Это значительно больше, чем наблюдаемая частота излучения любого пульсара. В настоящее время полагают, что пульсары — это вращающиеся нейтронные звезды [28], существование которых начинается с частотами вращений, близкими к максимальной, порядка 10^4 $с^{-1}$, но впоследствии их вращение замедляется из-за потерь энергии на гравитационное или электромагнитное излучения и на электромагнитное ускорение заряженных частиц. (Чтобы объяснить существование этого излучения, а также периодических импульсов, необходимо предположить, что звезда не обладает круговой симметрией относительно оси вращения, как было бы в случае, если бы ее магнитные полюсы не совпадали с полюсами вращения.) В пользу такой интерпретации говорит наблюдение нескольких замедляющихся пульсаров (см. обзор [29]).

Белый карлик с такой же массой, как нейтронная звезда, будет иметь радиус, больший в $m_n/\mu m_e \approx 900$ раз, так что его основная частота колебаний и максимальная частота вращения будут меньше, чем у нейтронной звезды, в $3\cdot10^5$ раз. При M, близких к $M_{макс}$, это дает характеристическую частоту, меньшую чем (11.4.29) в $3\cdot10^5$ раз, что составляет примерно 0,3 $с^{-1}$. Это ниже того, что наблюдается для периодов излучения импульсов большинства пульсаров. Вероятно, пульсары — это нейтронные звезды, а не белые карлики.

§ 5. Сверхмассивные звезды

Теперь мы рассмотрим звезды другого вида [30, 31], которые общая теория относительности описывает совершенно иным образом. Представим себе ньютоновскую звезду, которая существует за счет давления излучения, а не вещества. Условия, при которых это возможно, будут разобраны в дальнейшем. Предположим также, что звезда находится в состоянии конвекционного равновесия § 1 гл. 11) и имеет однородный химический состав. Плотность энергии излучения равна $e = 3p$, а потому эта звезда будет политропой с $\gamma = {}^4/_3$, т. е.

$$p = K\rho^{4/3}. \tag{11.5.1}$$

Давление излучения задается законом Стефана — Больцмана

$$p_{изл} = \frac{\pi^2 (kT)^4}{45\hbar^3}, \tag{11.5.2}$$

так что при $p \approx p_{изл}$ температура определяется следующим образом:

$$kT = \left(\frac{45\hbar^3 K}{\pi^2}\right)^{1/4} \rho^{1/3}. \tag{11.5.3}$$

Давление вещества в этом случае подчиняется закону идеального газа

$$p_{\text{вещ}} = \rho \frac{kT}{\overline{m}}. \tag{11.5.4}$$

где $\overline{m}$ — средняя масса частиц газов. Таким образом, отношение давления вещества к давлению излучения равняется

$$\beta \equiv \frac{p_{\text{вещ}}}{p_{\text{изл}}} = \frac{45\hbar^3}{\pi^2 \overline{m}} \frac{\rho}{(kT)^3} = \frac{1}{\overline{m}} \left(\frac{45\hbar^3}{\pi^2 K^3} \right)^{1/3}. \tag{11.5.5}$$

Оно является константой по всему объему звезды, поэтому можно, используя β вместо K (или энтропию на один нуклон, от которой они обе зависят), задать уравнение состояния в виде

$$K = \left(\frac{45\hbar^3}{\overline{m}^4 \pi^2 \beta^4} \right)^{1/3}. \tag{11.5.6}$$

Тогда, согласно уравнению (11.3.17) и данным табл. 11.1, масса политропы с $\gamma = {}^4/_3$ равняется

$$M = 4\pi\,(2{,}01824) \left(\frac{K}{\pi G} \right)^{3/2}. \tag{11.5.7}$$

Используя (11.5.6.), получаем

$$M = \frac{12\sqrt{5}}{\pi^{3/2}} (2{,}01824) \frac{\hbar^{3/2}}{\overline{m}^2 G^{3/2} \beta^2} = 18 M_\odot \left(\frac{m_{\text{н}}}{\overline{m}} \right)^2 \beta^{-2}. \tag{11.5.8}$$

Для ионизованного водорода при температуре в интервале 10^5 — 10^{10} К масса $\overline{m}$ есть среднее между массами протона и электрона, что составляет $\overline{m} \approx m_{\text{п}}/2$. Таким образом, в этом случае, условие, при котором давление излучения превышает давление вещества, скажем, в 10 раз, выглядит так: $M \gtrsim 7200 M_\odot$. Никаких подобных сверхмассивных звезд с достоверностью не наблюдали, но их рассматривают как возможные источники лучистой энергии при гравитационном коллапсе [30, 31].

Строение сверхмассивных звезд полностью определяется уравнениями для ньютоновской политропы с $\gamma \approx {}^4/_3$. В частности, уравнение (11.3.16) приводит к следующему радиусу для таких звезд:

$$R = 6{,}89685 \left(\frac{K}{\pi G} \right)^{1/2} \rho\,(0)^{-1/3}.$$

Подставляя сюда (11.5.6), получаем

$$R = 6{,}89685 \left(\frac{45}{\pi^5} \right)^{1/6} \frac{\hbar^{1/2}}{\overline{m}^{2/3} G^{1/2} \beta^{2/3}} \rho\,(0)^{-1/3}. \tag{11.5.9}$$

Этот радиус ограничивается нашим предположением, что энергия массы покоя звезды много больше, чем ее энергия излучения, и уж, конечно, больше, чем тепловая энергия ее вещества.

Это условие имеет вид

$$\frac{\pi^2 (kT)^4}{15\hbar^3} \ll \rho$$

или, подставляя сюда (11.5.3) и (11.5.6), получаем

$$\rho \ll \frac{\pi^2}{1215} \frac{\beta^4 \bar{m}^4}{\hbar^3}. \qquad (11.5.10)$$

Плотность ρ максимальна в центре, поэтому можно считать, что это условие наложено на $\rho(0)$. Используя (11.5.8) и (11.5.9), чтобы представить β и $\rho(0)$ через M и R, условие (11.5.10) записываем в виде

$$\frac{MG}{R} \ll \frac{4}{3}\left(\frac{2{,}01824}{6{,}89685}\right) = 0{,}39. \qquad (11.5.11)$$

Это эквивалентно утверждению, что гравитационный потенциал мал, которое также делалось. При $M = 10^4 M_\odot$ выражение (11.5.11) требует, чтобы выполнялось условие $R \gg 4 \cdot 10^4$ км.

Хотя нет необходимости использовать общую теорию относительности для того, чтобы понять строение таких сверхмассивных звезд, она необходима, чтобы решить вопрос о стабильности. Политропа с $\gamma = {}^4/_3$ колеблется между состояниями стабильности и нестабильности, а потому необходимо принимать во внимание малые эффекты давления вещества и эффекты общей теории относительности, которые не играют существенной роли при расчетах структуры.

Используем теорему 1 из § 2 гл. 11, которая утверждает, что переход от состояния стабильности к нестабильности происходит при значении $\rho(0)$, для которого внутренняя энергия E стационарна. Чтобы вычислить E, воспользуемся выражениями (11.1.29) — (11.1.31), которые в первом порядке по GM/R дают следующий результат:

$$E \approx \int_0^R 4\pi r^2 e(r)\, dr + \int_0^R 4\pi G r \mathscr{M}(r)\, e(r)\, dr -$$

$$- \int_0^R 4\pi G r \mathscr{M}(r)\, dr - \int_0^R 6\pi G^2 \mathscr{M}^2(r)\, \rho(r)\, dr. \qquad (11.5.12)$$

Тогда плотность внутренней энергии e равна

$$e = \frac{\pi^2}{15} \frac{(kT)^4}{\hbar^3} + \frac{1}{\Gamma - 1} \frac{\rho k T}{\bar{m}} = 3 p_{\text{изл}} \left[1 + \frac{\beta}{3(\Gamma - 1)}\right],$$

где Γ — отношение теплоемкостей вещества. (Для ионизованного водорода $\Gamma = {}^5/_3$.) Для полного давления имеем

$$p = p_{\text{изл}} + p_{\text{вещ}} = p_{\text{изл}}(1 + \beta).$$

Следовательно, в первом порядке по малому параметру β отношение плотности энергии к давлению составляет

$$e \approx 3p\left[1-\frac{(3\Gamma-4)}{3(1-1)}\beta+O(\beta^2)\right]. \qquad (11.5.13)$$

Во втором слагаемом в (11.5.12) малой поправкой порядка β можно пренебречь, поскольку она уже меньше первого слагаемого из-за коэффициента порядка GM/R, но эту поправку надо учесть в большом первом члене, следовательно,

$$E \approx \left[1-\frac{(3\Gamma-4)}{3(\Gamma-1)}\beta\right]\int_0^R 12\pi r^2 p(r)\,dr+\int_0^R 12\pi G r\mathscr{M}(r)\,p(r)\,dr-$$
$$-\int_0^R 4\pi G r\mathscr{M}(r)\,dr-\int_0^R 6\pi G^2\mathscr{M}^2(r)\,\rho(r)\,dr-\ldots. \qquad (11.5.14)$$

Этот интеграл можно переписать, интегрируя по частям, следующим образом:

$$\int_0^R 12\pi r^2 p(r)\,dr=\int_0^R p(r)\,d(4\pi r^3)=-\int_0^R 4\pi r^3 p'(r)\,dr.$$

Для того чтобы вычислить $p'(r)$, разложим фундаментальное уравнение (11.1.13) по GM/R, удержав лишь первый порядок:

$$-r^2p'(r)\approx G\mathscr{M}(r)\,\rho(r)\left[1+\frac{p(r)}{\rho(r)}+\frac{4\pi r^3 p(r)}{\mathscr{M}(r)}+\frac{2G\mathscr{M}(r)}{r}\right],$$

так что

$$\int_0^R 12\pi r^2 p(r)\,dr\approx\int_0^R 4\pi G r\mathscr{M}(r)\,\rho(r)\,dr+\int_0^R 4\pi G r\mathscr{M}(r)\,p(r)\,dr+$$
$$+\int_0^R 16\pi^2 G r^4\rho(r)\,p(r)\,dr+\int_0^R 8\pi G^2\rho(r)\,\mathscr{M}^2(r)\,dr.$$

Поправку, содержащую β, надо удержать только в первом члене, который больше, чем другие, в R/MG раз. Таким образом, в первом порядке по β и GM/R выражение (11.5.14) принимает вид

$$E\approx-\frac{(3\Gamma-4)}{3(\Gamma-1)}\beta\int_0^R 4\pi G r\mathscr{M}(r)\,\rho(r)\,dr+\int_0^R 16\pi G r\mathscr{M}(r)\,p(r)\,dr+$$
$$+\int_0^R 16\pi^2 G r^4\rho(r)\,p(r)\,dr+\int_0^R 2\pi G^2\mathscr{M}^2(r)\,\rho(r)\,dr. \qquad (11.5.15)$$

Теперь каждый член мал, а потому их все можно вычислить, используя значения ρ, p и $\mathscr{M}$, полученные путем решения ньюто-

новского уравнения для ньютоновской политропы $\gamma = {}^4/_3$, т. е.

$$-r^2 p'(r) \approx G\mathscr{M}(r)\,\rho(r).$$

В частности, первый интеграл выражения (11.5.15) превращается при $\gamma = {}^4/_3$ в выражение (11.3.24), а именно

$$\int_0^R 4\pi G r \mathscr{M}(r)\,\rho(r)\,dr = -V = \frac{3GM^2}{2R}.$$

Третий член в (11.5.15) переписываем, интегрируя по частям следующим образом:

$$\int_0^R 16\pi^2 G r^4 \rho(r)\,p(r)\,dr = \int_0^R 4\pi r^2 p(r)\,d\mathscr{M}(r) =$$

$$= -\int_0^R 4\pi G r^2 p'(r)\,\mathscr{M}(r)\,dr - \int_0^R 8\pi G r p(r)\,\mathscr{M}(r)\,dr =$$

$$= \int_0^R 4\pi G^2 \mathscr{M}^2(r)\,\rho(r)\,dr - \int_0^R 8\pi G r p(r)\,\mathscr{M}(r)\,dr.$$

В результате этих действий выражение (11.5.15) принимает вид

$$E \approx -\frac{(3\Gamma-4)}{2(\Gamma-1)}\beta\frac{GM^2}{R} + \int_0^R 8\pi G r \mathscr{M}(r)\,p(r)\,dr + \int_0^R 6\pi G^2 \mathscr{M}^2(r)\,\rho(r)\,dr.$$

Последние два интеграла можно вычислить с помощью функции Лейна — Эмде $\theta(\xi)$ при $\gamma = {}^4/_3$:

$$\int_0^R 6\pi G^2 \mathscr{M}(r)\,\rho(r)\,dr = \frac{6K^{7/2}\rho(0)^{2/3}}{\pi^{5/2}G^{3/2}}\int_0^{\xi_1} \xi^4\theta'^2(\xi)\,\theta^3(\xi)\,d\xi,$$

$$\int_0^R 8\pi G \mathscr{M}(r)\,p(r)\,r\,dr = \frac{8K^{7/2}\rho(0)^{2/3}}{\pi^{3/2}G^{3/2}}\int_0^{\xi_1} \xi^3\,|\theta'(\xi)|\,\theta^4(\xi)\,d\xi,$$

в то время как K и $\rho(0)$ можно выразить через M и R подстановкой (11.3.16) и (11.3.17), приводящей к соотношению

$$\frac{K^{7/2}\rho(0)^{2/3}}{G^{3/2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{64\xi_1^4\,|\theta'(\xi_1)|^3}\,\frac{GM^2}{R}.$$

Численное интегрирование дает [32] значение

$$\frac{1}{8\pi\xi_1^4\,|\theta'(\xi_1)|^3}\left\{\int_0^{\xi_1} \xi^3\,|\theta'(\xi)|\,\theta^4(\xi)\,d\xi + \frac{3}{4\pi}\int_0^{\xi_1} \xi^4\theta'^2(\xi)\,\theta^3(\xi)\,d\xi\right\} = 5{,}1.$$

Далее, собирая все это вместе, получаем окончательный ответ:

$$E \approx -\frac{(3\Gamma-4)}{2(\Gamma-1)}\beta\frac{GM^2}{R}+5{,}1\frac{G^2M^3}{R^2}. \qquad (11.5.16)$$

Когда R так велико, что общей теорией относительности можно пренебречь, то в этом случае звезда ведет себя как ньютоновская политропа с γ, равной

$$\gamma \equiv 1+\frac{p}{e} \approx \frac{4}{3}+\frac{(3\Gamma-4)}{9(\Gamma-1)}\beta > \frac{4}{3},$$

и действительно является стабильной [см. выражение (11.5.13)]. Переход от стабильного состояния к нестабильному происходит, когда R уменьшается до значения, при котором

$$\frac{\partial E}{\partial R}=\frac{\partial E}{\partial \rho(0)}\frac{\partial \rho(0)}{\partial R}=0.$$

Производная должна быть взята при постоянном значении энтропии, приходящейся на один нуклон и, следовательно, при фиксированных в данном случае β и M [см. выражения (11.5.6) и (11.5.7)]. Таким образом, *минимальный* радиус, при котором звезда стабильна, равен

$$R_{\text{мин}}=\frac{20{,}4(\Gamma-1)}{(3\Gamma-4)}\frac{GM}{\beta}. \qquad (11.5.17)$$

Максимальная энергия, которая может освободиться, когда звезда медленно сжимается (за счет излучения ее поверхности) до минимального стабильного радиуса,

$$-E(R_{\text{мин}})=\frac{(3\Gamma-4)^2\beta^2M}{81{,}6(\Gamma-1)^2}. \qquad (11.5.18)$$

Например, звезда с $\beta=0{,}1$ будет иметь массу $M \approx 7200M_\odot$; если $\Gamma={}^5/_3$, то минимальный радиус звезды равен $1{,}45\cdot10^6$ км и доля ее массы покоя, которая может освободиться при сжатии, составляет 0,03%. Максимальное значение поверхностного потенциала MG/R для $\Gamma={}^5/_3$ равно $0{,}0735\beta$, как и следует из условия (11.5.11).

§ 6. Звезды с однородной плотностью

Общая теория относительности находит интересное применение к другому классу стабильных звезд, состоящих из несжимаемой жидкости, уравнение состояния которой

$$\rho = \text{const}. \qquad (11.6.1)$$

Такие звезды представляют интерес не в связи с наблюдениями (в действительности таких звезд нет), а потому, что они имеют достаточно простое строение, позволяющее точно решить уравнения Эйнштейна [33], а также потому, что они позволяют