$$+\sum_n e_n \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_n \left\{ \frac{d\delta x_n{}^\mu}{d\tau_n} A_\mu(x_n) + \right.$$
$$\left. + \frac{dx_n{}^\mu}{d\tau_n} \frac{\partial A_\mu(x_n)}{\partial x_n{}^\lambda} \delta x_n{}^\lambda + \frac{dx_n{}^\mu}{d\tau_n} \delta A_\mu(x_n) \right\}.$$

Поскольку $\delta x^\mu(\tau_n)$ и $\delta A_\mu(x)$ исчезают на границе области интегрирования, то, проинтегрировав по частям, приходим к результату:

$$\delta I_M = \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_n g_{\mu\lambda}(x_n) \left\{ -m_n \left[\frac{d^2 x_n{}^\mu}{d\tau_n{}^2} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \Gamma^\mu_{\rho\sigma}(x_n) \frac{dx_n{}^\rho}{d\tau_n} \frac{dx_n{}^\sigma}{d\tau_n} \right] + e_n \frac{dx_n{}^\rho}{d\tau_n} F^\mu{}_\rho(x_n) \right\} \delta x_n{}^\lambda +$$
$$+ \int d^4x \left\{ \frac{\partial}{\partial x^\mu} [g^{1/2}(x) F^{\mu\nu}(x)] + \right.$$
$$\left. + \sum_n e_n \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_n \delta^4(x - x_n) \frac{dx_n{}^\nu}{d\tau_n} \right\} \delta A_\nu(x).$$

Очевидно, что δI_M равно нулю при произвольных вариациях $\delta x_n{}^\lambda$ и δA_ν тогда и только тогда, когда $x_n{}^\lambda$ и A_ν подчиняются динамическим уравнениям (12.1.1) и (12.1.3). Итак, приходим к выводу, что формула (12.1.6) действительно является подходящей лагранжевой функцией этой системы.

§ 2. Общее определение $T^{\mu\nu}$

Мы собираемся определить тензор энергии-импульса материальной системы, описываемой действием I_M как «функциональной производной» I_M по $g_{\mu\nu}$. Для этого предположим, что $g_{\mu\nu}(x)$ подвергается бесконечно малой вариации

$$g_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}, \tag{12.2.1}$$

где $\delta g_{\mu\nu}$ произвольно, за исключением того, что оно равняется нулю при $|x^\lambda| \to \infty$. Действие I_M не будет устойчиво относительно этой вариации, поскольку в данном случае мы рассматриваем $g_{\mu\nu}(x)$ не как динамическую переменную, подобную $x_n{}^\mu$ или A_μ, но как внешнее поле. Тогда δI_M будет некоторым линейным функционалом бесконечно малой вариации $\delta g_{\mu\nu}(x)$ и, следовательно, будет иметь вид

$$\delta I_M = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{g(x)}\, T^{\mu\nu}(x)\, \delta g_{\mu\nu}(x). \tag{12.2.2}$$

Коэффициент $T^{\mu\nu}(x)$ *по определению* считается тензором энергии-импульса этой системы.

Общее доказательство того, что $T^{\mu\nu}$ — сохраняющийся симметричный тензор, будет дано в следующем параграфе. Однако сначала убедимся, что (12.2.2) действительно дает корректное определение тензора энергии-импульса для бесстолкновительной плазмы, описываемой действием (12.1.6). Будем варьировать $g_{\mu\nu}$, оставляя фиксированным A_μ; получаем

$$\delta F^{\mu\nu} = F_{\rho\sigma}\delta\left(g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}\right) = F_{\rho\sigma}g^{\mu\rho}\delta g^{\nu\sigma} + F_{\rho\sigma}g^{\nu\sigma}\delta g^{\mu\rho}.$$

Чтобы вычислить $\delta g^{\nu\sigma}$, заметим, что

$$\delta\left(g_{\lambda\varkappa}g^{\varkappa\sigma}\right) = g^{\varkappa\sigma}\delta g_{\lambda\varkappa} + g_{\lambda\varkappa}\delta g^{\varkappa\sigma} = 0,$$

а потому

$$\delta g^{\nu\sigma} = -g^{\nu\lambda}g^{\varkappa\sigma}\delta g_{\lambda\varkappa},$$

и, следовательно,

$$\delta F^{\mu\nu} = -F^{\mu\varkappa}g^{\nu\lambda}\delta g_{\lambda\varkappa} + F^{\nu\lambda}g^{\mu\varkappa}\delta g_{\lambda\varkappa}.$$

В § 7 гл. 4 мы уже видели, что

$$\delta g = g g^{\lambda\varkappa}\delta g_{\lambda\varkappa}.$$

Непосредственное вычисление приводит в результате к выражению

$$\delta I_M = \frac{1}{2}\sum_n m_n \int_{-\infty}^{\infty} dp \left[\left[-g_{\mu\nu}(x_n(p)\right]\frac{dx_n{}^{\mu}(p)}{dp}\frac{dx_n{}^{\nu}(p)}{dp}\right]^{-1/2}\times$$
$$\times\frac{dx_n{}^{\lambda}(p)}{dp}\frac{dx_n{}^{\varkappa}(p)}{dp}\delta g_{\lambda\varkappa}(x_n(p)) +$$
$$+\frac{1}{2}\int d^4x g^{1/2}(x)\left\{F_\mu{}^{\lambda}(x)F^{\mu\varkappa}(x) -\right.$$
$$\left.-\frac{1}{4}g^{\lambda\varkappa}(x)F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x)\right\}\delta g_{\lambda\varkappa}(x).$$

Сравнивая последнее выражение с (12.2.2), находим $T^{\lambda\varkappa}(x)$ в виде

$$T^{\lambda\varkappa}(x) = g^{-1/2}(x)\sum_n m_n\int_{-\infty}^{\infty} d\tau_n\frac{dx_n{}^{\lambda}}{d\tau_n}\frac{dx_n{}^{\varkappa}}{d\tau_n}\delta^4(x-x_n) +$$
$$+F_\mu{}^{\lambda}(x)F^{\mu\varkappa}(x) - \frac{1}{4}g^{\lambda\varkappa}(x)F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x),$$

что согласуется с тензором энергии-импульса, полученным ранее с помощью выражений (5.3.5) и (5.3.7).

Определение (12.2.2) очень схоже с соответствующим определением электрического тока J^μ. Мы можем разбить полное действие для вещества на чисто электромагнитный член I_E и член I'_M,

который описывает заряженные частицы и их электромагнитные взаимодействия:

$$I_M \equiv I_E + I'_M, \tag{12.2.3}$$

$$I_E \equiv -\frac{1}{4}\int d^4x g^{1/2}(x) F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x). \tag{12.2.4}$$

Рассмотрим изменения I'_M при бесконечно малой вариации вектора-потенциала

$$A_\nu \to A_\mu + \delta A_\mu. \tag{12.2.5}$$

Так как I'_M не является полным действием, изменение I_M в результате этой вариации A_μ не равно нулю, но с необходимостью является линейным функционалом от δA_μ:

$$\delta I'_M = \int d^4x \sqrt{g(x)}\, J^\mu(x)\, \delta A_\mu(x). \tag{12.2.6}$$

Сомножитель $J^\mu(x)$ считается, *по определению*, электромагнитным током системы. Например, в случае бесстолкновительной плазмы, описываемой выражением (12.1.6), член I'_M является суммой первого и третьего членов в выражении (12.1.6), и мы немедленно находим, что

$$\delta I'_M = \sum_n e_n \int_{-\infty}^{\infty} dx_n{}^\mu \delta A_\mu(x_n).$$

Сравнивая это с формулой (12.2.6), получаем

$$J^\mu(x) = g^{-1/2}(x) \sum_n e_n \int \delta^4(x - x_n)\, dx_n{}^\mu$$

в соответствии с выражением (5.2.13). В следующем параграфе мы докажем, что (12.2.6) всегда приводит к сохраняющемуся току.

§ 3. Общая ковариантность и сохранение энергии-импульса

Если действие I_M материальной системы — скаляр, тогда равенство нулю δI_M является общековариантным и этим же свойством будут обладать уравнения, найденные с помощью этого действия. Рассматривая, например, действие (12.1.6) для бесстолкновительной плазмы, убеждаемся в том, что I_M — скаляр, и это обеспечивает общую ковариантность динамических уравнений (12.1.1) — (12.1.3), которые можно найти с помощью (12.1.6), если применить принцип наименьшего действия.

Итак, будем предполагать далее, что I_M есть скаляр. Это означает, что I_M не будет изменяться, если мы одновременно