Симметрия как в широком, так и в узком понимании этого слова есть идея, с помощью которой человек во все времена пытался постичь и создать порядок, красоту и совершенство.

Г. Вейль, Симметрия

Глава 13

СИММЕТРИЧНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Евклид неявно допускал, что метрические соотношения не изменяются при трансляциях и вращениях. Реальные гравитационные поля, вообще говоря, не обладают столь высокой степенью симметрии, однако иногда они обладают приближенной симметрией относительно некоторых групп преобразований. В этих случаях мы можем, используя информацию об этом, облегчить себе решение уравнений Эйнштейна или даже обойтись совсем без решений. Здесь дано короткое введение в хорошо разработанную математическую теорию симметричных пространств, причем особое внимание уделено максимально симметричным пространствам, представляющим особый интерес для космологии.

С самого начала мы встретимся со следующей проблемой: как можно использовать предполагаемую симметрию для получения каких-то сведений о метрике, если без знания метрики мы не можем найти даже систему координат, в которой определяется свойство симметрии. Для того чтобы обойти это затруднение, мы должны искать ковариантный способ описания симметрии, не зависящий от конкретного выбора какой-нибудь системы координат. Если такой способ будет найден, то установление свойств метрики, определяемых ее симметрией, сведется к математическим операциям.

§ 1. Векторы Киллинга

Говорят, что метрика $g_{\mu\nu}(x)$ *форминвариантна* относительно данных преобразований координат $x \to x'$, если преобразованная метрика $g'_{\mu\nu}(x')$ — это та же самая функция от ее аргумента x'^{μ}, что и первоначальная функция $g_{\mu\nu}(x)$ *ее* первоначального аргумента x^{μ}, т. е.

$$g'_{\mu\nu}(y) = g_{\mu\nu}(y) \text{ для всех } y. \qquad (13.1.1)$$

[Это условие отличается от задающего скаляры, которое имеет вид $S'(x') = S(x)$.] В любой данной *точке* новая метрика вводится с помощью соотношения

$$g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} g_{\rho\sigma}(x)$$

или, эквивалентным способом,

$$g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu}\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} g'_{\rho\sigma}(x').$$

Когда выполняется условие (13.1.1), $g'_{\rho\sigma}(x')$ можно заменить на $g_{\rho\sigma}(x')$ и получить таким образом фундаментальное условие форминвариантности метрики:

$$g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu}\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} g_{\rho\sigma}(x'). \tag{13.1.2}$$

Любое преобразование $x \to x'$, удовлетворяющее (13.1.2), называется *изометрией*.

Вообще говоря, условие (13.1.2) — весьма сложное ограничение на функцию $x'^\mu(x)$. Его можно очень сильно упростить, рассматривая специальный случай инфинитезимального преобразования координат

$$x'^\mu = x^\mu + \varepsilon\xi^\mu(x), \quad \text{где } |\varepsilon| \ll 1. \tag{13.1.3}$$

В первом порядке по ε соотношение (13.1.2) теперь выглядит так:

$$0 = \frac{\partial\xi^\mu(x)}{\partial x^\rho} g_{\mu\sigma}(x) + \frac{\partial\xi^\nu(x)}{\partial x^\sigma} g_{\rho\nu}(x) + \xi^\mu(x)\frac{\partial g_{\rho\sigma}(x)}{\partial x^\mu}. \tag{13.1.4}$$

Его можно переписать через производные ковариантных компонент $\xi_\sigma \equiv g_{\mu\sigma}\xi^\mu$:

$$\frac{\partial\xi_\sigma}{\partial x^\rho} + \frac{\partial\xi_\rho}{\partial x^\sigma} + \xi^\mu\left[\frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\rho} - \frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^\sigma}\right] = \frac{\partial\xi_\sigma}{\partial x^\rho} + \frac{\partial\xi_\rho}{\partial x^\sigma} - 2\xi_\mu\Gamma^\mu_{\rho\sigma} = 0,$$

или, в более компактном виде,

$$\xi_{\sigma;\,\rho} + \xi_{\rho;\,\sigma} = 0. \tag{13.1.5}$$

Говорят, что 4-векторное поле $\xi_\sigma(x)$, которое удовлетворяет соотношению (13.1.5), образует *вектор Киллинга* [1] метрики $g_{\mu\nu}(x)$. В этом случае задача нахождения всех инфинитезимальных изометрий данной метрики сводится к задаче нахождения всех векторов Киллинга для данной метрики. Любая линейная комбинация векторов Киллинга с постоянными коэффициентами также является вектором Киллинга, так что существует пространство векторных полей, натянутых на векторы Киллинга, которое определяет инфинитезимальные изометрии метрики.

Условие Киллинга (13.1.5) намного сильнее, чем выглядит на первый взгляд, поскольку оно позволяет полностью задать функцию $\xi_\mu(x)$ с помощью величин ξ_σ и $\xi_{\sigma;\rho}$, заданных в некоторой точке X. Чтобы убедиться в этом, необходимо лишь обратиться к формуле (6.5.1) для коммутатора двух ковариантных производных:

$$\xi_{\sigma;\rho;\mu}-\xi_{\sigma;\mu;\rho}=-R^{\lambda}_{\sigma\rho\mu}\xi_\lambda, \tag{13.1.6}$$

а также к правилу суммирования циклических перестановок (6.6.5) тензора кривизны

$$R^{\lambda}_{\sigma\rho\mu}+R^{\lambda}_{\mu\sigma\rho}+R^{\lambda}_{\rho\mu\sigma}=0. \tag{13.1.7}$$

Прибавляя к (13.1.6) две ее циклические перестановки, приходим к выводу, что любой вектор ξ_μ должен удовлетворять соотношению

$$\xi_{\sigma;\rho;\mu}-\xi_{\sigma;\mu;\rho}+\xi_{\mu;\sigma;\rho}-\xi_{\mu;\rho;\sigma}+\xi_{\rho;\mu;\sigma}-\xi_{\rho;\sigma;\mu}=0. \tag{13.1.8}$$

Для вектора Киллинга, (13.1.5) и (13.1.8) приводят к соотношению

$$\xi_{\sigma;\rho;\mu}-\xi_{\sigma;\mu;\rho}-\xi_{\mu;\rho;\sigma}=0.$$

Тогда (13.1.6) принимает вид

$$\xi_{\mu,\rho;\sigma}=-R^{\lambda}_{\sigma\rho\mu}\xi_\lambda. \tag{13.1.9}$$

Следовательно, зная ξ_λ и $\xi_{\lambda;\nu}$ в некоторой точке, можно найти вторые производные от $\xi_\lambda(x)$ в точке X с помощью соотношения (13.1.9), а затем последовательно найти более высокие производные от ξ_λ в точке X, взяв производные от (13.1.9). Все производные от ξ_λ в точке X, таким образом, будут найдены в виде линейных комбинаций $\xi_\lambda(X)$ и $\xi_{\lambda;\nu}(X)$. Тогда функцию $\xi_\lambda(x)$ можно построить (если она существует) в виде ряда Тейлора по $x^\lambda - X^\lambda$ в некоторой окрестности точки X. Эта функция также будет линейной по первоначальным величинам $\xi_\lambda(X)$ и $\xi_{\lambda;\nu}(X)$. Таким образом, любой вектор Киллинга $\xi_\rho{}^n(x)$ метрики $g_{\mu\nu}(x)$ может быть выражен следующим образом:

$$\xi_\rho{}^n(x)=A_\rho{}^\lambda(x;X)\,\xi_\lambda{}^n(X)+B_\rho{}^{\lambda\nu}(x;X)\,\xi_{\lambda;\nu}{}^n(X), \tag{13.1.10}$$

где $A_\rho{}^\lambda$ и $B_\rho{}^{\lambda\nu}$ — функции, которые, конечно, зависят от метрики и от положения точки X, но не зависят от первоначальных величин $\xi_\lambda(X)$ и $\xi_{\lambda;\nu}(X)$, а потому они являются одними и теми же для всех векторов Киллинга. Каждый вектор Киллинга $\xi_\rho(X)$ для данной метрики задается единственным образом значениями $\xi_\rho(X)$ и $\xi_{\rho;\sigma}(X)$ в любой конкретной точке X.

Говорят, что набор векторов Киллинга *независим*, если эти векторы не удовлетворяют никакому линейному соотношению типа

$$\sum_n c_n\xi_\rho{}^n(x)=0, \tag{13.1.11}$$

где c_n — *постоянные* коэффициенты. Выражение (13.1.10) утверждает, что *может существовать не более чем $N(N+1)/2$ независимых векторов Киллинга в N-мерном пространстве.* Рассмотрим, например, какие-либо M векторов Киллинга $\xi_\rho{}^n(x)$. Для каждого n имеется N величин $\xi_\rho{}^n(X)$ и $N(N-1)/2$ независимых величин $\xi^n_{\rho;\nu}(X)$ [вспомним соотношение (13.1.5)], а потому можно считать величины $\xi_\rho{}^n(X)$ и $\xi^n_{\rho;\nu}(X)$ компонентами M векторов в $N(N+1)/2$-мерном пространстве. Если $M > N(N+1)/2$, то эти M векторов не могут быть линейно-независимыми, следовательно, между ними должно существовать соотношение типа

$$\sum_n c_n \xi_\rho{}^n(X) = \sum_n c_n \xi^n_{\rho;\,\nu}(X) = 0.$$

Тогда выражение (13.1.10) утверждает, что векторы Киллинга $\xi_\rho{}^n(x)$ удовлетворяют соотношениям (13.1.11) повсюду, а потому не являются независимыми.

Этот результат имеет смысл только потому, что мы определили независимые векторы Киллинга как векторы, которые не связаны никакими линейными соотношениями с *постоянными* коэффициентами. В некоторой данной точке X в N-мерном пространстве любой набор более чем N векторов Киллинга, конечно, будет связан одним или несколькими линейными соотношениями, подобными (13.1.11). Однако коэффициенты c_n в этих линейных соотношениях иногда могут зависеть от x^μ. Предыдущая теорема утверждает, что любой набор более чем $N(N+1)/2$ векторов Киллинга будет связан линейными соотношениями с постоянными коэффициентами.

Говорят, что метрическое пространство *однородно*, если существуют инфинитезимальные изометрии (13.1.3), которые переводят любую данную точку X в любую другую точку в окрестности точки X. Другими словами, метрика должна допускать существование векторов Киллинга, которые в любой данной точке принимают все возможные значения. В частности, в N-мерном пространстве мы можем задать набор N векторов Киллинга $\xi_\lambda{}^{(\mu)}(x, X)$, обладающих свойством

$$\xi_\lambda{}^{(\mu)}(X;\ X) = \delta_\lambda{}^\mu.$$

Эти векторы, очевидно, являются независимыми, поскольку из любого соотношения типа $c_\mu \xi_\nu{}^{(\mu)}(x;\ X)$ следовало бы, что в точке X все c_λ равны нулю.

Говорят, что метрическое пространство *изотропно* в данной точке X, если существуют инфинитезимальные изометрии (13.1.3), оставляющие фиксированной точку X, так что $\xi^\lambda(X) = 0$, и первые производные $\xi_{\lambda;\,\nu}(X)$ в этой точке принимают все возможные значения, подчиняясь лишь условию антисимметрии (13.1.5). В частности, в N-мерных пространствах можно задать набор

$N(N-1)/2$ векторов Киллинга, подчиняющихся условиям

$$\xi_\lambda{}^{(\mu\nu)}(x;X)\equiv-\xi_\lambda{}^{(\nu\mu)}(x;X),\ \xi_\lambda{}^{(\mu\nu)}(X;X)\equiv 0,$$

$$\xi_{\lambda;\,\rho}{}^{(\mu\nu)}(X;X)\equiv\left[\frac{\partial}{\partial x^\rho}\xi_\lambda{}^{(\mu\nu)}(x;X)\right]_{x=X}\equiv\delta_\lambda{}^\mu\delta_\rho{}^\nu-\delta_\rho{}^\mu\delta_\lambda{}^\nu.$$

Эти векторы являются независимыми, поскольку любое соотношение типа $c_{\mu\nu}\xi_\lambda^{(\mu\nu)}(x;X)=0$, в котором $c_{\mu\nu}=-c_{\nu\mu}$, предполагало бы, что в точке X $c_{\lambda\rho}-c_{\rho\lambda}=2c_{\lambda\rho}=0$.

Мы будем также иметь дело с пространствами, которые изотропны в окрестности каждой точки. В этом случае существуют векторы Киллинга, $\xi_\lambda^{(\mu\nu)}(x;X)$ и $\xi_\lambda^{(\mu\nu)}(x;X+dX)$, которые удовлетворяют найденным выше начальным условиям в точках X и $X+dX$ соответственно. Любая линейная комбинация их будет вектором Киллинга, и, следовательно, $\partial\xi_\lambda^{(\mu\nu)}(x;X)/\partial X^\rho$ также будет вектором Киллинга для этой метрики. Для того чтобы вычислить этот вектор Киллинга в точке $x=X$, необходимо лишь вспомнить, что $\xi_\lambda^{(\mu\nu)}(X;X)$ равняется нулю, следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial X^\rho}\xi_\lambda{}^{(\mu\nu)}(X;X)=\left[\frac{\partial\xi_\lambda{}^{(\mu\nu)}(x;X)}{\partial x^\rho}\right]_{x=X}+\left[\frac{\partial\xi_\lambda{}^{(\mu\nu)}(x;X)}{\partial X^\rho}\right]_{x=X}=0.$$

Это дает

$$\left[\frac{\partial}{\partial X^\rho}\xi_\lambda{}^{(\mu\nu)}(x;X)\right]_{x=X}=-\delta_\lambda{}^\mu\delta_\rho{}^\nu+\delta_\rho{}^\mu\delta_\lambda{}^\nu.$$

Теперь очевидно, что можно построить вектор Киллинга $\xi_\lambda(X)$, принимающий любое произвольное значение a_λ в точке $x=X$; надо лишь задать

$$\xi_\lambda(x)=\frac{a_\nu}{N-1}\frac{\partial}{\partial X^\rho}\xi_\lambda{}^{(\rho\nu)}(x;X).$$

Поэтому *любое пространство, изотропное в окрестности каждой его точки, является также однородным.*

Говорят, что метрика, допускающая максимальное число $N(N+1)/2$ векторов Киллинга, *максимально симметрична.* В частности, пространство, которое и однородно и изотропно в окрестности некоторой заданной точки X, допускает существование $N(N+1)/2$ векторов Киллинга $\xi_\lambda^{(\mu)}(x;X)$ и $\xi_\lambda^{(\mu\nu)}(x;X)$. Такие векторы Киллинга, очевидно, независимы, поскольку если они удовлетворяют линейному соотношению

$$c_\mu\xi_\lambda{}^{(\mu)}(x;X)+c_{\mu\nu}\xi_\lambda{}^{(\mu\nu)}(x;X)=0,$$

$$c_{\mu\nu}=-c_{\nu\mu},$$

то, продифференцировав его по x^ρ и положив $x=X$, приходим к $c_{\lambda\rho}=0$, а положив затем $x=X$ в этом соотношении, получаем

$c_\lambda = 0$. Таким образом, *однородное пространство, изотропное в окрестности некоторой точки, является максимально симметричным.* Из этого также следует, что любое пространство, изотропное в окрестности каждой точки, является максимально симметричным.

Можно также доказать обратное, а именно: максимально симметричное пространство с необходимостью однородно и изотропно в окрестности каждой точки. Если существуют $N(N+1)/2$ независимых векторов Киллинга $\xi^n{}_\lambda(x)$, то можно считать, что величины $\xi^n{}_\rho(X)$, $\xi^n{}_{\lambda;\nu}(X)$ образуют квадратную матрицу, имеющую $N(N+1)/2$ строк, нумеруемых значениями n, и $N(N+1)/2$ столбцов, нумеруемых N значениями величины ρ и $N(N-1)/2$ значениями λ и ν, где $\lambda > \nu$. Кроме того, эта матрица должна иметь неравный нулю детерминант, поскольку любое соотношение типа

$$\sum_n c_n \xi_\rho{}^n(X) = \sum_n c_n \xi_{\lambda;\,\nu}{}^n(X) = 0$$

предполагало бы при наличии (13.1.10), что $\sum\limits_n c_n \xi_\rho{}^n(x)$ исчезает — в противоречии с нашим предположением, что эти векторы Киллинга независимы. Следовательно, должно быть возможным для любого «вектора-строки» с «компонентами» a_μ и $b_{\mu\nu} = -b_{\nu\mu}$, найти решение уравнений

$$\sum_n d_n \xi_\mu{}^n(X) = a_\mu, \qquad \sum_n d_n \xi_{\mu;\,\nu}{}^n(X) = b_{\mu\nu}.$$

Поэтому мы можем определить вектор Киллинга $\xi_\mu(x)$, который в точке X принимает значения a_μ, а $\xi_{\mu;\nu}(X)$ принимает значение $b_{\mu\nu}$, если выберем

$$\xi_\mu(x) = \sum_n d_n \xi_\mu{}^n(x).$$

Но a_μ произвольно, следовательно, пространство однородно; произвольно и $b_{\mu\nu}$ (исключая условие $b_{\mu\nu} = -b_{\nu\mu}$), а потому пространство изотропно в окрестности точки X.

В качестве примера максимально симметричного пространства рассмотрим N-мерное плоское пространство с равным нулю тензором кривизны. Тогда можно выбрать декартовы координаты с постоянной метрикой и равной нулю аффинной связностью. В этой системе координат уравнение (13.1.9) выглядит так:

$$\frac{\partial^2 \xi_\mu}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} = 0.$$

Решение его имеет вид

$$\xi_\mu(x) = a_\mu + b_{\mu\nu} x^\nu,$$

где a_μ и $b_{\mu\nu}$ — константы. Это выражение является вектором Киллинга в соответствии с условием (13.1.5) тогда и только тогда, когда

$$b_{\mu\nu} = -b_{\nu\mu}.$$

Следовательно, можно задать набор $N(N+1)/2$ векторов Киллинга следующим образом:

$$\xi_\mu^{(\nu)}(x) \equiv \delta_\mu{}^\nu, \quad \xi_\mu^{(\nu\lambda)}(x) \equiv \delta_\mu{}^\nu x^\lambda - \delta_\mu^\lambda x^\nu.$$

Тогда произвольный вектор Киллинга выражается в виде комбинации

$$\xi_\mu(x) = a_\nu \xi_\mu^{(\nu)}(x) + b_{\nu\lambda}\xi_\mu^{(\nu\lambda)}(x).$$

N векторов $\xi_\mu^{(\nu)}(x)$ вводят трансляции, в то время как $N(N-1)/2$ векторов $\xi_\mu^{(\nu\lambda)}$ вводят бесконечно малые вращения (или, в пространстве Минковского, лоренцевы преобразования). Таким образом, метрика любого плоского пространства допускает существование $N(N+1)/2$ независимых векторов Киллинга и является, следовательно, максимально симметричной.

Конечно, не все метрики позволяют построить максимальное число векторов Киллинга. Является ли разрешимым (13.1.9) для данного набора начальных данных $\xi_\lambda(X)$, $\xi_{\lambda;\rho}(X)$ или нет, это зависит от интегрируемости данного уравнения, что зависит в свою очередь от рассматриваемой метрики. Одно условие интегрируемости, которое мы будем использовать ниже, следует из общей формулы для коммутаторов ковариантных производных тензоров:

$$\xi_{\rho;\mu;\sigma;\nu} - \xi_{\rho;\mu;\nu;\sigma} = -R^\lambda_{\rho\sigma\nu}\xi_{\lambda;\mu} - R^\lambda_{\mu\sigma\nu}\xi_{\rho;\lambda}.$$

Соотношение (13.1.9) удовлетворяет этому условию тогда и только тогда, когда

$$R^\lambda_{\sigma\rho\mu}\xi_{\lambda;\nu} - R^\lambda_{\nu\rho\mu}\xi_{\lambda;\sigma} + (R^\lambda_{\sigma\rho\mu;\nu} - R^\lambda_{\nu\rho\mu;\sigma})\xi_\lambda = -R^\lambda_{\rho\sigma\nu}\xi_{\lambda;\mu} - R^\lambda_{\mu\sigma\nu}\xi_{\rho;\lambda},$$

или, [см. (13.1.5)], когда

$$[-R^\lambda_{\rho\sigma\nu}\delta^\varkappa_\mu + R^\lambda_{\mu\sigma\nu}\delta^\varkappa_\rho - R^\lambda_{\sigma\rho\mu}\delta^\varkappa_\nu + R^\lambda_{\nu\rho\mu}\delta^\varkappa_\sigma]\,\xi_{\lambda;\varkappa} = [R^\lambda_{\sigma\rho\mu;\nu} - R^\lambda_{\nu\rho\mu;\sigma}]\,\xi_\lambda. \tag{13.1.12}$$

Эти условия, конечно, не накладывают никаких ограничений в случае плоского пространства, но они, вообще говоря, образуют линейные соотношения между ξ_λ и $\xi_{\lambda;\varkappa}$ в любой данной точке. И наоборот, если мы знаем что-нибудь о векторах Киллинга, допускаемых неизвестной метрикой, то мы можем с помощью (13.1.12) получить информацию о тензоре кривизны. Таким путем мы сможем в следующих параграфах найти зависимость максимально симметричных метрик от их изометрических свойств.

Следует подчеркнуть, что существование определенного числа независимых векторов Киллинга не связано с конкретным выбором системы координат. Если $\xi^\mu(x)$ есть вектор Киллинга метрики $g_{\mu\nu}(x)$, то, выполняя преобразование координат $x^\mu \to x'^\mu$, получаем метрику

$$g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} g_{\rho\sigma}(x),$$

а так как (13.1.5) общековариантно, то, очевидно, существует вектор Киллинга

$$\xi'^\mu(x') = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \xi^\nu(x).$$

Если M векторов Киллинга $\xi_\mu{}^n(x)$ являются независимыми, то независимы и M векторов Киллинга $\xi_\mu^{n'}(x')$, так как любое линейное соотношение между $\xi^{n'}$ предполагало бы линейное соотношение между ξ^n. Таким образом, максимальная симметрия данного пространства есть его внутреннее свойство, не зависящее от того, как мы выбираем систему координат. В частности, отсюда следует, что любое пространство с нулевым тензором кривизны максимально симметрично; обратное, однако, не верно. Легко также видеть, что свойство однородности и изотропности данного пространства не зависит от выбора координат. Таким образом мы выполнили задачу, поставленную во введении к этой главе для простых типов симметрии, т. е. описали свойства симметрии метрики общековариантным образом.

§ 2. Максимально симметричные пространства. Единственность

Покажем теперь, что максимально симметричные пространства определяются единственным образом «скалярной кривизной» K и собственными значениями метрики, которые могут быть положительными или отрицательными. Другими словами, *для двух заданных максимально симметричных метрик с одинаковыми K и одинаковым числом собственных значений каждого знака всегда можно отыскать преобразование координат*, которое переводит одну метрику в другую. Зная эту теорему, мы сможем выполнить в следующем параграфе исчерпывающее исследование максимально симметричных пространств, просто строя метрику в удобной системе координат.

В предыдущем параграфе мы показали, что в любой данной точке x максимально симметричного пространства можно найти векторы Киллинга, для которых $\xi_\lambda(x)$ исчезает, а $\xi_{\lambda;\varkappa}(x)$ является произвольной антисимметричной матрицей. Отсюда следует, что