right)^{-1/(\gamma-2)} \xi_1^{-(3\gamma-4)/(\gamma-2)} \xi_1^2 \,|\, \theta'(\xi_1) \,|. \tag{11.3.18}$$

Численные значения констант ξ_1 и $\xi_1^2 \,|\, \theta'(\xi_1) \,|$ сведены в табл. 11.1 (см. в [5] табл. 4).

Таблица 11.1

Численные значения параметров ξ_1 и $-\xi_1^2\theta'(\xi_1)$ для разнообразных ньютоновских политроп [5]

γ	ξ_1	$-\xi_1^2\theta'(\xi_1)$	Примеры
$^6/_5$	∞	1,73205	
$^{11}/_9$	31,83646	1,73780	
$^5/_4$	14,97155	1,79723	
$^9/_7$	9,53581	1,89056	
$^4/_3$	6,89685	2,01824	Белые карлики с наибольшей массой
$^7/_5$	5,35528	2,18720	
$^3/_2$	4,35287	2,41105	
$^5/_3$	3,65375	2,71406	Белые карлики с малой массой
2	π	π	
3	2,7528	3,7871	
∞	$\sqrt{6}$	$2\sqrt{6}$	Несжимаемые звезды

Для ньютоновских звезд основной вклад в M дает полная масса покоя $Nm_н$, поэтому число нуклонов в звезде с хорошим приближением равно

$$N \approx \frac{M}{m_n}. \tag{11.3.19}$$

Мы хотим также знать внутреннюю энергию $E \equiv M - Nm_n$. В общем случае для ньютоновских звезд величина E задается

с помощью уравнений (11.1.26), (11.1.29) и (11.1.30) следующим образом:

$$E = T + V, \tag{11.3.20}$$

а тепловая и гравитационная энергия T и V записываются так:

$$T = \int^{R} 4\pi r^2 e(r)\, dr, \tag{11.3.21}$$

$$V = -\int_0^R 4\pi r G \mathscr{M}(r)\, \rho(r)\, dr. \tag{11.3.22}$$

Сейчас мы покажем, что для политроп величины T и V задаются удивительно простыми формулами [6, 7]:

$$T = \frac{1}{(5\gamma-6)} \frac{GM^2}{R}, \tag{11.3.23}$$

$$V = -\frac{3(\gamma-1)}{(5\gamma-6)} \frac{GM^2}{R}, \tag{11.3.24}$$

и поэтому полная внутренняя энергия

$$E = -\frac{(3\gamma-4)}{(5\gamma-6)} \frac{GM^2}{R}. \tag{11.3.25}$$

Чтобы доказать формулу (11.3.24), используем уравнение (11.3.4) и перепишем интеграл (11.3.22) в виде

$$V = 4\pi \int_0^R r^3 \frac{dp(r)}{dr}\, dr = -12\pi \int_0^R r^2 p(r)\, dr. \tag{11.3.26}$$

Умножив и разделив подынтегральное выражение на $\rho(r)$, получим

$$V = -3 \int_0^R \frac{p(r)}{\rho(r)}\, d\mathscr{M}(r) = 3 \int_0^R \mathscr{M}(r)\, d\left(\frac{p(r)}{\rho(r)}\right).$$

(Мы считаем здесь, что $\gamma > 1$, так что p/ρ обращается в нуль при $r = R$.) Если с помощью уравнения состояния вычислить $d[p(r)/\rho(r)]$

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{p(r)}{\rho(r)}\right) = \left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right) \frac{p'(r)}{\rho(r)} = -\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right) \frac{G\mathscr{M}(r)}{r^2},$$

то этот интеграл можно вычислить

$$V = -3\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right) \int_0^R \frac{G\mathscr{M}^2(r)}{r^2}\, dr. \tag{11.3.27}$$

Используя $dr/r^2 = -d(1/r)$, проинтегрируем (11.3.27) по частям. В результате получим

$$V = 3\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)\left\{\frac{GM^2}{R} - 2\int_0^R 4\pi r G\mathscr{M}(r)\,\rho(r)\,dr\right\} =$$

$$= 3\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)\left\{\frac{GM^2}{R} + 2V\right\}.$$

Решая это уравнение относительно V, получаем формулу (11.3.24). Чтобы вычислить T, подставим выражение (11.3.8) в (11.3.26), откуда находим

$$V = -3(\gamma - 1)\,T. \tag{11.3.28}$$

Из соотношений (11.3.24) и (11.3.28) легко получить нужную формулу (11.3.23).

Соотношения (11.3.17) и (11.3.19) показывают, что число нуклонов N пропорционально $\rho(0)^{(3\gamma-4)/2}$, а выражение для внутренней энергии $E \sim \rho(0)^{(5\gamma-6)/2}$ следует из выражений (11.3.25), (11.3.16) и (11.3.17). Таким образом, производные $\partial N/\partial\rho(0)$ и $\partial E/\partial\rho(0)$ никогда не обращаются одновременно в нуль. Из теоремы 1, доказанной в предыдущем параграфе, следует, что каждая политропа будет для всех $\rho(0)$ устойчивой либо неустойчивой в зависимости от значения γ. Какие же это значения γ?

Чтобы ответить на этот вопрос, вернемся к теореме 2 предыдущего параграфа, утверждающей, что звезда будет устойчивой в том и только в том случае, когда E минимально при всех вариациях $\rho(r)$, не меняющих N (и уравнение состояния). Интуиция подсказывает, что первая возникающая неустойчивость соответствует однородному взрыву всей звезды, и поскольку мы на вопрос об устойчивости по отношению к этой моде хотим только получить ответ «да» или «нет», мы можем надеяться получить его, рассмотрев пробную конфигурацию, когда $\rho(r)$ *постоянно* (подробное обсуждение вопроса стабильности звезд дано в [8,9] [1]). В любой такой конфигурации выражения (11.3.19), (11.3.21), (11.3.22) и (11.3.8) примут вид

$$N = \frac{4\pi}{3m_{\text{н}}}\rho R^3, \tag{11.3.29}$$

$$T = \frac{4\pi}{3}(\gamma-1)^{-1}K\rho^{\gamma}R^3, \tag{11.3.30}$$

$$V = -\frac{16\pi^2}{15}G\rho^2R^5. \tag{11.3.31}$$

[1]) Релятивистские эффекты рассмотрены в работе [9].

Исключая из этих соотношений R, получаем

$$E = T + V = a\rho^{\gamma-1} - b\rho^{1/3}, \tag{11.3.32}$$

где

$$a = \frac{KM}{\gamma - 1}, \tag{11.3.33}$$

$$b = \frac{3}{5}\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3} GM^{5/3}. \tag{11.3.34}$$

Для $\gamma > {}^4/_3$ энергия E будет *минимальной* при значении

$$\rho = \left(\frac{b}{3a(\gamma-1)}\right)^{1/(\gamma-4/3)} = \left(\frac{M^{2/3}G(4\pi/3)^{1/3}}{5K}\right)^{1/(\gamma-4/3)}, \tag{11.3.35}$$

соответствующем конфигурации *устойчивого* равновесия. Для $\gamma = {}^4/_3$ энергия E не будет зависеть от ρ, если E всюду обращается в нуль, что обеспечивает равенство $a = b$, или

$$M = \left(\frac{5K}{G}\right)^{3/2}\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{-1/2} \tag{11.3.36}$$

Для $\gamma < {}^4/_3$ величина E имеет *максимум* в точке, задаваемой (11.3.35), соответствующий состоянию *неустойчивого* равновесия.

Кстати, с помощью соотношения (11.3.35) можно оценить значение массы

$$M \approx \frac{4\pi}{3}\rho^{(3\gamma-4)/2}\left(\frac{15K}{4\pi G}\right)^{3/2}$$

и сравнить его с точным результатом (11.3.17). Отношение этих двух формул для M имеет вид

$$\frac{M\,(\text{вариацион.})}{M\,(\text{точное})} = \frac{(15(\gamma-1)/\gamma)^{3/2}}{3\xi_1^2\,|\,\theta'(\xi_1)\,|}.$$

Для $\gamma = {}^5/_3$ это отношение равно 1,8; для $\gamma = {}^4/_3$ оно равно 1,2. Таким образом, видно, что вариационный метод не только дает верную зависимость M от ρ (включая и то, что при $\gamma = {}^4/_3$ величина M не зависит от ρ, а E обращается в нуль), но и приводит к приближенному результату, чрезвычайно близкому к точному численному результату. Мы принимаем в качестве достоверного предсказание вариационного метода, что политропа устойчива или неустойчива в зависимости от того, будет ли $\gamma > {}^4/_3$ или $\gamma < {}^4/_3$ [8, 9].

Вариационный подход дает также простой метод оценки частоты колебаний для расширения или сжатия звезды. Из соотношений (11.3.29) — (11.3.31) для фиксированных N следует, что

$$T \sim R^{3(1-\gamma)}, \qquad V \sim R^{-1}.$$

Используем результаты (11.3.23) и (11.3.24) для того, чтобы задать правильные значения T и V при равновесном радиусе (который мы будем записывать сейчас как $R_{\text{равн}}$, чтобы отличать

его от мгновенного значения радиуса осциллирующей конфигурации). Это даст нам

$$E=\frac{1}{(5\gamma-6)}\frac{GM^2}{R_{\text{равн}}^{(4-3\gamma)}}R^{3(1-\gamma)}-\frac{3(\gamma-1)}{5\gamma-6}GM^2R^{-1}.$$

Для $\gamma > {}^4/_3$ эта величина имеет минимум при $R = R_{\text{равн}}$, как и должно быть. Для R, близких к $R_{\text{равн}}$, E ведет себя следующим образом:

$$E \to E_{\text{равн}}+\frac{3(\gamma-1)(3\gamma-4)}{2(5\gamma-6)}\frac{GM^2}{R_{\text{равн}}^3}(R-R_{\text{равн}})^2.$$

Однородное расширение сферы с однородной плотностью отвечает кинетической энергии:

$$U=\frac{3}{10}M\dot{R}^2,$$

поэтому условие сохранения энергии $U + E = \text{const}$ приводит к такой моде:

$$R-R_{\text{равн}}\sim\sin\omega t,$$

$$\omega_0\approx\left[\frac{5(\gamma-1)(3\gamma-4)}{5\gamma-6}\frac{GM^2}{R_{\text{равн}}^3}\right]^{1/2}. \qquad (11.3.37)$$

И наконец, заметим, что однородная сфера, вращающаяся с угловой скоростью Ω, имеет кинетическую энергию, равную

$$U=\frac{1}{5}MR_{\text{равн}}^2\Omega^2.$$

Эта величина должна быть меньше, чем энергия связи $(-E)$, поэтому максимальная угловая скорость, с которой звезда может вращаться, имеет порядок

$$\Omega_{\text{макс}}\approx\left[\frac{5(3\gamma-4)}{(5\gamma-6)}\frac{GM}{R_{\text{равн}}^3}\right]^{1/2}\equiv\frac{\omega_0}{\sqrt{\gamma-1}}. \qquad (11.3.38)$$

Конечно, вращающаяся с такой скоростью звезда перестает быть сферической, так что с помощью (11.3.38) можно оценить только порядок величины истинной максимальной частоты вращения.

Применим теперь эти сведения к звездам, известным под названием белых карликов. Представим себе старую звезду, которая исчерпала свое ядерное топливо и начала охлаждаться и сжиматься. Когда температура ее станет достаточно низкой (ниже мы укажем, что значит «достаточно низкой»), электроны будут заморожены на низшем разрешенном энергетическом уровне. Принцип Паули утверждает, что на каждом уровне могут находиться только два электрона (поскольку имеются два спиновых состояния) и в единице объема существует $4\pi k^2(2\pi\hbar)^{-3}dk$ уровней с импульсами, лежащими в интервале k, $k + dk$. Поэтому число электронов на единицу объема связано следующим образом

с максимальным импульсом k_F:

$$n = \frac{8\pi}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{k_F} k^2\, dk = \frac{k_F{}^3}{3\pi^2\hbar^3}. \tag{11.3.39}$$

Плотность массы

$$\rho = n m_{\text{н}} \mu, \tag{11.3.40}$$

где μ — число нуклонов, приходящихся на электрон; $\mu \approx 2$ для звезд, которые полностью израсходовали водород. Это дает следующее значение:

$$k_F = \hbar \left(\frac{3\pi^2 \rho}{m_{\text{н}} \mu} \right)^{1/3}. \tag{11.3.41}$$

Условие, при котором тепловой энергией можно пренебречь имеет вид

$$kT \ll [k_F{}^2 + m_e{}^2]^{1/2} - m_e.$$

Кинетическая энергия и давление этих электронов равны

$$e = \frac{8\pi}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{k_F} [(k^2 + m_e{}^2)^{1/2} - m_e]\, k^2\, dk, \tag{11.3.42}$$

$$p = \frac{8\pi}{3\,(2\pi\hbar)^3} \int_0^{k_F} \frac{k^2}{(k^2 + m_e{}^2)^{1/2}}\, k^2\, dk. \tag{11.3.43}$$

[См. формулу (2.8.4).] Уравнение состояния можно явно записать, если подставить выражение (11.3.41) в (11.3.43).

Для белых карликов уравнение состояния не имеет простого вида, однако оно сводится к уравнению политропы в двух предельных случаях, когда $\rho \ll \rho_{\text{кр}}$ и $\rho \gg \rho_{\text{кр}}$, где $\rho_{\text{кр}}$ — критическая плотность, при которой k_F становится равным m_e; в единицах СГС получаем

$$\rho_{\text{кр}} = \frac{m_{\text{н}} \mu m_e{}^3 c^3}{3\pi^2\hbar^3} = 0{,}97 \cdot 10^6 \mu \ \text{г/см}^3. \tag{11.3.44}$$

А. Рассмотрим случай $\rho \ll \rho_{\text{кр}}$. Тогда $k_F \ll m_e$, и соотношения (11.3.42) и (11.3.43) дают

$$e = \frac{3}{2} p,$$

$$p = \frac{8\pi k_F{}^5}{15 m_e (2\pi\hbar)^3} = \frac{\hbar^2}{15 m_e \pi^2} \left(\frac{3\pi^2 \rho}{m_{\text{н}} \mu} \right)^{5/3}.$$

Этот результат соответствует политропе с параметрами

$$\gamma = \frac{5}{3}, \qquad K = \frac{\hbar^2}{15 m_e \pi^2} \left(\frac{3\pi^2}{m_{\text{н}} \mu} \right)^{5/3}. \tag{11.3.45}$$

Из выражения (11.3.17) можно получить массу (в единицах СГС)

$$M=\frac{1}{2}\left(\frac{3\pi}{8}\right)^{1/2}(2{,}71406)\left(\frac{\hbar^{3/2}c^{3/2}}{m_{\text{н}}^2\mu^2G^{3/2}}\right)\times$$
$$\times\left(\frac{\rho(0)}{\rho_{\text{кр}}}\right)^{1/2}=2{,}79\mu^{-2}\left(\frac{\rho(0)}{\rho_{\text{кр}}}\right)^{1/2}M_{\odot}, \qquad (11.3.46)$$

а выражение (11.3.16) дает радиус (в единицах СГС)

$$R=\left(\frac{3\pi}{8}\right)^{1/2}(3{,}65375)\left(\frac{\hbar^{3/2}}{c^{1/2}G^{1/2}m_e m_{\text{н}}\mu}\right)\times$$
$$\times\left(\frac{\rho(0)}{\rho_{\text{кр}}}\right)^{-1/6}=2{,}0\cdot10^4\mu^{-1}\left(\frac{\rho(0)}{\rho_{\text{кр}}}\right)^{-1/6}\text{ км} \qquad (11.3.47)$$

Б. Рассмотрим случай $\rho\gg\rho_{\text{кр}}$. Тогда $k_F\gg m_e$, и выражения (11.3.42), (11.3.43) приводят к следующему результату:

$$e=3p,$$
$$p=\frac{8\pi k_F^4}{12(2\pi\hbar)^3}=\frac{\hbar}{12\pi^2}\left(\frac{3\pi^2\rho}{m_{\text{н}}\mu}\right)^{4/3}.$$

Это соответствует политропе с параметрами

$$\gamma=\frac{4}{3}, \qquad K=\frac{\hbar}{12\pi^2}\left(\frac{3\pi^2}{m_{\text{н}}\mu}\right)^{4/3}. \qquad (11.3.48)$$

Из выражения (11.3.17) следует *единственное* значение массы (в единицах СГС), равное

$$M=\frac{1}{2}(3\pi)^{1/2}(2{,}01824)\left(\frac{\hbar^{3/2}c^{3/2}}{G^{3/2}m_{\text{н}}^2\mu^2}\right)=5{,}87\mu^{-2}M_{\odot} \qquad (11.3.49)$$

а выражение (11.3.16) дает следующее значение радиуса (в единицах СГС):

$$R=\frac{1}{2}(3\pi)^{1/2}(6{,}89685)\left(\frac{\hbar^{3/2}}{c^{1/2}G^{1/2}m_e m_{\text{н}}\mu}\right)\left(\frac{\rho_{\text{кр}}}{\rho(0)}\right)^{1/3}=$$
$$=5{,}3\cdot10^4\mu^{-1}\left(\frac{\rho_{\text{кр}}}{\rho(0)}\right)^{1/3}\text{ км}. \qquad (11.3.50)$$

Заметим, что для $\rho(0)\ll\rho_{\text{кр}}$, $\gamma>{}^4/_3$ и поэтому менее массивные белые карлики устойчивы. Мы видим, что при увеличении центральной плотности величина M растет монотонно, достигая максимума (11.3.49), когда $\rho(0)\to\infty$; в этом случае не существует точки, в которой звезда становится неустойчивой. Таким образом, можно уже сделать вывод, что белый карлик может быть устойчивым, если его масса меньше (11.3.49). Эта максимальная масса называется *пределом Чандрасекара* [10, 11].

В действительности же картина не столь проста. При $k_F\approx\approx5m_e$ становятся энергетически выгодными процессы захвата

электронов ядрами с превращением протонов в нейтроны и рождением нейтрино, которые сразу улетают из системы. Этот эффект приводит к увеличению числа μ нуклонов, приходящихся на один электрон, и, согласно выражению (11.3.46), снижает величину массы M при заданной центральной плотности. Следовательно, можно ожидать, что M увеличивается, стремясь к пределу Чандрасекара, до тех пор, пока центральная плотность не примет значения $\rho(0) \approx 5^3\rho_{\text{кр}}$ [см. выражения (11.3.41) и (11.3.44)]; при этом M достигает максимума, а затем начинает убывать. Подробные вычисления показывают (см. фиг. 5 и гл. 10 в [1]), что максимальная масса равна $1{,}2M_\odot$, т. е. приблизительно совпадает с пределом Чандрасекара, который составляет $1{,}26M_\odot$ для $\mu = {}^{56}/_{26}$. Радиус звезды максимальной массы равняется $4\cdot10^3$ км. Теорема 2 предыдущего параграфа утверждает, что этот максимум есть точка перехода от стабильных состояний к нестабильным, так что стабильные железные белые карлики могут существовать только при $M < 1{,}2M_\odot$.

Наиболее интересным для изучающих общую теорию относительности является абсолютное значение GM/R гравитационного потенциала на поверхности белого карлика. Для $\rho(0) \ll \rho_{\text{кр}}$ этот параметр задается выражениями (11.3.46) и (11.3.47):

$$\frac{GM}{R} = \frac{1}{2}\left(\frac{2{,}71406}{3{,}65375}\right)\mu^{-1}\left(\frac{m_e}{m_{\text{н}}}\right)\left(\frac{\rho(0)}{\rho_{\text{кр}}}\right)^{2/3}, \qquad (11.3.51)$$

а для $\rho(0) \gg \rho_{\text{кр}}$ гравитационный потенциал задается выражениями (11.3.49) и (11.3.50):

$$\frac{GM}{R} = \left(\frac{2{,}01824}{6{,}89685}\right)\mu^{-1}\left(\frac{m_e}{m_{\text{н}}}\right)\left(\frac{\rho(0)}{\rho_{\text{кр}}}\right)^{1/3}. \qquad (11.3.52)$$

Видно, что GM/R всегда остается очень малой величиной из-за коэффициента $m_e/m_{\text{н}} = 5{,}4\cdot10^{-4}$. Таким образом, эффекты общей теории относительности не вносят больших изменений в структуру белых карликов. Величина GM/R растет с увеличением центральной плотности и становится наибольшей при максимальной массе $1{,}2M_\odot$, равной $4\cdot10^{-4}$. Наш старый знакомый, 40 Эридан B, характеризуется $GM/R \approx 6\cdot10^{-5}$ (§ 5 гл. 3), так что вряд ли можно ожидать серьезных улучшений в измерении красного смещения, если обнаружатся белые карлики с гораздо большими значениями красного смещения.

§ 4. Нейтронные звезды

В предыдущем параграфе мы убедились в том, что белые карлики, удерживаемые за счет давления холодных вырожденных электронов, не могут быть в равновесии, если их масса превышает предел Чандрасекара, равный примерно $\hbar^{3/2}/(m_{\text{н}}^2G^{3/2})$. Гра-