в ней не может возникнуть никакой сингулярности, а потому постоянная интегрирования MG должна равняться нулю. Таким образом, теорема Биркгоффа имеет следствие, состоящее в том, что *метрика в пустой сферической полости в центре сферически-симметричной системы должна быть эквивалентна метрике плоского пространства Минковского* $\eta_{\mu\nu}$. Это следствие — аналог другого знаменитого вывода теории Ньютона о том, что гравитационное поле сферической оболочки равно нулю внутри нее. Однако звезды обычно не имеют полостей в центре, и это следствие не принесет нам большой пользы в данной главе. Его важность определяется тем обстоятельством, что теорема Биркгоффа — локальная теорема, не зависящая от условий, налагаемых на метрику при $r \to \infty$ (кроме сферической симметрии), так что пространство должно быть плоским в сферической полости в центре сферически-симметричной системы даже в том случае, если система бесконечна, и в действительности даже тогда, когда рассматриваемая система — это вся Вселенная. В § 1 гл. 15 мы увидим, что это следствие теоремы Биркгоффа оправдывает предельные рассмотрения космологических проблем с помощью ньютоновской механики.

§ 8. Сопутствующие координаты

В качестве следующего шага на пути подготовки к рассмотрению гравитационного коллапса и космологических проблем в гл. 14 введем очень полезные координаты — *сопутствующую систему координат* [45]. Она обладает свойством более естественного разделения пространства и времени, чем разделение в стандартных координатах, использованных в предыдущем параграфе.

Рассмотрим конечную область пространства, заполненную плотным облаком свободно падающих частиц. Предположим, что каждой частице придаются малые часы и фиксированный набор осей пространственных координат, которые могут быть определены как координаты x^i частицы в некоторой произвольной системе, когда ее собственные часы показывают время $t = 0$. (Правила установки различных часов обсуждаются ниже.) Пространственно-временные координаты $\mathbf{x}$, t любого события определяются рассмотрением $\mathbf{x}$ как пространственного аргумента частицы, задаваемого в том месте и в тот момент, где и когда происходит событие, а время t рассматривается как совпадающее с тем, что показывают часы частицы. Можно себе это представить в виде координатной сетки, движущейся вместе с облаком частиц, причем время определяется по часам, закрепленным в узлах этой сетки. Такую систему координат целесообразно вводить во всей области, занимаемой облаком частиц для любых интервалов времени, за которые траектории частиц не пересекаются.

В сопутствующих координатах метрика $g_{\mu\nu}$ имеет некоторые весьма простые свойства. Прежде всего заметим, что часы в этом случае находятся в состоянии свободного падения и показывают, следовательно, собственное время. Поэтому интервал собственного времени между двумя точками $\mathbf{x}$, t и $\mathbf{x}$, $t + dt$ на траектории данной частицы равен просто dt, т. е.

$$d\tau^2 = -g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu = -g_{tt}\, dt^2,$$

и, следовательно,

$$g_{tt} = -1. \tag{11.8.1}$$

Заметим далее, что траектория частицы $\mathbf{x} = \text{const}$, $t = \tau$ удовлетворяет уравнению, описывающему свободное падение, а именно

$$\frac{d^2x^i}{d\tau^2} + \Gamma^i_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} = \Gamma^i_{tt} = 0.$$

Подставляя сюда (11.8.1), получаем

$$g^{ij}\frac{\partial g_{jt}}{\partial t} = 0,$$

или, поскольку g^{ij}, вообще говоря, является несингулярной матрицей, имеем

$$\frac{\partial g_{jt}}{\partial t} = 0. \tag{11.8.2}$$

Оставался открытым вопрос о часах, придаваемых различным частицам. Предположим, что мы переставляем часы, совершая преобразование:

$$t' = t + f(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x}' = \mathbf{x}. \tag{11.8.3}$$

Тогда новая метрика будет состоять из элементов

$$g'_{tt} = -1, \tag{11.8.4}$$

$$g'_{ti} = g_{ti} + \frac{\partial f}{dx^i}, \tag{11.8.5}$$

$$g'_{ij} = g_{ij} - g_{ti}\frac{\partial f}{\partial x^j} - g_{tj}\frac{\partial f}{\partial x^i} - \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j}. \tag{11.8.6}$$

Возникает большое упрощение, если функцию f можно выбрать так, что два члена в соотношении (11.8.5) сокращаются, приводя к условию $g'_{it} = 0$. Существуют два важных случая, когда это действительно возможно:

А. Предположим, что мы устанавливаем все часы так, что время $t = 0$ соответствует моменту, когда все частицы находятся в покое. Этому предположению можно придать абсолютный физический смысл, если считать, что для каждой частицы P

при $t = 0$ можно найти локально-инерциальную систему координат x^μ, в которой частица P отделена от всех соседних частиц чисто пространственными интервалами, т. е.

$$\left(\frac{\partial \tilde{x}^0}{\partial x^i}\right)_{t=0,\ \mathbf{x}=\mathbf{x}_p} = 0.$$

Смещение частицы P за интервал времени dt имеет чисто временной характер:

$$\left(\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial t}\right)_{t=0,\ \mathbf{x}=\mathbf{x}_p} = 0.$$

В этой локально-инерциальной системе метрика совпадает с метрикой Минковского $\eta_{\mu\nu}$, а потому пространственно-временные компоненты метрики в сопутствующей системе при $t = 0$ обращаются в нуль:

$$g_{ti}(\mathbf{x}_p, 0) = \left[\eta_{\mu\nu}\frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^i}\frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial t}\right]_{t=0,\ \mathbf{x}=\mathbf{x}_p} = 0.$$

Вместе с (11.8.2) это приводит к тому, что g_{ti} исчезают везде, так что метрика приобретает вид

$$d\tau^2 = dt^2 - g_{ij}(\mathbf{x}, t)\, dx^i\, dx^j. \qquad (11.8.7)$$

Б. Если метрика явно сферически-симметричная, то интервал должен описываться общей формулой, с которой мы начинали предыдущий параграф, т. е.

$$d\tau^2 = C(r, t)\, dt^2 - D(r, t)\, dr^2 - 2E(r, t)\, dr\, dt - \\ - F(r, t)\, r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2).$$

Единственная неисчезающая пространственно-временная компонента g_{tj} здесь — это $g_{tr} = 2E$, и (11.8.2) говорит нам тогда, что E не зависит от времени, а потому

$$g_{tr} = 2E(r), \qquad g_{t\theta} = g_{t\varphi} = 0.$$

Можно далее исключить компоненту g_{tj}, изменяя показания часов с помощью преобразования (11.8.3), где

$$f = -2\int^r E(r)\, dr.$$

Используя (11.8.4) и опуская штрихи, переписываем метрику в виде

$$d\tau^2 = dt^2 - U(r, t)\, dr^2 - V(r, t)(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2). \qquad (11.8.8)$$

Здесь U и V — новые неизвестные функции, введенные вместо D и F.

Конечно, можно построить системы координат такого типа даже в том случае, когда облако свободно падающих частиц

только воображаемое. В дифференциальной геометрии системы координат, удовлетворяющие (11.8.1) и (11.8.2), называют *гауссовыми*, а когда $g_{ti} = 0$ и интервал принимает форму (11.8.7), координаты называют *гауссовыми нормальными*. Такие системы отсчета находят наиболее важные применения при рассмотрении свободно падающей жидкости. В этом случае 4-вектор скорости жидкости имеет по определению нулевую пространственную компоненту

$$U^i = 0, \tag{11.8.9}$$

а поскольку U^μ нормирован так, что

$$g_{\mu\nu}U^\mu U^\nu = -1 \tag{11.8.10}$$

[выражение (5.4.4)], временная компонента в U^μ должна равняться

$$U^t = (-g_{tt})^{-1/2} = 1. \tag{11.8.11}$$

Мы будем применять только сферически-симметричные сопутствующие системы координат, когда интервал задается формулой (11.8.8). Ненулевые элементы метрического тензора в этом случае выглядят так:

$$\begin{aligned} &g_{rr} = U, \quad g_{\theta\theta} = V, \quad g_{\varphi\varphi} = V\sin^2\theta, \quad g_{tt} = -1, \\ &g^{rr} = U^{-1}, \quad g^{\theta\theta} = V^{-1}, \quad g^{\varphi\varphi} = (V\sin^2\theta)^{-1}, \quad g^{tt} = -1. \end{aligned} \tag{11.8.12}$$

Легко также вычислить ненулевые элементы аффинной связности:

$$\begin{aligned} &\Gamma^r_{rr} = \frac{U'}{2U}, \quad \Gamma^r_{\theta\theta} = -\frac{V'}{2U}, \quad \Gamma^r_{\varphi\varphi} = -\frac{V'}{2U}\sin^2\theta, \quad \Gamma^r_{rt} = \Gamma^r_{tr} = \frac{\dot U}{2U}, \\ &\Gamma^\theta_{r\theta} = \Gamma^\theta_{\theta r} = \frac{V'}{2V}, \quad \Gamma^\theta_{\theta t} = \Gamma^\theta_{t\theta} = \frac{\dot V}{2V}, \quad \Gamma^\theta_{\varphi\varphi} = -\sin\theta\cos\theta, \\ &\Gamma^\varphi_{r\varphi} = \Gamma^\varphi_{\varphi r} = \frac{V'}{2V}, \quad \Gamma^\varphi_{t\varphi} = \Gamma^\varphi_{\varphi t} = \frac{\dot V}{2V}, \quad \Gamma^\varphi_{\theta\varphi} = \operatorname{ctg}\theta, \\ &\Gamma^t_{rr} = \frac{\dot U}{2}, \quad \Gamma^t_{\theta\theta} = \frac{\dot V}{2}, \quad \Gamma^t_{\varphi\varphi} = \frac{\dot V}{2}\sin^2\theta. \end{aligned} \tag{11.8.13}$$

(Штрихи и точки означают $\partial/\partial r$ и $\partial/\partial t$ соответственно.) С помощью (6.1.5) можно получить независимые ненулевые компоненты тензора Риччи:

$$R_{rr} = \frac{V''}{V} - \frac{V'^2}{2V^2} - \frac{U'V'}{2UV} - \frac{\ddot U}{2} + \frac{\dot U^2}{4U} - \frac{\dot U\dot V}{2V}, \tag{11.8.14}$$

$$R_{\theta\theta} = -1 + \frac{V''}{2U} - \frac{V'U'}{4U^2} - \frac{\ddot V}{2} - \frac{\dot V\dot U}{4U}, \tag{11.8.15}$$

$$R_{tt}=\frac{\ddot{U}}{2U}+\frac{\ddot{V}}{V}-\frac{\dot{U}^2}{4U^2}-\frac{\dot{V}}{2V^2}, \tag{11.8.16}$$

$$R_{tr}=\frac{\dot{V}'}{V}-\frac{V'\dot{V}}{2V^2}-\frac{\dot{U}V'}{2UV}. \tag{11.8.17}$$

Из сферической симметрии метрики снова следует, что

$$R_{\varphi\varphi}=R_{\theta\theta}\sin^2\theta, \tag{11.8.18}$$

$$R_{r\theta}=R_{r\varphi}=R_{\theta\varphi}=R_{\theta t}=R_{\varphi t}=0. \tag{11.8.19}$$

§ 9. Гравитационный коллапс

В § 3 и 4 этой главы мы видели, что в процессе охлаждения звезда с массой, большей, чем несколько масс Солнца, не может достигнуть равновесия и стать белым карликом либо нейтронной звездой. Возможно, что массивная звезда всегда выбрасывает достаточное количество вещества к тому времени, когда она заканчивает свою термоядерную эволюцию, так что ее масса становится ниже пределов Чандрасекхара или Оппенгеймера — Волкова. Если же это не так, то она должна будет коллапсировать.

Систематическое рассмотрение гравитационного коллапса было бы слишком сложным в рамках этой книги. Для того чтобы получить некоторое понятие о том, как может происходить коллапс, рассмотрим один простейший случай [46] — сферически-симметричный коллапс «пылевидной» материи с пренебрежимо малым давлением [1]). Так как пылевидные частицы удерживаются чисто гравитационными силами, то они падают свободно, и мы можем использовать их как физический базис для сопутствующей системы координат типа той, что обсуждалась в предыдущем параграфе. Тогда метрика определяется выражением (11.8.8)

$$d\tau^2 = dt^2 - U(r, t)\,dr^2 - V(r, t)\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2). \tag{11.9.1}$$

Тензор энергии-импульса жидкости с пренебрежимо малым давлением определяется выражением (5.4.2)

$$T^{\mu\nu}=\rho U^\mu U^\nu, \tag{11.9.2}$$

где $\rho(r, t)$ — плотность собственной энергии, а U^μ — 4-вектор скорости, определяемой в сопутствующей системе координат выражениями (11.8.9) и (11.8.11):

$$U^r=U^\theta=U^\varphi=0, \qquad U^t=1. \tag{11.9.3}$$

---

[1]) Подробное обсуждение решения Оппенгеймера — Волкова и других сферически-симметричных решений см. в статьях [47—54]; асимметричный коллапс разобран в работах [55—57].