Далее, собирая все это вместе, получаем окончательный ответ:

$$E \approx -\frac{(3\Gamma-4)}{2(\Gamma-1)}\beta\frac{GM^2}{R}+5{,}1\frac{G^2M^3}{R^2}. \qquad (11.5.16)$$

Когда R так велико, что общей теорией относительности можно пренебречь, то в этом случае звезда ведет себя как ньютоновская политропа с γ, равной

$$\gamma \equiv 1+\frac{p}{e}\approx\frac{4}{3}+\frac{(3\Gamma-4)}{9(\Gamma-1)}\beta>\frac{4}{3},$$

и действительно является стабильной [см. выражение (11.5.13)]. Переход от стабильного состояния к нестабильному происходит, когда R уменьшается до значения, при котором

$$\frac{\partial E}{\partial R}=\frac{\partial E}{\partial\rho(0)}\frac{\partial\rho(0)}{\partial R}=0.$$

Производная должна быть взята при постоянном значении энтропии, приходящейся на один нуклон и, следовательно, при фиксированных в данном случае β и M [см. выражения (11.5.6) и (11.5.7)]. Таким образом, *минимальный* радиус, при котором звезда стабильна, равен

$$R_{\text{мин}}=\frac{20{,}4(\Gamma-1)}{(3\Gamma-4)}\frac{GM}{\beta}. \qquad (11.5.17)$$

Максимальная энергия, которая может освободиться, когда звезда медленно сжимается (за счет излучения ее поверхности) до минимального стабильного радиуса,

$$-E(R_{\text{мин}})=\frac{(3\Gamma-4)^2\beta^2M}{81{,}6(\Gamma-1)^2}. \qquad (11.5.18)$$

Например, звезда с $\beta=0{,}1$ будет иметь массу $M\approx 7200M_\odot$; если $\Gamma={}^5/_3$, то минимальный радиус звезды равен $1{,}45\cdot 10^6$ км и доля ее массы покоя, которая может освободиться при сжатии, составляет 0,03%. Максимальное значение поверхностного потенциала MG/R для $\Gamma={}^5/_3$ равно $0{,}0735\beta$, как и следует из условия (11.5.11).

§ 6. Звезды с однородной плотностью

Общая теория относительности находит интересное применение к другому классу стабильных звезд, состоящих из несжимаемой жидкости, уравнение состояния которой

$$\rho=\text{const}. \qquad (11.6.1)$$

Такие звезды представляют интерес не в связи с наблюдениями (в действительности таких звезд нет), а потому, что они имеют достаточно простое строение, позволяющее точно решить уравнения Эйнштейна [33], а также потому, что они позволяют найти верхний предел для гравитационного красного смещения спектральных линий, излучаемых поверхностью звезды любого типа [34, 35].

При постоянном ρ фундаментальное уравнение (11.1.13) можно переписать в виде

$$\frac{-p'(r)}{[\rho+p(r)][(\rho/3)+p(r)]}=4\pi Gr\left[1-\frac{8\pi G\rho r^2}{3}\right]^{-1}. \qquad (11.6.2)$$

Тогда давление должно определяться интегрированием по объему внутри поверхности, на которой $p=0$, а не по объему, лежащему вне этой поверхности, как делается при рассмотрении более реалистических моделей. Это приводит к выражению

$$\frac{p(r)+\rho}{3p(r)+\rho}=\left[\frac{1-8\pi G\rho R^2/3}{1-8\pi G\rho r^2/3}\right]^{1/2}.$$

Решая последнее выражение относительно $p(r)$ и выражая ρ через массу звезды

$$\rho=\frac{3M}{4\pi R^3} \quad \text{для} \quad r<R, \qquad (11.6.3)$$

находим

$$p(r)=\frac{3M}{4\pi R^3}\left\{\frac{[1-(2MG/R)]^{1/2}-[1-(2MGr^2/R^3)]^{1/2}}{[1-(2MGr^2/R^3)]^{1/2}-3[1-(2MG/R)]^{1/2}}\right\}. \qquad (11.6.4)$$

Метрическая компонента $A(r)$ сразу определяется с помощью выражения (11.1.11):

$$A(r)=\left[\frac{1-2MGr^2}{R^3}\right]^{-1}, \qquad (11.6.5)$$

в то время как $B(r)$ можно вычислить подстановкой (11.6.4) в интеграл (11.1.16), что приводит к результату

$$B(r)=\frac{1}{4}\left[3\left(1-\frac{2MG}{R}\right)^{1/2}-\left(1-\frac{2MGr^2}{R^3}\right)^{1/2}\right]^2. \qquad (11.6.6)$$

Наиболее интересная особенность этого решения состоит в том, что оно не имеет смысла для всех значений M и R. Давление, задаваемое выражением (11.6.4), становится бесконечным при $r=r_\infty$, соответствующем

$$r_\infty^2=9R^2-\frac{4R^3}{MG}. \qquad (11.6.7)$$

[Метрика также становится сингулярной при значении $r=r_\infty$, поскольку $B(r_\infty)$ равно нулю.] Но давление есть скаляр, а потому сингулярность в $p(r)$ нельзя отнести за счет неразумного выбора системы координат. Мы должны считать, что $p(r)$ не сингулярно при любом реальном r, а единственный путь обеспечить это — ввести отрицательные r_∞^2, т. е. допустить неравенство

$$\frac{MG}{R}<\frac{4}{9}. \qquad (11.6.8)$$

Заметим, что радиус Шварцшильда $2MG$ в этом случае меньше, чем $^8/_9$ действительного радиуса R; поэтому нет никакой сингулярности ни во внешнем решении (11.1.17), ни во внутреннем решении (11.6.5), (11.6.6).

Это не первый случай, когда мы устанавливаем верхнюю границу абсолютного значения MG/R гравитационного потенциала звезды. В § 4 гл. 11 мы видели, что для стабильной нейтронной звезды, рассматриваемой как идеальный газ, MG/R никогда не превышает отношения 0,36/3,2, т. е. 0,11 [см. выражения (11.4.15) и (11.4.16)]. Существует ли тогда абсолютная верхняя граница для MG/R, накладываемая структурой уравнений Эйнштейна вне зависимости от уравнения состояния?

Чтобы сформулировать этот вопрос как математическую задачу, будем считать, что ρ — произвольная конечная положительная функция, отвечающая лишь следующим общим требованиям:

А. Задан радиус R, так что

$$\rho(r) = 0 \quad \text{при} \quad r > R. \tag{11.6.9}$$

Б. Задана масса M из условия

$$\int_0^R 4\pi r^2 \rho(r)\, dr = M. \tag{11.6.10}$$

В. Метрический коэффициент $A(r)$, заданный (11.1.11), не должен быть сингулярным, а потому

$$\mathcal{M}(r) < \frac{r}{2G}, \tag{11.6.11}$$

где

$$\mathcal{M}(r) \equiv \int_0^r 4\pi r'^2 \rho(r')\, dr'.$$

Г. Плотность $\rho(r)$ не должна возрастать к поверхности:

$$\rho'(r) \leqslant 0. \tag{11.6.12}$$

(Действительно, трудно представить, чтобы жидкая сфера с плотностью, большей у поверхности, чем в центре, могла быть стабильной.) Выбирая функцию $\rho(r)$ согласно этим условиям, мы можем вычислить $A(r)$ с помощью выражения (11.1.11); $p(r)$ можно определить, интегрируя уравнение (11.1.13) по объему, находящемуся внутри рассматриваемой поверхности [с граничным условием $p(R) = 0$]; затем мы можем вычислить $B(r)$ с помощью выражения (11.1.16). Условие (11.6.11) гарантирует, что $A(r)$ — хорошая функция, а поскольку $p(r)$ конечно, выражение (11.1.13) будет давать $p(r) \geqslant 0$, а выражение (11.1.16) будет приводить к конечным, положительно определенным $B(r)$. Таким образом, любые абсолютные ограничения на задаваемую нами функцию $\rho(r)$ (так же, как и на верхнюю границу MG/R) могут вытекать лишь из того условия, что уравнение (11.1.13) должно приводить к конечному решению для давления $p(r)$.

Это условие мы будем использовать довольно косвенным образом, обращаясь к метрическому коэффициенту $B(r)$, а не к самому значению $p(r)$. Сначала получим уравнение, позволяющее вычислить $B(r)$ при заданной плотности $\rho(r)$, не находя предварительно решения для $p(r)$; из (11.1.5) и (11.1.7) следует, что

$$3R_{rr}B+R_{tt}A=B''-\frac{B'}{2}\left(\frac{A'}{A}+\frac{B'}{B}\right)-\frac{3BA'}{rA}-\frac{B'}{r}=-16\pi G\rho AB$$

или

$$B''-\frac{B'}{2}\left(\frac{A'}{A}+\frac{B'}{B}+\frac{2}{r}\right)=\frac{B}{rA}\left[3A'-16\pi G\rho rA^2\right].$$

Это уравнение можно линеаризовать с помощью подстановки

$$B\equiv\zeta^2. \tag{11.6.13}$$

Привлекая уравнение (11.1.11) для $A(r)$ и несколько переустраивая его, находим

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\left(1-\frac{2G\mathcal{M}(r)}{r}\right)^{1/2}\frac{d\zeta(r)}{dr}\right]=G\left(1-\frac{2G\mathcal{M}(r)}{r}\right)^{-1/2}\left(\frac{\mathcal{M}(r)}{r^3}\right)'\zeta(r). \tag{11.6.14}$$

Начальные условия при $r=R$ могут быть определены прямо из выражения (11.1.16) или из того условия, чтобы $B(r)$ гладко сшивалось с внешним решением (11.1.17). В любом случае приходим к результатам

$$\zeta(R)=\left[1-\frac{2MG}{R}\right]^{1/2}, \tag{11.6.15}$$

$$\zeta'(R)=\frac{MG}{R^2}\left[1-\frac{2MG}{R}\right]^{-1/2} \tag{11.6.16}$$

Решение для $\zeta(r)$ должно быть *положительным*, поскольку $\zeta(r)$ могло бы быть отрицательным только в том случае, если бы оно проходило через нуль, где исчезало B, а согласно выражению (11.1.16) B может равняться нулю только в том случае, когда давление $p(r)$ имеет сингулярность.

Получим теперь верхнюю границу $\zeta(0)$. Если ζ положительно, тогда правая часть (11.6.14) отрицательна, потому что $3\mathcal{M}(r)/4\pi r^3$ есть средняя плотность внутри сферы радиуса r, а средняя плотность не может увеличиваться с ростом r, если не возрастает сама плотность. Таким образом, (11.6.14) приводит к условию

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\left(1-\frac{2G\mathcal{M}(r)}{r}\right)^{1/2}\frac{d\zeta(r)}{dr}\right]\leqslant 0,$$

причем равенство достигается только при однородной плотности. Интегрируя это неравенство от r до R и подставляя (11.6.16), получаем

$$\zeta'(r) \geqslant \frac{MGr}{R^3}\left(1 - \frac{2G\mathscr{M}(r)}{r}\right)^{-1/2}.$$

Интегрируя еще раз от 0 до R и подставляя (11.6.15), находим

$$\zeta(0) \leqslant \left[1 - \frac{2MG}{R}\right]^{1/2} - \frac{MG}{R^3}\int_0^R \frac{r\,dr}{[1 - (2G\mathscr{M}(r)/r)]^{1/2}}.$$

Правая часть принимает наибольшие значения, когда $\mathscr{M}(r)$, насколько это возможно, мало. При заданной массе M и радиусе R плотность распределения с $\rho'(r) \leqslant 0$, приводящая к $M(r)$, которое во всем объеме принимает свое минимальное значение $\rho(r)$, является постоянной; в этом случае имеем

$$\mathscr{M}(r) = \frac{Mr^3}{R^3}.$$

Подставляя это выражение под интеграл, преобразуем последнее неравенство к виду

$$\zeta(0) \leqslant \frac{3}{2}\left[1 - \frac{2MG}{R}\right]^{1/2} - \frac{1}{2}. \qquad (11.6.17)$$

Мы уже отмечали, что $\zeta(r)$ должно быть положительно определенным, следовательно, (11.6.17) предполагает неравенство

$$\frac{MG}{R} < \frac{4}{9}. \qquad (11.6.18)$$

Это как раз верхний предел, найденный ранее для звезд с однородной плотностью, но теперь мы знаем, что (11.6.18) справедливо для всех звезд, однородных и неоднородных.

Можно также доказать, что при данной массе и данном радиусе стабильные звезды с наименьшими значениями давления в центре — это те, что имеют однородную плотность. Следовательно, давление в центре любой звезды не должно быть меньше значения, получаемого из выражения (11.6.4) при $r = 0$, т. е.

$$p(0) \geqslant \frac{3M}{4\pi R^3}\left\{\frac{[1 - (2MG/R)]^{1/2} - 1}{1 - 3[1 - (2MG/R)]^{1/2}}\right\}. \qquad (11.6.19)$$

Это опять указывает на то, что MG/R никогда не может равняться запрещенному значению $^4/_9$.

Этот результат можно сразу превратить в ограничение на величину красного смещения спектральных линий, излучаемых поверхностью любого типа звезды. Согласно выражениям (3.5.3), (11.1.1) и (11.1.17), имеем

$$z \equiv \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = B^{-1/2}(R) - 1 = \left(1 - \frac{2MG}{R}\right)^{-1/2} - 1.$$

Условие (11.6.18) накладывает на z верхнее граничное условие

$$z < 2. \tag{11.6.20}$$

И действительно, имеется множество квазизвездных радиоисточников (гл. 14), спектральные линии которых имеют красное смещение, близкое к величине 1,95! Однако мы не будем делать поспешного заключения, что такое красное смещение с необходимостью вызывается сильными гравитационными полями, поскольку красное смещение, близкое к $z = 2$, требует, чтобы звезда состояла из почти несжимаемой жидкости, т. е. характеризовалась очень малыми значениями $\partial\rho/\partial p$. Последнее представляется физически не обоснованным, поскольку нежелательно, чтобы скорость звука $(\partial p/\partial\rho)^{1/2}$ превышала скорость света [34]. Бонди [34] показал (см., однако, [35—37]), что для стабильной звезды при условиях $(\partial p/\partial\rho) < 1$ и $p/\rho \leqslant {}^1/_3$ [а эти неравенства выполняются для частиц, которые взаимодействуют только электромагнитным образом и (или) путем локальных столкновений; см. § 10 гл. 2] красное смещение спектральных линий, испускаемых ее поверхностью, ограничивается значением $z \leqslant 0{,}615$. В действительности же существуют квазизвездные объекты с величиной красного смещения $z > 2$, такие, как 4C25.5, для которого $z = 2{,}358$.

Однако нет никаких теорем, которые ограничивали бы красное смещение световых сигналов, выходящих *изнутри* статических сферически-симметричных тел [38] [1]). Например, световой сигнал, выходящий из центра прозрачной однородной звезды, имел бы, согласно выражениям (3.5.3), (11.1.1) и (11.6.6), красное смещение

$$1 + z = B^{-1/2}(0) = \frac{2}{3\left(1 - (2MG/R)\right)^{1/2} - 1}.$$

Когда MG/R приближается к максимальному значению ${}^4/_9$, такое красное смещение становится бесконечным. Хойл и Фаулер [41] предположили, что квазизвездный объект представляет собой скопление звезд, небольших, но плотных с красным смещением, связанным с процессами испускания и поглощения в горячем облаке газа, захваченном вблизи центра скопления. До сих пор не вполне ясно, связано ли красное смещение у квазизвездных объектов с их внутренним строением или с какой-нибудь другой причиной, такой, как космологическое разбегание далеких объектов, обсуждаемое в гл. 14.

---

[1]) Обсуждение устойчивости релятивистских газовых сфер и кластера точечных масс с произвольно большими центральными красными смещениями дано в [39, 40].