который описывает заряженные частицы и их электромагнитные взаимодействия:

$$I_M \equiv I_E + I'_M, \tag{12.2.3}$$

$$I_E \equiv -\frac{1}{4}\int d^4x g^{1/2}(x)\, F_{\mu\nu}(x)\, F^{\mu\nu}(x). \tag{12.2.4}$$

Рассмотрим изменения I'_M при бесконечно малой вариации вектора-потенциала

$$A_\mu \to A_\mu + \delta A_\mu. \tag{12.2.5}$$

Так как I'_M не является полным действием, изменение I_M в результате этой вариации A_μ не равно нулю, но с необходимостью является линейным функционалом от δA_μ:

$$\delta I'_M = \int d^4x \sqrt{g(x)}\, J^\mu(x)\, \delta A_\mu(x). \tag{12.2.6}$$

Сомножитель $J^\mu(x)$ считается, *по определению*, электромагнитным током системы. Например, в случае бесстолкновительной плазмы, описываемой выражением (12.1.6), член I'_M является суммой первого и третьего членов в выражении (12.1.6), и мы немедленно находим, что

$$\delta I'_M = \sum_n e_n \int_{-\infty}^{\infty} dx_n{}^\mu \delta A_\mu(x_n).$$

Сравнивая это с формулой (12.2.6), получаем

$$J^\mu(x) = g^{-1/2}(x) \sum_n e_n \int \delta^4(x - x_n)\, dx_n{}^\mu$$

в соответствии с выражением (5.2.13). В следующем параграфе мы докажем, что (12.2.6) всегда приводит к сохраняющемуся току.

§ 3. Общая ковариантность и сохранение энергии-импульса

Если действие I_M материальной системы — скаляр, тогда равенство нулю δI_M является общековариантным и этим же свойством будут обладать уравнения, найденные с помощью этого действия. Рассматривая, например, действие (12.1.6) для бесстолкновительной плазмы, убеждаемся в том, что I_M — скаляр, и это обеспечивает общую ковариантность динамических уравнений (12.1.1) — (12.1.3), которые можно найти с помощью (12.1.6), если применить принцип наименьшего действия.

Итак, будем предполагать далее, что I_M есть скаляр. Это означает, что I_M не будет изменяться, если мы одновременно сделаем замены

$$d^4x \to d^4x', \quad \frac{\partial}{\partial x^\mu} \to \frac{\partial}{\partial x'^\mu}, \quad x_n{}^\mu(p) \to x_n'^\mu(p),$$

$$A^\mu(x) \to A'_\mu(x') \equiv A_\nu(x)\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu},$$

$$g_{\mu\nu}(x) \to g'_{\mu\nu}(x') \equiv g_{\rho\sigma}(x)\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}.$$

Однако x'^μ — это просто переменная интегрирования (в противоположность $x_n{}^\mu$, которая является динамической переменной), а потому мы можем перейти от x'^μ снова к x^μ без изменения I_M. Тогда делаем вывод, что I_M не изменяется при заменах

$$x_n{}^\mu(p) \to x_n'^\mu(p),$$

$$A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = A_\nu(x)\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} - [A'_\mu(x') - A'_\mu(x)],$$

$$g_{\mu\nu}(x) \to g'_{\mu\nu}(x) = g_{\rho\sigma}(x)\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} - [g'_{\mu\nu}(x') - g'_{\mu\nu}(x)],$$

а d^4x и $\partial/\partial x^\mu$ мы теперь не касаемся. Если первоначальное преобразование $x^\mu \to x'^\mu$ было инфинитезимальным:

$$x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu(x),$$

то изменение динамических переменных будет следующим:

$$\delta x_n{}^\mu(p) = \varepsilon^\mu(x_n(p)),$$

$$\delta A_\mu(x) = -A_\nu(x)\frac{\partial\varepsilon^\nu(x)}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x^\nu}\varepsilon^\nu(x),$$

$$\delta g_{\mu\nu}(x) = -g_{\mu\lambda}(x)\frac{\partial\varepsilon^\lambda(x)}{\partial x^\nu} - g_{\lambda\nu}(x)\frac{\partial\varepsilon^\lambda(x)}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}(x)}{\partial x^\lambda}\varepsilon^\lambda(x). \qquad (12.3.1)$$

Изменения A и g суть просто производные Ли (§ 9 гл. 10). Важно здесь то, что инфинитезимальному преобразованию теперь подвергаются только динамические переменные, а не координаты, по которым производится интегрирование. Таким образом, принцип наименьшего действия утверждает, что в том случае, когда динамические уравнения для $x_n{}^\mu$, A_μ и т. д. удовлетворяются, изменения этих величин не приводят ни к каким изменениям действия для вещества I_M. Единственное изменение в I_M происходит здесь за счет вариации внешнего поля $g_{\mu\nu}$, и (12.2.2) описывает это изменение следующим образом:

$$\delta I_M = -\frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{g}\,T^{\mu\nu}\left[g_{\mu\lambda}\frac{\partial\varepsilon^\lambda}{\partial x^\nu} + g_{\lambda\nu}\frac{\partial\varepsilon^\lambda}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}\varepsilon^\lambda\right].$$

Если I_M является скаляром, то δI_M должно равняться нулю; интегрирование по частям приводит к результатам:

$$0=\delta I_M=\int d^4x\varepsilon^\lambda\left[\frac{\partial}{\partial x^\nu}(\sqrt{g}\,T^\nu{}_\lambda)-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}\right)\sqrt{g}\,T^{\mu\nu}\right],$$

а так как $\varepsilon^\lambda(x)$ произвольно, получаем

$$0=\frac{\partial}{\partial x^\nu}(\sqrt{g}\,T^\nu{}_\lambda)-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}\right)\sqrt{g}\,T^{\mu\nu},$$

или, учитывая (4.7.6), имеем

$$0=(T^\nu{}_\lambda)_{;\nu}. \tag{12.3.2}$$

Итак, тензор энергии-импульса, введенный с помощью выражения (12.2.2), сохраняется (в ковариантном смысле) тогда и только тогда, когда действие для вещества является скаляром. Если же I_M — скаляр, из (12.2.2) немедленно вытекает, что $T^{\mu\nu}$ — симметричный тензор, и, следовательно, наше определение тензора энергии-импульса обладает всеми свойствами, которые нам хотелось бы иметь.

Доказательство того, что общая ковариантность предполагает сохранение энергии-импульса, в точности аналогично доказательству того, что калибровочная инвариантность предполагает сохранение заряда. Изменение действия I'_M, определяемое (12.2.3) для произвольного калибровочного преобразования, может возникать только благодаря изменению A_μ, поскольку I'_M стационарно относительно всех других динамических переменных. Общее инфинитезимальное калибровочное преобразование ε будет приводить к следующему изменению A_μ (§ 11 гл. 4 и § 2 гл. 10):

$$\delta A_\mu=\frac{\partial\varepsilon}{\partial x^\mu}.$$

Подставляя это в (12.2.6), видим, что I'_M калибровочно-инвариантно тогда и только тогда, когда

$$0=\delta I'_M=\int d^4x\sqrt{g}\,J^\mu\frac{\partial\varepsilon}{\partial x^\mu}.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$0=\int d^4x\varepsilon\frac{\partial}{\partial x^\mu}(\sqrt{g}J^\mu),$$

или, поскольку ε произвольно, имеем

$$0=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\sqrt{g}\,J^\mu=J^\mu{}_{;\mu}.$$

Снова видим, сколь близки калибровочная инвариантность и общая ковариантность.