тогда, когда

$$R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R+8\pi GT^{\mu\nu}=0.$$

Последнее, конечно, является уравнением поля Эйнштейна.

Формулу (12.4.3) можно также использовать для получения свернутого тождества Бианки. Так как величина I_G является скаляром, она должна быть устойчива относительно вариаций (12.3.1) по $g_{\mu\nu}$. Повторяя аргументы, приведшие нас к условию (12.3.2), приходим теперь к соотношению

$$\left[R^{\nu}{}_{\lambda}-\frac{1}{2}\delta^{\nu}{}_{\lambda}R\right]_{;\nu}=0,$$

в котором мы узнаем свернутое тождество Бианки (6.8.3.)

Этот формализм указывает на то, что теорию Эйнштейна можно было бы модифицировать, прибавляя в выражении (12.4.2) к R члены, пропорциональные R^2, R^3 и т. д. В § 1 гл. 7 отмечалось, что такие члены сказывались бы только в явлениях с достаточно малыми пространственно-временными масштабами.

§ 5. Тетрадный формализм *)

До сих пор мы придерживались только одного метода при определении воздействия гравитации на произвольные физические системы. Брали уравнения специальной теории относительности, которым подчиняются системы в отсутствие гравитации, и заменяли все лоренцевы тензоры $T^{\alpha\ldots}_{\beta\ldots}$ объектами $T^{\mu\ldots}_{\nu\ldots}$, которые ведут себя подобно тензорам (или тензорным плотностям) при общих преобразованиях координат. Далее, заменяли все производные $\partial/\partial x^{\alpha}$ ковариантными производными, а вместо $\eta_{\alpha\beta}$ везде подставляли $g_{\mu\nu}$. Полученные уравнения движения оказывались общековариантными (см. гл. 5).

Этот метод в действительности применим *только* к объектам, которые ведут себя, подобно тензорам при преобразованиях Лоренца, и не применим к спинорным полям, введенным в § 12 гл. 2. [Математически это происходит из-за того, что тензорные представления группы $GL(4)$ в виде произвольных линейных 4×4 матриц ведут себя, подобно тензорам на подгруппе лоренцевых преобразований, но не существует представлений $GL(4)$ и даже «представлений с точностью до знака», которые ведут себя, подобно спинорам на подгруппе Лоренца.] Каким образом тогда ввести спиноры в общей теории относительности?

Этот вопрос разрешается в другом подходе к задаче о воздействии гравитации на физические системы; этот подход доволь-

*) Этот параграф лежит несколько в стороне от основной линии книги и может быть опущен при первом чтении.

но интересен сам по себе, даже если не иметь в виду задачу о спинорах.

Начнем с того, что, пользуясь принципом эквивалентности, зададим в каждой точке X набор локально-инерциальных координат ξ^{α}_{X}. (Невозможно, конечно, построить ни одной системы координат, которая была бы локально-инерциальной повсюду, если пространственно-временной континуум не является «плоским».) Как показано в § 2 и 3 гл. 3, метрика в произвольной неинерциальной системе координат выглядит так:

$$g_{\mu\nu}(x) = V^{\alpha}{}_{\mu}(x)\, V^{\beta}{}_{\nu}(x)\, \eta_{\alpha\beta}, \tag{12.5.1}$$

где

$$V^{\alpha}{}_{\mu}(X) \equiv \left(\frac{\partial \xi_X{}^{\alpha}(x)}{\partial x^{\mu}}\right)_{x=X} \tag{12.5.2}$$

Заметим, что мы фиксируем локально-инерциальные координаты ξ^{α}_{X} в каждой физической точке X раз и навсегда, а потому, когда мы заменяем неинерциальные координаты x'^{μ} координатами x^{μ}, частные производные $V^{\alpha}{}_{\mu}$ заменяются по правилу

$$V^{\alpha}{}_{\mu} \to V'^{\alpha}{}_{\mu} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}}\, V^{\alpha}{}_{\nu}. \tag{12.5.3}$$

Поэтому можно считать, что $V^{\alpha}{}_{\mu}$ — *не* один тензор, а четыре ковариантных векторных поля; такой набор четырех векторов называют *тетрадой* [1]).

При наличии какого-либо контравариантного векторного поля $A^{\mu}(x)$ можно использовать тетраду, чтобы задать его x-компоненты в системе координат ξ^{α}_{X}, локально-инерциальной в этой точке x:

$$^{*}A^{\alpha} \equiv V^{\alpha}{}_{\mu} A^{\mu}. \tag{12.5.4}$$

При этом свертывание контравариантного вектора A^{μ} с четырьмя ковариантными векторами $V^{\alpha}{}_{\mu}$ приводит к *замене* единственного 4-вектора A^{μ} *четырьмя* скалярами $^{*}A^{\alpha}$. Мы можем сделать то же самое с ковариантным векторным полем, а также с произвольными тензорными полями:

$$\begin{gathered} ^{*}A_{\alpha} \equiv V_{\alpha}{}^{\mu} A_{\mu}, \\ ^{*}B^{\alpha}{}_{\beta} \equiv V^{\alpha}{}_{\mu} V_{\beta}{}^{\nu} B^{\mu}{}_{\nu} \text{ и т. д.} \end{gathered} \tag{12.5.5}$$

Здесь $V_{\beta}{}^{\nu}$ — тетрада (12.5.2), но с α-индексом, пониженным с помощью тензора Минковского $\eta_{\alpha\beta}$, и μ-индексом, поднятым с помощью метрического тензора $g^{\mu\nu}$, а именно

$$V_{\beta}{}^{\nu} \equiv \eta_{\alpha\beta} g^{\mu\nu} V^{\alpha}{}_{\mu}. \tag{12.5.6}$$

[1]) Или репером, или, более старое, 4-под.— *Прим. ред.*

Заметим, что, согласно (12.5.1), это — обратная тетрада, т. е.

$$\delta^{\mu}{}_{\nu} = V_{\beta}{}^{\mu} V^{\beta}{}_{\nu}, \tag{12.5.7}$$

и, следовательно, справедливо также

$$\delta^{\alpha}{}_{\beta} = V^{\alpha}{}_{\mu} V_{\beta}{}^{\mu}. \tag{12.5.8}$$

Скалярные компоненты метрического тензора тогда выглядят просто как

$$^{*}g_{\alpha\beta} \equiv V_{\alpha}{}^{\mu} V^{\nu}_{\beta} g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta}. \tag{12.5.9}$$

Теперь, когда мы показали, как превратить любое тензорное поле в набор скаляров, можно забыть первоначальные тензоры V^{μ}, $T_{\mu\nu}$ и т. д., из которых мы исходили, и посмотреть, как следует строить действие, если мы с самого начала работаем со скалярами $^{*}V^{\alpha}$, $^{*}T_{\alpha\beta}$ и т. д. В таком подходе спинорное поле, подобное полю электрона Дирака, может быть введено в наш формализм точно таким же способом, как и любое другое поле, а его особые свойства при лоренцевых преобразованиях не приводят ни к каким осложнениям. У нас есть *два* принципа инвариантности, которые следует учитывать при построении подходящего действия для вещества I_M.

А. Действие должно быть общековариантным, а все поля следует рассматривать как скаляры, исключая саму тетраду.

Б. Принцип эквивалентности требует, чтобы в локально-инерциальных системах была применима специальная теория относительности и, в частности, чтобы не возникало никаких различий от того, что мы выбираем в каждой точке разные локально-инерциальные системы. Таким образом, поскольку наборы рассматриваемых скалярных полей $^{*}V^{\alpha}$, $^{*}T_{\alpha\beta}$ и т. д. определяются в произвольно выбранной локально-инерциальной системе координат, уравнения поля и действие должны быть инвариантными относительно переопределений этих локально-инерциальных систем координат в каждой точке или, другими словами, относительно лоренцевых преобразований $\Lambda^{\alpha}{}_{\beta}(x)$, которые могут зависеть от пространственных и временной координат:

$$^{*}A^{\alpha}(x) \to \Lambda^{\alpha}{}_{\beta}(x)\, ^{*}A^{\beta}(x),$$

$$^{*}T_{\alpha\beta}(x) \to \Lambda_{\alpha}{}^{\gamma}(x)\, \Lambda_{\beta}{}^{\delta}(x)\, ^{*}T_{\gamma\delta}(x),$$

где

$$\eta_{\alpha\beta} \Lambda^{\alpha}{}_{\gamma}(x)\, \Lambda^{\beta}{}_{\delta}(x) = \eta_{\gamma\delta}. \tag{12.5.10}$$

Тетрада (12.5.2) преобразуется по тому же правилу, что и $^{*}A^{\alpha}$:

$$V^{\alpha}{}_{\mu}(x) \to \Lambda^{\alpha}{}_{\beta}(x)\, V^{\beta}{}_{\mu}(x), \tag{12.5.11}$$

а произвольное поле $^*\psi_n(x)$ преобразуется по правилу

$$^*\psi_n(x) \to \sum_m [D(\Lambda(x))]_{nm}\, ^*\psi_m(x), \qquad (12.5.12)$$

где $D(\Lambda)$ — матричное представление группы Лоренца (или по крайней мере группы инфинитезимальных лоренцевых преобразований) типа того, что обсуждалось в § 12 гл. 2.

Эти два принципа инвариантности приводят к двойной классификации физических величин. *Координатный скаляр* или *координатный тензор* преобразуется как скаляр или тензор при замене системы координат. При заменах локально-инерциальных систем координат *лоренцев скаляр* или *лоренцев тензор* или *лоренцев спинор* преобразуется по правилу, подобному (12.5.12), где $D(\Lambda)$ — единица или тензорное представление или спинорное представление инфинитезимальных преобразований группы Лоренца. Например, поле (12.5.4) является координатным скаляром и лоренцевым вектором, поле электрона Дирака — это координатный скаляр и лоренцев спинор, а тетрада $V^\alpha{}_\mu$ — это координатный вектор и лоренцев вектор. Приемлемая с физической точки зрения лагранжева функция вещества I_M должна быть координатным скаляром и лоренцевым скаляром.

В этом месте у читателя может возникнуть недоумение: как может появиться в теории гравитационное поле, если координатно-скалярные компоненты (12.5.9) метрического тензора оказываются постоянными $\eta_{\alpha\beta}$? Ответ состоит в том, что гравитационные тензорные поля возникнут в действии потому и только потому, что в теорию *необходимо будет* ввести производные. Если бы имелся смысл в построении действия I_M только из полей без производных от них, тогда надо было лишь выбрать некоторую произвольную лоренц-инвариантную функцию $\mathscr{L}(^*\psi(x))$, зависящую от различных полей $^*\psi_n(x)$ (но не от тетрад), и, считая их координатными скалярами, записать действие в виде

$$I_M = \int d^4x \sqrt{g(x)}\, \mathscr{L}(^*\psi(x)).$$

Это выражение было бы тогда автоматически координатным скаляром и лоренцевым скаляром. Однако примеры, обсуждавшиеся в предыдущих параграфах этой главы, показывают, что любые физически приемлемые лагранжевы функции должны содержать производные физических величин наравне с самими этими функциями. Тетрадное поле должно входить в лагранжеву функцию таким образом, чтобы сохранялся ее скалярный координатный и лоренцев характер, несмотря на присутствие производных.

Обычная производная является, конечно, координатным вектором в том смысле, что при замене координат $x \to x'$ она пре-

образуется по правилу

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \to \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}.$$

Если бы все поля, включаемые в действие, были бы координатными скалярами, в нем не возникало бы контравариантных индексов для свертывания с ковариантным индексом μ. Следовательно, для того, чтобы сделать действие координатным скаляром, необходимо ввести тетрадное поле и производные типа

$$V_{\alpha}{}^{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}. \tag{12.5.13}$$

Однако, хотя эта комбинация — координатный скаляр, она не обладает простыми трансформационными свойствами относительно преобразований Лоренца, зависящих от положения. Если преобразовывать произвольного вида поле $^*\psi$ согласно лоренцеву правилу (12.5.12), то его скалярные координатные производные будут преобразовываться так:

$$V_{\alpha}{}^{\mu}(x) \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} {}^*\psi(x) \to \Lambda_{\alpha}{}^{\beta}(x) V_{\beta}{}^{\mu}(x) \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \{D(\Lambda(x))^* \psi(x)\} =$$
$$= \Lambda_{\alpha}{}^{\beta}(x) V_{\beta}{}^{\mu}(x) \left\{ D(\Lambda(x)) \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \psi^*(x) + \left[\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} D(\Lambda(x)) \right] \psi^*(x) \right\}. \tag{12.5.14}$$

Однако нам нужно включить в действие производные в форме оператора $\mathscr{D}_{\alpha}$, который является не только координатным скаляром, но также, в отличие от (12.5.13), лоренцевым вектором. Последнее означает, что при лоренцевом, зависящем от положения преобразовании $\Lambda^{\alpha}{}_{\beta}(x)$, должно иметь место преобразование

$$\mathscr{D}_{\alpha}{}^*\psi(x) \to \Lambda_{\alpha}{}^{\beta}(x) D(\Lambda(x)) \mathscr{D}_{\beta}{}^*\psi(x). \tag{12.5.15}$$

Любое действие, зависящее лишь от различных полей $^*\psi$ и их «производных» $\mathscr{D}_{\alpha}{}^*\psi$, тогда автоматически не будет зависеть от выбора локально-инерциальных систем отсчета, если оно инвариантно относительно обычных постоянных лоренцевых преобразований. Рассмотрение правила (12.5.14) показывает, что мы можем построить координатно-скалярную и лоренцевско-векторную производную $\mathscr{D}_{\alpha}$ вида

$$\mathscr{D}_{\alpha} \equiv V_{\alpha}{}^{\mu} \left[\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} + \Gamma_{\mu} \right], \tag{12.5.16}$$

где Γ_{μ} — матрица, подчиняющаяся следующему правилу лоренцева преобразования:

$$\Gamma_{\mu}(x) \to D(\Lambda(x)) \Gamma_{\mu}(x) D^{-1}(\Lambda(x)) -$$
$$- \left[\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} D(\Lambda(x)) \right] D^{-1}(\Lambda(x)). \tag{12.5.17}$$

Неоднородный член в (12.5.17) будет тогда сокращаться со вторым членом в (12.5.14), приводя к нужному трансформационному свойству (12.5.15) производной $\mathscr{D}_\alpha$.

Для того чтобы определить структуру матрицы $\Gamma_\mu(x)$, достаточно рассмотреть преобразования Лоренца, бесконечно близкие к единице. Такие преобразования в соответствии с (2.12.5) и (2.12.6) должны иметь вид

$$\Lambda^\alpha{}_\beta(x) = \delta^\alpha{}_\beta + \omega^\alpha{}_\beta(x), \tag{12.5.18}$$

где

$$\omega_{\alpha\beta}(x) = -\omega_{\beta\alpha}(x). \tag{12.5.19}$$

В этом случае матрица D имеет форму (2.12.7)

$$D(1+\omega(x)) = 1 + \frac{1}{2}\omega^{\alpha\beta}(x)\,\sigma_{\alpha\beta}. \tag{12.5.20}$$

Здесь $\sigma_{\alpha\beta}$ — набор постоянных матриц, антисимметричных по α и β:

$$\sigma_{\alpha\beta} = -\sigma_{\beta\alpha}, \tag{12.5.21}$$

и удовлетворяющих коммутационным соотношениям (2.12.12)

$$[\sigma_{\alpha\beta}, \sigma_{\gamma\delta}] = \eta_{\gamma\beta}\sigma_{\alpha\delta} - \eta_{\gamma\alpha}\sigma_{\beta\delta} + \eta_{\delta\beta}\sigma_{\gamma\alpha} - \eta_{\delta\alpha}\sigma_{\gamma\beta}. \tag{12.5.22}$$

Условие (12.5.17) утверждает, что при инфинитезимальном лоренцевом преобразовании (12.5.18) матрица $\Gamma_\mu(x)$ преобразуется так:

$$\Gamma_\mu(x) \to \Gamma_\mu(x) + \frac{1}{2}\omega^{\alpha\beta}(x)\,[\sigma_{\alpha\beta}, \Gamma_\mu(x)] - \frac{1}{2}\sigma_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\omega^{\alpha\beta}(x). \tag{12.5.23}$$

Заметим, что $V^\alpha{}_\mu(x)$ преобразуется по правилу

$$V^\alpha{}_\nu(x) \to V^\alpha{}_\nu(x) + \omega^\alpha{}_\beta(x)\,V^\beta{}_\nu(x),$$

а потому, используя (12.5.8), получаем

$$V_\beta{}^\nu(x)\frac{\partial}{\partial x^\mu}V_{\alpha\nu}(x) \to V_\beta{}^\nu(x)\frac{\partial}{\partial x^\mu}V_{\alpha\nu}(x) + \\ + \omega_\beta{}^\gamma(x)\,V_\gamma{}^\nu(x)\frac{\partial}{\partial x^\mu}V_{\alpha\nu}(x) + \omega_\alpha{}^\gamma(x)\,V_\beta{}^\nu(x)\times \\ \times\frac{\partial}{\partial x^\mu}V_{\gamma\nu}(x) + \frac{\partial}{\partial x^\mu}\omega_{\alpha\beta}(x).$$

Умножая это на $\sigma^{\alpha\beta}$ и применяя правила коммутации (12.5.22), находим, что формулу преобразования (12.5.23) можно переписать в виде

$$\Gamma_\mu(x) = \frac{1}{2}\sigma^{\alpha\beta}V_\alpha{}^\nu(x)\,V_{\beta\nu;\,\mu}. \tag{12.5.24}$$

Итак, воздействие гравитации на любую физическую систему можно учесть, если в действии для вещества или уравнениях поля, установленных в специальной теории относительности заменить все производные $\partial/\partial x^\alpha$ «ковариантными производными» $\mathscr{D}_\alpha$:

$$\mathscr{D}_\alpha \equiv V_\alpha{}^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{1}{2}\sigma^{\beta\gamma} V_\beta{}^\nu V_\alpha{}^\mu V_{\gamma\nu;\,\mu}. \qquad (12.5.25)$$

Этот рецепт позволяет найти действие для вещества или уравнения поля, инвариантные относительно преобразований координат общего вида, причем $V_\alpha{}^\mu$ в них рассматривается как 4-вектор, а все другие поля — как скаляры, не зависящие от выбора локально-инерциальной системы отсчета при определении тетрады.

Как задать тензор энергии-импульса в этом формализме? Вариация $\delta V_\alpha{}^\mu$ тетрадного поля будет приводить к следующему изменению лагранжевой функции вещества:

$$\delta I_M = \int d^4x \sqrt{g}\, U^\alpha{}_\mu \delta V_\alpha{}^\mu, \qquad (12.5.26)$$

где $U^\alpha{}_\mu$ — координатный вектор и лоренцев вектор. Попробуем определить тензор энергии-импульса следующим образом:

$$T_{\mu\nu} \equiv V_{\alpha\mu} U^\alpha{}_\nu. \qquad (12.5.27)$$

Чтобы убедиться, что выражение (12.5.27) подходит для тензора энергии-импульса, надо также проверить, симметрично ли оно:

$$T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}, \qquad (12.5.28)$$

и выполняются ли законы сохранения:

$$(T^\nu{}_\lambda)_{;\nu} = 0. \qquad (12.5.29)$$

Свойство симметрии тензора энергии-импульса отнюдь не очевидно в тетрадном формализме. Оно должно быть выведено из свойства инвариантности действия для вещества относительно инфинитезимальных лоренцевых преобразований:

$$\Lambda^\alpha{}_\beta(x) = \delta^\alpha{}_\beta + \omega^\alpha{}_\beta(x),$$

где

$$|\omega^\alpha{}_\beta(x)| \ll 1.$$

Эти преобразования приводят к малым смещениям всех динамических переменных, однако предполагается, что действие для вещества стационарно относительно вариаций каждой из этих переменных, исключая вариацию тетрады, которая входит в I_M как внешнее поле. Поэтому нам необходимо лишь учесть изменение (12.5.11) тетрадного поля:

$$\delta V_\alpha{}^\mu(x) = \omega_\alpha{}^\beta(x)\, V_\beta{}^\mu(x). \qquad (12.5.30)$$

Подставляя (12.5.30) в (12.5.26), находим, что инвариантность действия для вещества относительно зависящих от положения преобразований Лоренца требует, чтобы

$$\int d^4x \sqrt{g(x)}\, U^{\alpha}{}_{\mu}(x)\, V^{\beta\mu}(x)\, \omega_{\alpha\beta}(x) = 0.$$

Но $\omega_{\alpha\beta}(x)$ — произвольная функция, за исключением требования антисимметрии (12.5.19), а потому коэффициент при $\omega_{\alpha\beta}(x)$ должен быть симметричным:

$$U^{\alpha}{}_{\mu} V^{\beta\mu} = U^{\beta}{}_{\mu} V^{\alpha\mu}.$$

Умножая это соотношение на $V_{\beta\nu} V_{\alpha\lambda}$ и учитывая (12.5.7), находим

$$U^{\alpha}{}_{\nu} V_{\alpha\lambda} = U^{\beta}{}_{\lambda} V_{\beta\nu}, \tag{12.5.31}$$

что совпадает с требуемым условием симметрии (12.5.28).

Чтобы показать, что тензор энергии-импульса, введенный с помощью (12.5.27), сохраняется, надо воспользоваться инвариантностью лагранжевой функции вещества при инфинитезимальном преобразовании координат

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \varepsilon^{\mu}(x),$$

где $|\varepsilon^{\mu}|$ очень мало. Такое преобразование изменяет тетрадное поле на бесконечно малую величину:

$$\delta V_{\alpha}{}^{\mu}(x) \equiv V'^{\mu}_{\alpha}(x) - V_{\alpha}{}^{\mu}(x) = \\ = V_{\alpha}{}^{\nu}(x) \frac{\partial \varepsilon^{\mu}(x)}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial V_{\alpha}{}^{\mu}(x)}{\partial x^{\lambda}} \varepsilon^{\lambda}(x) \tag{12.5.32}$$

[сравните с выражением (12.3.1)]. Все другие координатные скалярные поля $\psi(x)$ изменяются при этом следующим образом:

$$\delta\psi(x) \equiv \psi'(x) - \psi(x) = -\frac{\partial\psi(x)}{\partial x^{\lambda}} \varepsilon^{\lambda}(x).$$

Однако действие для вещества I_M снова стационарно относительно вариаций этих полей, а потому в ней нужно учитывать только вариацию тетрадного поля. Подставляя (12.5.32) в (12.5.26), находим, что инвариантность лагранжевой функции вещества I_M относительно преобразований координат общего вида требует, чтобы

$$\int d^4x \sqrt{g}\, U^{\alpha}{}_{\mu} \left\{ V_{\alpha}{}^{\nu} \frac{\partial \varepsilon^{\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial V_{\alpha}{}^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} \varepsilon^{\lambda} \right\} = 0.$$

Но $\varepsilon^{\lambda}(x)$ произвольно, а потому после интегрирования по частям мы можем приравнять коэффициент при $\varepsilon^{\lambda}(x)$ нулю, что дает

$$\frac{\partial}{\partial x^{\nu}} (\sqrt{g}\, U^{\alpha}{}_{\lambda} V_{\alpha}{}^{\nu}) + \sqrt{g}\, U^{\alpha}{}_{\mu} \frac{\partial V_{\alpha}{}^{\mu}}{\partial x^{\lambda}}.$$

Подставляя сюда выражения (12.5.27) и (12.5.8), представляем это соотношение в виде

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu}(\sqrt{g}\,T^\nu{}_\lambda)+\sqrt{g}\;T_{\nu\mu}V^{\alpha\nu}\frac{\partial V_\alpha{}^\mu}{\partial x^\lambda}=0. \qquad (12.5.33)$$

Согласно (12.5.1), метрический тензор связан с тетрадой следующим образом:

$$g^{\mu\nu}=V_\alpha{}^\mu V^{\alpha\nu},$$

поэтому

$$\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}=V^{\alpha\nu}\frac{\partial V_\alpha{}^\mu}{\partial x^\lambda}+V^{\alpha\mu}\frac{\partial V_\alpha{}^\nu}{dx^\lambda}\,.$$

Так как $T_{\mu\nu}$ симметрично, соотношение (12.5.33) можно теперь переписать так:

$$0=\frac{\partial}{\partial x^\nu}(\sqrt{g}\,T^\nu{}_\lambda)+\frac{1}{2}\sqrt{g}\,T_{\mu\nu}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}\,. \qquad (12.5.34)$$

Кроме того, (3.3.1) и (4.7.6) приводят к соотношениям

$$\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}=-g^{\rho\mu}g^{\sigma\nu}\frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^\lambda}=-g^{\sigma\nu}\Gamma^\mu_{\sigma\lambda}-g^{\rho\mu}\Gamma^\nu_{\rho\lambda}\,,$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu}\ln\sqrt{g}=\Gamma^\lambda_{\nu\lambda},$$

так что (12.5.34) совпадает с обычным законом сохранения (12.5.29).

Таким образом, определение тензора энергии-импульса (12.5.27) вполне удовлетворительно. Отметим, однако, что если бы действие для вещества не было инвариантно относительно зависящих от положения преобразований Лоренца, то $T_{\mu\nu}$ не только не было бы симметричным, но и не сохранялось бы.

Полное действие для вещества *и* гравитации — это, как и выше, сумма

$$I=I_M+I_G,$$

где I_G определяется выражением (12.4.2). Вариация тетрады будет приводить к следующему изменению метрики в соответствии с (12.5.1):

$$\delta g_{\mu\nu}=V^\alpha{}_\mu\delta V_{\alpha\nu}+V^\alpha{}_\nu\delta V_{\alpha\mu}=-[g_{\mu\lambda}V^\alpha{}_\nu+g_{\nu\lambda}V^\alpha{}_\mu]\,\delta V_\alpha{}^\lambda,$$

так что (12.4.3) дает следующее изменение гравитационной функции

Лагранжа:

$$\delta I_G = -\frac{1}{8\pi G}\int \sqrt{g}\left[R^{\mu}{}_{\lambda} - \frac{1}{2}\delta^{\mu}{}_{\lambda}R\right]V^{\alpha}{}_{\mu}\delta V_{\alpha}{}^{\lambda}d^4x. \qquad (12.5.35)$$

Полное действие должно быть стационарно относительно вариаций тетрадного поля, а потому (12.5.26) и (12.5.35) приводят к уравнению

$$\left(R^{\mu}{}_{\lambda} - \frac{1}{2}\delta^{\mu}{}_{\lambda}R\right)V^{\alpha}{}_{\mu} = -8\pi G U^{\alpha}{}_{\lambda}.$$

Свертывая это с $V_{\alpha\nu}$ и подставляя сюда (12.5.1) и (12.5.27), получаем известные уравнения поля Эйнштейна

$$R_{\nu\lambda} - \frac{1}{2}g_{\nu\lambda}R = -8\pi G T_{\nu\lambda}. \qquad (12.5.36)$$

Эти уравнения позволяют найти только $g_{\mu\nu}$, оставляя тетраду определенной лишь с точностью до лоренцева преобразования (12.5.11). Однако инвариантность действия для вещества относительно таких, зависящих от положения преобразований Лоренца гарантирует, что все тетрады, связанные с данной метрикой, приводят к одним и тем же физическим эффектам.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Utiyama R.*, Phys. Rev., **101**, 1597 (1956) (см. перевод в сб. «Элементарные частицы и компенсирующие поля», ИЛ, 1960, стр. 250).
2. *Kibble T. W. B.*, J. Math. Phys., **2**, 212 (1961).