§ 4. Гравитационное действие

До сих пор гравитационное поле $g_{\mu\nu}$ в этой главе считалось внешним полем, которое можно было вводить по нашему желанию. [Соответственно (12.2.2) обычно является наиболее удобным определением тензора энергии-импульса именно в отсутствие гравитации.] Дадим теперь для $g_{\mu\nu}$ настоящие уравнения поля, добавив для этого к полному действию I чисто гравитационный член I_G:

$$I = I_M + I_G, \tag{12.4.1}$$

$$I_G \equiv -\frac{1}{16\pi G}\int \sqrt{g(x)}\, R(x)\, d^4x. \tag{12.4.2}$$

Видно, что I_G — скаляр, а потому этот член является удачным кандидатом для теории гравитации, даже если мы не имели бы никакого опыта обращения с гравитационными явлениями. Теперь покажем, что применение к I принципа наименьшего действия на самом деле приводит к теории Эйнштейна.

Скалярная кривизна R определяется как $g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$, а потому вариация $\delta g_{\mu\nu}$ метрики приводит к следующему изменению подынтегрального выражения (12.4.2):

$$\delta(\sqrt{g}R) = \sqrt{g}R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + R\delta\sqrt{g} + \sqrt{g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}.$$

Согласно выражению (10.9.2), изменение тензора Риччи равно

$$\delta R_{\mu\nu} = (\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda})_{;\nu} - (\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu})_{;\lambda},$$

причем ковариантные производные здесь определяются так, как если бы $\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$ был тензором (что выполняется в действительности). Таким образом, последний член в $\delta(\sqrt{g}R)$ равняется

$$\sqrt{g}\, g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \sqrt{g}\,[(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda})_{;\nu} - (g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu})_{;\lambda}],$$

или, подставляя (4.7.7), получаем

$$\sqrt{g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}(\sqrt{g}\,g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda}) - \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}(\sqrt{g}\,g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}).$$

Этот член, следовательно, выпадает, когда мы интегрируем по всему пространству. Учитывая также то, что

$$\delta\sqrt{g} = \frac{1}{2}\sqrt{g}\,g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}, \qquad \delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}\delta g_{\rho\sigma},$$

получаем изменение действия (12.4.2) в виде

$$\delta I_G = \frac{1}{16\pi G}\int \sqrt{g}\left[R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right]\delta g_{\mu\nu}d^4x. \tag{12.4.3}$$

Объединяя (12.4.3) и (12.2.2), видим, что полное действие I стационарно относительно произвольных вариаций $g_{\mu\nu}$ тогда и только тогда, когда

$$R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R+8\pi GT^{\mu\nu}=0.$$

Последнее, конечно, является уравнением поля Эйнштейна.

Формулу (12.4.3) можно также использовать для получения свернутого тождества Бианки. Так как величина I_G является скаляром, она должна быть устойчива относительно вариаций (12.3.1) по $g_{\mu\nu}$. Повторяя аргументы, приведшие нас к условию (12.3.2), приходим теперь к соотношению

$$\left[R^{\nu}{}_{\lambda}-\frac{1}{2}\delta^{\nu}{}_{\lambda}R\right]_{;\nu}=0,$$

в котором мы узнаем свернутое тождество Бианки (6.8.3.)

Этот формализм указывает на то, что теорию Эйнштейна можно было бы модифицировать, прибавляя в выражении (12.4.2) к R члены, пропорциональные R^2, R^3 и т. д. В § 1 гл. 7 отмечалось, что такие члены сказывались бы только в явлениях с достаточно малыми пространственно-временными масштабами.

§ 5. Тетрадный формализм *)

До сих пор мы придерживались только одного метода при определении воздействия гравитации на произвольные физические системы. Брали уравнения специальной теории относительности, которым подчиняются системы в отсутствие гравитации, и заменяли все лоренцевы тензоры $T^{\alpha\dots}_{\beta\dots}$ объектами $T^{\mu\dots}_{\nu\dots}$, которые ведут себя подобно тензорам (или тензорным плотностям) при общих преобразованиях координат. Далее, заменяли все производные $\partial/\partial x^{\alpha}$ ковариантными производными, а вместо $\eta_{\alpha\beta}$ везде подставляли $g_{\mu\nu}$. Полученные уравнения движения оказывались общековариантными (см. гл. 5).

Этот метод в действительности применим *только* к объектам, которые ведут себя, подобно тензорам при преобразованиях Лоренца, и не применим к спинорным полям, введенным в § 12 гл. 2. [Математически это происходит из-за того, что тензорные представления группы $GL(4)$ в виде произвольных линейных 4×4 матриц ведут себя, подобно тензорам на подгруппе лоренцевых преобразований, но не существует представлений $GL(4)$ и даже «представлений с точностью до знака», которые ведут себя, подобно спинорам на подгруппе Лоренца.] Каким образом тогда ввести спиноры в общей теории относительности?

Этот вопрос разрешается в другом подходе к задаче о воздействии гравитации на физические системы; этот подход доволь-

*) Этот параграф лежит несколько в стороне от основной линии книги и может быть опущен при первом чтении.