§ 7. Сферически-симметричные поля, зависящие от времени

Обратимся к проблемам динамики звезд. Начнем с того, что запишем метрику и тензор Риччи для сферически-симметричной системы. Сферическая симметрия требует, чтобы собственный временной интервал $d\tau^2$ зависел только от инвариантов группы вращений:

$$t,\ dt,\ r,\ \mathbf{x}\cdot d\mathbf{x} = r\,dr,\ d\mathbf{x}^2 = dr^2 + r^2\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2),$$

поэтому $d\tau^2$ можно записать в виде

$$d\tau^2 = C\,(r,\ t)\,dt^2 - D\,(r,\ t)\,dr^2 - 2E\,(r,\ t)\,dr\,dt - \\ -F\,(r,\ t)\,r^2\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2).$$

Можно избавиться от функции F, если ввести новую радиальную переменную

$$r' \equiv rF^{1/2}\,(r,\ t).$$

Тогда метрика сохранит свой вид, но вместо C, D и E возникнут новые функции C', D' и E', зависящие, конечно, не от r, а от r', и исчезнет F. Опустив штрихи, получим

$$d\tau^2 = C\,(r,\ t)\,dt^2 - D\,(r,\ t)\,dr^2 - 2E\,(r,\ t)\,dr\,dt - \\ -r^2\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2).$$

Теперь избавимся от E, введя новое время:

$$dt' = \eta\,(r,\ t)\,[C\,(r,\ t)\,dt - E\,(r,\ t)\,dr],$$

где η — интегрирующий множитель, который вводится так, чтобы правая часть стала полным дифференциалом, т. е. так, чтобы

$$\frac{\partial}{\partial r}\,[\eta\,(r,\ t)\,C\,(r,\ t)] = -\frac{\partial}{\partial t}\,[\eta\,(r,\ t)\,E\,(r,\ t)].$$

[Это уравнение может быть решено, если рассматривать его как задачу с начальными данными; задавая $\eta\,(r,\ t_0)$ для всех r, можем найти $\partial\eta\,(r,\ t)/\partial t$ при $t = t_0$, а затем определить $\eta\,(r,\ t_0 + dt)$ для всех r.] Собственное время тогда будет иметь вид

$$d\tau^2 = \eta^{-2}C^{-1}\,dt'^2 - (D + C^{-1}E^2)\,dr^2 - r^2\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2),$$

или, вводя новые функции A и B вместо $D + C^{-1}E^2$ и $\eta^{-2}C^{-1}$ и опуская штрих у t, переписываем это так:

$$d\tau^2 = B\,(r,\ t)\,dt^2 - A\,(r,\ t)\,dr^2 - r^2\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2). \qquad (11.7.1)$$

Таким образом, мы можем использовать метрику в ее привычной «стандартной» форме с единственной особенностью, а именно: A и B зависят как от r, так и от t.

Отличные от нуля элементы метрического тензора и его обратного тензора равны:

$$g_{rr}=A, \quad g_{\theta\theta}=r^2, \quad g_{\varphi\varphi}=r^2\sin^2\theta, \quad g_{tt}=-B,$$
$$g^{rr}=A^{-1}, \quad g^{\theta\theta}=r^{-2}, \quad g^{\varphi\varphi}=r^{-2}(\sin\theta)^{-2}, \quad g^{tt}=-B^{-1}. \quad (11.7.2)$$

Отсюда следует, что элементы аффинной связности, отличные от нуля, записываются так:

$$\begin{aligned}
&\Gamma^r_{rr}=\frac{A'}{2A}, && \Gamma^r_{\theta\theta}=-\frac{r}{A}, && \Gamma^r_{\varphi\varphi}=-\frac{r\sin^2\theta}{A},\\
&\Gamma^r_{tt}=\frac{B'}{2A}, && \Gamma^r_{rt}=\Gamma^r_{tr}=\frac{\dot A}{2A}, && \Gamma^\theta_{\theta r}=\Gamma^\theta_{r\theta}=\frac{1}{r},\\
&\Gamma^\theta_{\varphi\varphi}=-\sin\theta\cos\theta, && \Gamma^\varphi_{\varphi r}=\Gamma^\varphi_{r\varphi}=\frac{1}{r}, && \Gamma^\varphi_{\varphi\theta}=\Gamma^\varphi_{\theta\varphi}=\operatorname{ctg}\theta,\\
&\Gamma^t_{rr}=+\frac{\dot A}{2B}, && \Gamma^t_{tt}=\frac{\dot B}{2B}, && \Gamma^t_{tr}=\Gamma^t_{rt}=\frac{B'}{2B}.
\end{aligned} \quad (11.7.3)$$

(Штрих и точка теперь означают $\partial/\partial r$ и $\partial/\partial t$ соответственно.) Из уравнения (6.1.5) вытекает, что независимые компоненты тензора Риччи, отличные от нуля, имеют вид:

$$R_{rr}=\frac{B''}{2B}-\frac{B'^2}{4B^2}-\frac{A'B'}{4AB}-\frac{A'}{Ar}+\frac{\ddot A}{2B}-\frac{\dot A\dot B}{4B^2}-\frac{\dot A^2}{4AB}, \quad (11.7.4)$$

$$R_{\theta\theta}=-1+\frac{1}{A}-\frac{rA'}{2A^2}+\frac{rB'}{2AB}, \quad (11.7.5)$$

$$R_{tt}=-\frac{B''}{2A}+\frac{B'A'}{4A^2}-\frac{B'}{Ar}+\frac{B'^2}{4AB}+\frac{\ddot A}{2A}-\frac{\dot A^2}{4A^2}-\frac{\dot B\dot A}{4AB}, \quad (11.7.6)$$

$$R_{tr}=-\frac{\dot A}{Ar}. \quad (11.7.7)$$

Из сферической симметрии также следует, что метрика принимает значения

$$R_{\varphi\varphi}=\sin^2\theta R_{\theta\theta}, \quad (11.7.8)$$

$$R_{r\theta}=R_{r\varphi}=R_{\theta\varphi}=R_{\theta t}=R_{\varphi t}=0. \quad (11.7.9)$$

В качестве простого, но важного применения этих формул рассмотрим сферически-симметричное, но не обязательно статическое поле в *пустом пространстве*, когда уравнения поля имеют вид $R_{\mu\nu}=0$. Согласно (11.7.7), уравнение поля $R_{tr}=0$ утверждает лишь то, что A не зависит от времени:

$$\dot A=0.$$

Исследование выражений (11.7.4) — (11.7.6) показывает, что все временные производные в уравнениях поля сокращаются и последние оказываются совпадающими с уравнениями для статического

изотропного гравитационного поля в пустом пространстве [уравнения (8.1.13)]. Тогда можно повторить вывод § 2 гл. 8, а именно: обращение в нуль R_{rr} и R_{tt} приводит к соотношению

$$(AB)' = 0,$$

а равенство нулю $R_{\theta\theta}$ дает

$$\left(\frac{r}{A}\right)' = 1.$$

Так как A от времени не зависит, общее решение принимает вид

$$A = \left(1 - \frac{2MG}{r}\right)^{-1}, \qquad B = f(t)\left(1 - \frac{2MG}{r}\right),$$

где GM — *не зависящая от времени константа интегрирования*, а $f(t)$ — неизвестная функция t. Функция $f(t)$ может быть приравнена к единице, если ввести новую временную координату

$$t' = \int^{t} f^{1/2}(t)\, dt.$$

Теперь метрика совсем не зависит от времени и согласуется с решением Шварцшильда (8.2.12). Таким образом, мы доказали *теорему Биркгоффа* [43, 44] о том, что сферически-симметричное гравитационное поле в пустом пространстве должно быть статическим с метрикой, соответствующей решению Шварцшильда. Теорема Биркгоффа — аналог результата, полученного Ньютоном в его теории движения Луны и состоящего в том, что гравитационное поле вне сферически-симметричного тела ведет себя так, как если бы вся масса тела была сконцентрирована в его центре. Несколько удивительно, что этот вывод остается справедливым в общей теории относительности, как и в теории Ньютона, поскольку в общей теории относительности нестатическое тело должно было бы излучать гравитационные волны. Теорема же Биркгоффа утверждает, что хотя пульсирующее симметричное тело и может создавать нестатические гравитационные поля внутри объема, занимаемого его массой, но в окружающее пустое пространство гравитационное излучение выйти не может. В этом смысле теорема Биркгоффа аналогична хорошо известному выводу атомной теории о том, что фотон не может быть излучен в результате квантового перехода между двумя состояниями, имеющими нулевые спины.

Теорему Биркгоффа можно использовать не только при рассмотрении гравитационного поля вне тела, но также при рассмотрении поля *внутри* пустой сферической полости в центре сферически-симметричного (но не обязательно статического) тела. В этом случае метрика также задается решением Шварцшильда, но так как точка $r = 0$ теперь находится в пустом пространстве,

в ней не может возникнуть никакой сингулярности, а потому постоянная интегрирования MG должна равняться нулю. Таким образом, теорема Биркгоффа имеет следствие, состоящее в том, что *метрика в пустой сферической полости в центре сферически-симметричной системы должна быть эквивалентна метрике плоского пространства Минковского* $\eta_{\mu\nu}$. Это следствие — аналог другого знаменитого вывода теории Ньютона о том, что гравитационное поле сферической оболочки равно нулю внутри нее. Однако звезды обычно не имеют полостей в центре, и это следствие не принесет нам большой пользы в данной главе. Его важность определяется тем обстоятельством, что теорема Биркгоффа — локальная теорема, не зависящая от условий, налагаемых на метрику при $r \to \infty$ (кроме сферической симметрии), так что пространство должно быть плоским в сферической полости в центре сферически-симметричной системы даже в том случае, если система бесконечна, и в действительности даже тогда, когда рассматриваемая система — это вся Вселенная. В § 1 гл. 15 мы увидим, что это следствие теоремы Биркгоффа оправдывает предельные рассмотрения космологических проблем с помощью ньютоновской механики.

§ 8. Сопутствующие координаты

В качестве следующего шага на пути подготовки к рассмотрению гравитационного коллапса и космологических проблем в гл. 14 введем очень полезные координаты — *сопутствующую систему координат* [45]. Она обладает свойством более естественного разделения пространства и времени, чем разделение в стандартных координатах, использованных в предыдущем параграфе.

Рассмотрим конечную область пространства, заполненную плотным облаком свободно падающих частиц. Предположим, что каждой частице придаются малые часы и фиксированный набор осей пространственных координат, которые могут быть определены как координаты x^i частицы в некоторой произвольной системе, когда ее собственные часы показывают время $t = 0$. (Правила установки различных часов обсуждаются ниже.) Пространственно-временные координаты $\mathbf{x}$, t любого события определяются рассмотрением $\mathbf{x}$ как пространственного аргумента частицы, задаваемого в том месте и в тот момент, где и когда происходит событие, а время t рассматривается как совпадающее с тем, что показывают часы частицы. Можно себе это представить в виде координатной сетки, движущейся вместе с облаком частиц, причем время определяется по часам, закрепленным в узлах этой сетки. Такую систему координат целесообразно вводить во всей области, занимаемой облаком частиц для любых интервалов времени, за которые траектории частиц не пересекаются.