Следует подчеркнуть, что существование определенного числа независимых векторов Киллинга не связано с конкретным выбором системы координат. Если $\xi^\mu(x)$ есть вектор Киллинга метрики $g_{\mu\nu}(x)$, то, выполняя преобразование координат $x^\mu \to x'^\mu$, получаем метрику

$$g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} g_{\rho\sigma}(x),$$

а так как (13.1.5) общековариантно, то, очевидно, существует вектор Киллинга

$$\xi'^\mu(x') = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \xi^\nu(x).$$

Если M векторов Киллинга $\xi_\mu{}^n(x)$ являются независимыми, то независимы и M векторов Киллинга $\xi_\mu^{n'}(x')$, так как любое линейное соотношение между $\xi^{n'}$ предполагало бы линейное соотношение между ξ^n. Таким образом, максимальная симметрия данного пространства есть его внутреннее свойство, не зависящее от того, как мы выбираем систему координат. В частности, отсюда следует, что любое пространство с нулевым тензором кривизны максимально симметрично; обратное, однако, не верно. Легко также видеть, что свойство однородности и изотропности данного пространства не зависит от выбора координат. Таким образом мы выполнили задачу, поставленную во введении к этой главе для простых типов симметрии, т. е. описали свойства симметрии метрики общековариантным образом.

§ 2. Максимально симметричные пространства. Единственность

Покажем теперь, что максимально симметричные пространства определяются единственным образом «скалярной кривизной» K и собственными значениями метрики, которые могут быть положительными или отрицательными. Другими словами, *для двух заданных максимально симметричных метрик с одинаковыми K и одинаковым числом собственных значений каждого знака всегда можно отыскать преобразование координат*, которое переводит одну метрику в другую. Зная эту теорему, мы сможем выполнить в следующем параграфе исчерпывающее исследование максимально симметричных пространств, просто строя метрику в удобной системе координат.

В предыдущем параграфе мы показали, что в любой данной точке x максимально симметричного пространства можно найти векторы Киллинга, для которых $\xi_\lambda(x)$ исчезает, а $\xi_{\lambda;\varkappa}(x)$ является произвольной антисимметричной матрицей. Отсюда следует, что коэффициент при $\xi_{\lambda;\,\varkappa}(x)$ в соотношении (13.1.12) должен иметь равную нулю антисимметричную часть, т. е.

$$-R^{\lambda}_{\rho\sigma\nu}\delta^{\varkappa}_{\mu}+R^{\lambda}_{\mu\sigma\nu}\delta^{\varkappa}_{\rho}-R^{\lambda}_{\sigma\rho\mu}\delta^{\varkappa}_{\nu}+R^{\lambda}_{\nu\rho\mu}\delta^{\varkappa}_{\sigma}=$$
$$=-R^{\varkappa}_{\rho\sigma\nu}\delta^{\lambda}_{\mu}+R^{\varkappa}_{\mu\sigma\nu}\delta^{\lambda}_{\rho}-R^{\varkappa}_{\sigma\rho\mu}\delta^{\lambda}_{\nu}+R^{\varkappa}_{\nu\rho\mu}\delta^{\lambda}_{\sigma}. \qquad (13.2.1)$$

Мы также показали, что в любой данной точке x максимально симметричного пространства существуют векторы Киллинга, для которых $\xi_{\lambda}(x)$ принимает любые значения, какие мы зададим, так что (13.1.12) и (13.2.1) требуют, чтобы

$$R^{\lambda}_{\sigma\rho\mu;\,\nu}=R^{\lambda}_{\nu\rho\mu;\,\sigma}. \qquad (13.2.2)$$

Нам в действительности необходимо использовать лишь (13.2.1), поскольку мы в последнем параграфе показали, что пространство, изотропное в окрестности каждой точки и, следовательно, удовлетворяющее (13.2.1), должно быть однородным, а потому должно также удовлетворять и (13.2.2).

В качестве первого шага в этом доказательстве получим формулу для тензора кривизны с помощью соотношения (13.2.1). Свертывая $\varkappa$ и μ в (13.2.1), получаем

$$-NR^{\lambda}_{\rho\sigma\nu}+R^{\lambda}_{\rho\sigma\nu}-R^{\lambda}_{\sigma\rho\nu}+R^{\lambda}_{\nu\rho\sigma}=-R^{\nu}_{\rho\sigma\nu}+R_{\sigma\rho}\delta^{\lambda}_{\nu}-R_{\nu\rho}\delta^{\lambda}_{\sigma}.$$

(Напомним, что $R^{\varkappa}_{\varkappa\sigma\nu}=0$; $-R^{\varkappa}_{\sigma\rho\varkappa}$ есть тензор Риччи $R_{\sigma\rho}$, и при N измерениях $\delta^{\varkappa}_{\varkappa}=N$.) Используя правило циклических перестановок индексов (6.6.5) и свойство антисимметрии $R^{\lambda}_{\sigma\rho\nu}$, находим

$$(N-1)\,R_{\lambda\rho\sigma\nu}=R_{\nu\rho}g_{\lambda\sigma}-R_{\sigma\rho}g_{\lambda\nu}. \qquad (13.2.3)$$

Но это выражение должно быть антисимметрично и по λ и ρ, а потому

$$R_{\nu\rho}g_{\lambda\sigma}-R_{\sigma\rho}g_{\lambda\nu}=-R_{\nu\lambda}g_{\rho\sigma}+R_{\sigma\lambda}g_{\rho\nu}.$$

Свертывая далее λ и ν, находим

$$R_{\sigma\rho}-NR_{\sigma\rho}=-R^{\lambda}{}_{\lambda}g_{\sigma\rho}+R_{\rho\sigma}.$$

Таким образом, тензор Риччи принимает вид

$$R_{\sigma\rho}=\frac{1}{N}\,g_{\sigma\rho}R^{\lambda}{}_{\lambda}. \qquad (13.2.4)$$

Подставляя это в (13.2.3), находим выражение для тензора кривизны

$$R_{\lambda\rho\sigma\nu}=\frac{R^{\lambda}{}_{\lambda}}{N(N-1)}\,\{g_{\nu\rho}g_{\lambda\sigma}-g_{\sigma\rho}g_{\lambda\nu}\}. \qquad (13.2.5)$$

Это выражение удовлетворяет соотношению (13.2.1), и ничего более с помощью (13.2.1) мы получить не можем.

В пространстве, которое изотропно в окрестности *каждой* точки, выражения (13.2.4) и (13.2.5) будут справедливы везде, и мы можем использовать тождества Бианки, чтобы исследовать зависимость скалярной кривизны $R^\lambda{}_\lambda$ от положения. Подставляя (13.2.4) в (6.8.4), получаем

$$\left[R^\sigma{}_\rho - \frac{1}{2}\,\delta^\sigma{}_\rho R^\lambda{}_\lambda\right]_{;\,\sigma} = \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{2}\right)(R^\lambda{}_\lambda)_{;\,\sigma} = 0,$$

или

$$\left(\frac{1}{N} - \frac{1}{2}\right)\frac{\partial}{\partial x^\sigma} R^\lambda{}_\lambda = 0. \qquad (13.2.6)$$

Следовательно, в любом пространстве трех или более измерений, в котором (13.2.4) справедливо повсюду, $R^\lambda{}_\lambda$ *постоянно*. Вместо $R^\lambda{}_\lambda$ удобно ввести постоянную кривизны K с помощью соотношения

$$R^\lambda{}_\lambda \equiv -N(N-1)\,K. \qquad (13.2.7)$$

Подставляя последнее выражение в (13.2.4), перепишем тензор Риччи и тензор Римана — Кристоффеля в виде

$$R_{\sigma\rho} \equiv -(N-1)\,K g_{\sigma\rho}, \qquad (13.2.8)$$

$$R_{\lambda\rho\sigma\nu} = K\,\{g_{\sigma\rho}g_{\lambda\nu} - g_{\nu\rho}g_{\lambda\sigma}\}. \qquad (13.2.9)$$

В дифференциальной геометрии пространство, обладающее такими свойствами, называют *пространством постоянной кривизны*.

Кроме того, в § 7 гл. 6 мы показали, что тензор кривизны в двух измерениях всегда имеет форму (13.2.5), а потому не удивительно, что в данном случае (13.2.6) не позволяет нам сделать никаких заключений о постоянстве $K^\lambda{}_\lambda$. Однако, используя (13.2.2), можно показать, что величина K в (13.2.9) постоянна и для максимально симметричных пространств с числом измерений $N = 2$.

Предположим теперь, что даны две метрики $g_{\mu\nu}(x)$ и $g'_{\mu\nu}(x')$, обе имеющие одинаковое число положительных и отрицательных собственных значений и обе удовлетворяющие условию (13.2.9) максимально симметричного пространства, т. е.

$$R_{\lambda\rho\sigma\nu} = K\,(g_{\sigma\rho}g_{\lambda\nu} - g_{\nu\rho}g_{\lambda\sigma}), \qquad (13.2.10)$$

$$R'_{\lambda\rho\sigma\nu} = K\,(g'_{\sigma\rho}g'_{\lambda\nu} - g'_{\nu\rho}g'_{\lambda\sigma}), \qquad (13.2.11)$$

где скалярная кривизна одна и та же в обоих случаях. Покажем, что $g_{\mu\nu}(x)$ и $g'_{\mu\nu}(x')$ должны быть эквивалентными в том смысле, что существует преобразование $x \to x'$, которое превращает $g_{\mu\nu}(x)$ в $g'_{\mu\nu}(x')$, т. е.

$$g'_{\mu\nu}(x')\,\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}\,\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma} = g_{\rho\sigma}(x). \qquad (13.2.12)$$

Докажем это путем реального построения $x'^{\mu}(x)$ в виде степенного ряда по x^{μ}. Прежде всего заметим, что равенство числа положительных и отрицательных собственных значений $g_{\mu\nu}$ и $g'_{\mu\nu}$ означает, что можно найти несингулярную матрицу $d^{\mu}{}_{\rho}$, для которой

$$g'_{\mu\nu}(0)\, d^{\mu}{}_{\rho}\, d^{\nu}{}_{\sigma} = g_{\rho\sigma}(0). \qquad (13.2.13)$$

(Обоснование здесь то же, что и в § 4 гл. 6.) Таким образом, мы можем удовлетворить (13.2.12) в *нулевом* порядке по x с помощью

$$x'^{\mu} = d^{\mu}{}_{\rho} x^{\rho}.$$

Теперь воспользуемся математической индукцией. Предположим, что нам удалось удовлетворить (13.2.12) в порядке $n-1$ по x^{μ} полиномом

$$x'^{\mu}(x) = d^{\mu}{}_{\rho} x^{\rho} + \sum_{m=2}^{n} \frac{1}{m!}\, d^{\mu}_{\rho_1 \ldots \rho_m} x^{\rho_1} \ldots x^{\rho_m}. \qquad (13.2.14)$$

Добавим член порядка $n+1$ по x^{μ}, чтобы (13.2.12) было установлено в n-м порядке. Это условие будет удовлетворено, если производная (13.2.12) установлена в порядке $n-1$, т. е. если

$$\frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}\partial x^{\lambda}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\sigma}} g'_{\mu\nu}(x') + \frac{\partial^2 x'^{\nu}}{\partial x^{\sigma}\partial x^{\lambda}} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}} g'_{\mu\nu}(x') + \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial x'^{\varkappa}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial g'_{\mu\nu}(x')}{\partial x'^{\varkappa}} = \frac{\partial g_{\rho\sigma}(x)}{\partial x^{\lambda}} \quad \text{в порядке } x^{n-1}.$$

Это будет выполняться тогда (и, по существу, только тогда), когда справедливо равенство

$$\frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}\partial x^{\lambda}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\sigma}} g'_{\mu\nu}(x') = g_{\sigma\tau}(x)\, \Gamma^{\tau}_{\lambda\rho}(x) - \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial x'^{\varkappa}}{\partial x^{\lambda}} g'_{\nu\eta}(x)\, \Gamma'^{\eta}_{\mu\varkappa}(x') \quad \text{в порядке } x^{n-1}.$$

Это необходимо доказать лишь в порядке $n-1$ по x^{μ}, так что мы можем использовать (13.2.12), предполагая, что оно установлено в этом порядке, и превратить его в эквивалентное требование

$$\frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}\, \partial x^{\lambda}} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\varkappa}} \Gamma^{\varkappa}_{\lambda\rho}(x) - \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x'^{\varkappa}}{\partial x^{\lambda}} \Gamma'^{\mu}_{\nu\varkappa}(x') \quad \text{в порядке } x^{n-1}. \qquad (13.2.15)$$

Мы можем использовать (13.2.14), которое справедливо в порядке x^n, чтобы вычислить член порядка x^{n-1} в правой части. Выпишем член порядка $n-1$:

$$\left[\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\varkappa}}\Gamma^{\varkappa}_{\lambda\rho}(x)-\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\rho}}\frac{\partial x'^{\varkappa}}{\partial x^{\lambda}}\Gamma'^{\mu}_{\nu\varkappa}(x')\right]=$$

$$=\frac{1}{(n-1)!}c^{\mu}_{\lambda\rho\sigma_1\ldots\sigma_{n-1}}x^{\sigma_1}\ldots x^{\sigma_{n-1}}, \qquad (13.2.16)$$

причем коэффициенты $c^{\mu}_{\lambda\rho\ldots}$ зависят весьма сложным образом от функций $g_{\mu\nu}(x)$ и $g'_{\mu\nu}(x')$ и от ранее найденных коэффициентов $d^{\mu}_{\rho_1\ldots\rho_m}$. Тогда (13.2.15) будет удовлетворено в порядке $n-1$, если мы прибавим к (13.2.14) член порядка $n+1$

$$[x'^{\mu}(x)]=\frac{1}{(n+1)!}c^{\mu}_{\lambda\rho\sigma_1\ldots\sigma_{n-1}}x^{\lambda}x^{\rho}x^{\sigma_1}\ldots x^{\sigma_{n-1}} \qquad (13.2.17)$$

при условии, что коэффициент $c^{\mu}_{\lambda\rho\sigma_1\ldots\sigma_{n-1}}$ полностью симметричен по всем его нижним индексам. Эти коэффициенты, очевидно, симметричны при перестановке λ и ρ или индексов среди σ_m, так что единственное условие, которому надо удовлетворить,— это чтобы данный коэффициент был симметричен по λ и любому σ_m или, эквивалентно, чтобы производная (13.2.16) по x^{σ} была симметрична по λ и σ:

$$\frac{\partial}{\partial x^{\sigma}}\left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\varkappa}}\Gamma^{\varkappa}_{\lambda\rho}(x)-\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\rho}}\frac{\partial x'^{\varkappa}}{\partial x^{\lambda}}\Gamma'^{\mu}_{\nu\varkappa}(x')\right)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}\left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\varkappa}}\Gamma^{\varkappa}_{\sigma\rho}(x)-\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\rho}}\frac{\partial x'^{\varkappa}}{\partial x^{\sigma}}\Gamma'^{\mu}_{\nu\varkappa}(x')\right) \text{ в порядке } x^{n-2}. \qquad (13.2.18)$$

Так как предполагается, что выражение (13.2.12) установлено в порядке x^{n-1}, выражение для его производной (13.2.15) будет справедливо в порядке x^{n-2}, а потому мы можем воспользоваться (13.2.12) и (13.2.15), чтобы переписать (13.2.18) в виде эквивалентного требования:

$$\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\varkappa}}R^{\varkappa}_{\rho\lambda\eta}(x)=\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\rho}}\frac{\partial x'^{\varkappa}}{\partial x^{\lambda}}\frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\eta}}R'^{\mu}_{\nu\varkappa\sigma}(x') \text{ в порядке } x^{n-2}. \qquad (13.2.19)$$

Теперь воспользуемся выражениями (13.2.10) и (13.2.11), которые позволяют ввести вместо (13.2.19) эквивалентное требование:

$$\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\eta}}g_{\lambda\rho}(x)-\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\lambda}}g_{\rho\eta}(x)=$$

$$=\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\rho}}\left(\frac{\partial x'^{\varkappa}}{\partial x^{\lambda}}\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\eta}}g'_{\nu\varkappa}(x')-\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\lambda}}\frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\eta}}g'_{\nu\sigma}(x')\right) \text{ в порядке } x^{n-2}. \qquad (13.2.20)$$

Это условие действительно удовлетворено, ибо предполагалось, что (13.2.12) установлено в порядке x^{n-1}. Как уже говорилось, это означает, что (13.2.19) установлено в порядке x^{n-2}. Отсюда следует, что (13.2.18) справедливо в порядке x^{n-2}, что в свою очередь означает полную симметрию коэффициентов $c^{\mu}{}_{\lambda\rho\sigma_1\ldots\sigma_m}$ по их нижним индексам. Из симметрии вытекает, что (13.2.17) удовлетворяет (13.2.15), откуда следует, что путем прибавления (13.2.17) к (13.2.14) мы можем удовлетворить (13.2.12) в порядке x^n. Таким образом, если (13.2.12) может быть удовлетворено в порядке x^{n-1} полиномом $x'(x)$ порядка $n+1$, то его можно удовлетворить в порядке x^n полиномом $x'(x)$ порядка $n+1$, и, следовательно, функция $x'(x)$, удовлетворяющая (13.2.12), действительно может быть построена как степенной ряд, что и требовалось доказать.

§ 3. Максимально симметричные пространства. Построение

Максимально симметричные пространства, по существу, единственны, так что мы можем узнать о них все путем построения любых примеров пространства произвольной кривизны K. Имеется довольно очевидный путь выполнения такого построения (фиг. 13.1). Рассмотрим плоское $(N+1)$-мерное пространство с метрикой

$$-d\tau^2 \equiv g_{AB}\, dx^A\, dx^B = C_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu + K^{-1}\, dz^2, \tag{13.3.1}$$

где $C_{\mu\nu}$ — постоянная $N \times N$-матрица, а K — некая константа. Можно вложить неевклидово N-мерное пространство в это более широкое пространство, ограничивая значения переменных x^μ и z поверхностью сферы (или псевдосферы):

$$KC_{\mu\nu}x^\mu x^\nu + z^2 = 1. \tag{13.3.2}$$

На этой поверхности dz^2 выражается следующим образом:

$$dz^2 = \frac{K^2\,(C_{\mu\nu}x^\mu\, dx^\nu)^2}{z^2} = \frac{K^2\,(C_{\mu\nu}x^\mu\, dx^\nu)^2}{(1-KC_{\mu\nu}x^\mu x^\nu)},$$

и, следовательно, (13.3.1) имеет вид

$$-d\tau^2 = C_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu + \frac{K\,(C_{\mu\nu}x^\mu\, dx^\nu)^2}{(1-KC_{\rho\sigma}x^\rho x^\sigma)}. \tag{13.3.3}$$

Тогда метрика имеет вид

$$g_{\mu\nu}(x) = C_{\mu\nu} + \frac{K}{(1-KC_{\rho\sigma}x^\rho x^\sigma)}\, C_{\mu\lambda}x^\lambda C_{\nu\varkappa}x^\varkappa. \tag{13.3.4}$$

Плоское пространство оказывается частный случай при $K = 0$.

Из этого построения следует очевидный вывод, что (13.3.4) допускает $[N(N+1)/2]$-параметрическую группу изометрий (13.3.1), так как и $(N+1)$-мерный линейный элемент (13.3.1) и условие «вложения» (13.3.2) явно инвариантны относительно