следует, что (13.2.18) справедливо в порядке x^{n-2}, что в свою очередь означает полную симметрию коэффициентов $c^{\mu}{}_{\lambda\rho\sigma_1\ldots\sigma_m}$ по их нижним индексам. Из симметрии вытекает, что (13.2.17) удовлетворяет (13.2.15), откуда следует, что путем прибавления (13.2.17) к (13.2.14) мы можем удовлетворить (13.2.12) в порядке x^n. Таким образом, если (13.2.12) может быть удовлетворено в порядке x^{n-1} полиномом $x'(x)$ порядка $n+1$, то его можно удовлетворить в порядке x^n полиномом $x'(x)$ порядка $n+1$, и, следовательно, функция $x'(x)$, удовлетворяющая (13.2.12), действительно может быть построена как степенной ряд, что и требовалось доказать.

§ 3. Максимально симметричные пространства. Построение

Максимально симметричные пространства, по существу, единственны, так что мы можем узнать о них все путем построения любых примеров пространства произвольной кривизны K. Имеется довольно очевидный путь выполнения такого построения (фиг. 13.1). Рассмотрим плоское $(N+1)$-мерное пространство с метрикой

$$-d\tau^2 \equiv g_{AB}\,dx^A\,dx^B = C_{\mu\nu}\,dx^\mu\,dx^\nu + K^{-1}\,dz^2, \qquad (13.3.1)$$

где $C_{\mu\nu}$ — постоянная $N\times N$-матрица, а K — некая константа. Можно вложить неевклидово N-мерное пространство в это более широкое пространство, ограничивая значения переменных x^μ и z поверхностью сферы (или псевдосферы):

$$KC_{\mu\nu}x^\mu x^\nu + z^2 = 1. \qquad (13.3.2)$$

На этой поверхности dz^2 выражается следующим образом:

$$dz^2 = \frac{K^2\,(C_{\mu\nu}x^\mu\,dx^\nu)^2}{z^2} = \frac{K^2\,(C_{\mu\nu}x^\mu\,dx^\nu)^2}{(1-KC_{\mu\nu}x^\mu x^\nu)},$$

и, следовательно, (13.3.1) имеет вид

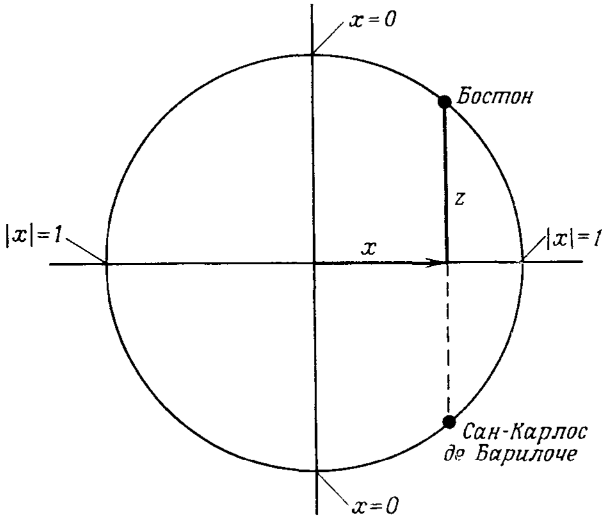
$$-d\tau^2 = C_{\mu\nu}\,dx^\mu\,dx^\nu + \frac{K\,(C_{\mu\nu}x^\mu\,dx^\nu)^2}{(1-KC_{\rho\sigma}x^\rho x^\sigma)}. \qquad (13.3.3)$$

Тогда метрика имеет вид

$$g_{\mu\nu}(x) = C_{\mu\nu} + \frac{K}{(1-KC_{\rho\sigma}x^\rho x^\sigma)}\,C_{\mu\lambda}x^\lambda C_{\nu\varkappa}x^\varkappa. \qquad (13.3.4)$$

Плоское пространство оказывается частный случай при $K=0$.

Из этого построения следует очевидный вывод, что (13.3.4) допускает $[N(N+1)/2]$-параметрическую группу изометрий (13.3.1), так как и $(N+1)$-мерный линейный элемент (13.3.1) и условие «вложения» (13.3.2) явно инвариантны относительно



Фиг. 13.1. Представление точек сферы путем проектирования их на экваториальную плоскость.

Отметим, что каждой спроецированной точке с данными координатами x^i соответствуют две точки на сфере.

жестких «вращений» ($N+1$)-мерного пространства, т. е. относительно преобразований

$$x^{\mu} \to x'^{\mu} = R^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} + R^{\mu}{}_{z} z, \tag{13.3.5}$$

$$z \to z' = R^{z}{}_{\mu} z^{\mu} + R^{z}{}_{z} z, \tag{13.3.6}$$

где $R^{A}{}_{B}$ — постоянные, удовлетворяющие соотношениям

$$C_{\mu\nu} R^{\mu}{}_{\rho} R^{\nu}{}_{\sigma} + K^{-1} R^{z}{}_{\rho} R^{z}{}_{\sigma} = C_{\rho\sigma}, \tag{13.3.7}$$

$$C_{\mu\nu} R^{\mu}{}_{\rho} R^{\nu}{}_{z} + K^{-1} R^{z}{}_{\rho} R^{z}{}_{z} = 0, \tag{13.3.8}$$

$$C_{\mu\nu} R^{\mu}{}_{z} R^{\nu}{}_{z} + K^{-1} (R^{z}{}_{z})^2 = K^{-1}. \tag{13.3.9}$$

Удобно различать два класса простых преобразований, задаваемых (13.3.7) — (13.3.9):

$$\text{A.} \qquad R^{\mu}{}_{\nu} = \mathscr{R}^{\mu}{}_{\nu}, \quad R^{\mu}{}_{z} = R^{z}{}_{\mu} = 0, \quad R^{z}{}_{z} = 1, \tag{13.3.10}$$

где $\mathscr{R}^{\mu}{}_{\nu}$ — любая $N \times N$-матрица, подчиняющаяся соотношению

$$C_{\mu\nu} \mathscr{R}^{\mu}{}_{\rho} \mathscr{R}^{\nu}{}_{\sigma} = C_{\rho\sigma}. \tag{13.3.11}$$

Это условие соответствует жестким «вращениям» относительно начала координат

$$x'^{\mu} = \mathscr{R}^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}; \tag{13.3.12}$$

$$\text{Б.}\quad R^{\mu}{}_{z}=a^{\mu},\quad R^{z}{}_{\mu}=-KC_{\mu\nu}a^{\nu},\quad R^{z}{}_{z}=(1-KC_{\rho\sigma}a^{\rho}a^{\sigma})^{1/2}, \tag{13.3.13}$$

$$R^{\mu}{}_{\nu}=\delta^{\mu}{}_{\nu}-bKC_{\nu\rho}a^{\rho}a^{\mu}, \tag{13.3.14}$$

где a^{μ} произвольно, за исключением того, что, так как R^{z}_{z} должно быть действительным, должны выполняться соотношения

$$KC_{\rho\sigma}a^{\rho}a^{\sigma}\leqslant 1 \tag{13.3.15}$$

и

$$b\equiv\frac{1-(1-KC_{\rho\sigma}a^{\rho}a^{\sigma})^{1/2}}{KC_{\rho\sigma}a^{\rho}a^{\sigma}}. \tag{13.3.16}$$

Эти преобразования можно назвать «квазитрансляциями», поскольку

$$x'^{\mu}=x^{\mu}+a^{\mu}\left[(1-KC_{\rho\sigma}x^{\rho}x^{\sigma})^{1/2}-bKC_{\rho\sigma}x^{\rho}a^{\sigma}\right]. \tag{13.3.17}$$

В частности, они переводят начало координат $x^{\mu}=0$ в точку a^{μ}.

Существование изометрий (13.3.17), которые переводят начало координат в любую точку (по крайней мере внутри конечной области), означает, что рассматриваемое пространство *однородно*, т. е. любая точка геометрически подобна любой другой точке. (Это свойство явно не видно в нашей системе координат, точно так же как на карте Земли в полярной проекции не видно, что кривизна Земли одна и та же как в Массачусетсе, так и на Северном полюсе.) Существование изометрий (13.3.10), которые включают все жесткие «вращения» относительно начала координат, означает, что рассматриваемое пространство *изотропно* относительно начала координат. Если же учесть, что метрика однородна, то пространство является изотропным в каждой точке, т. е. максимально симметричным.

Можно построить векторы Киллинга для этой метрики, устремляя конечные преобразования (13.3.5) и (13.3.6) к тождественным Сначала рассмотрим преобразования А и положим

$$\mathcal{R}^{\mu}{}_{\nu}=\delta^{\mu}{}_{\nu}+\varepsilon\Omega^{\mu}{}_{\nu},\qquad |\varepsilon|\ll 1,$$

$$C_{\mu\sigma}\Omega^{\mu}{}_{\rho}+C_{\rho\mu}\Omega^{\mu}{}_{\sigma}=0. \tag{13.3.18}$$

Сравнивая это с (13.1.3), получаем векторы Киллинга в виде

$$\xi^{\mu}{}_{\Omega}(x)=\Omega^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu}. \tag{13.3.19}$$

Рассмотрим теперь преобразование Б и положим

$$a^{\mu}=\varepsilon\alpha^{\mu},\qquad |\varepsilon|\ll 1.$$

Сравнивая последнее с (13.1.3), находим соответствующий вектор Киллинга

$$\xi^{\mu}{}_{\alpha}(x)=\alpha^{\mu}\left[1-KC_{\mu\nu}x^{\mu}x^{\nu}\right]^{1/2}. \tag{13.3.20}$$

Читатель может убедиться в том, что (13.3.19) и (13.3.20) действительно удовлетворяют условиям Киллинга (13.1.5). Имеется $N(N-1)/2$ независимых параметров [т. е. N^2 элементов $\Omega^{\mu}{}_{\gamma}$, отвечающих $N(N+1)/2$ условиям (13.3.18)] и N параметров a^{μ}, так что рассматриваемая метрика позволяет построить $N(N+1)/2$ независимых векторов Киллинга, подтверждающих наличие максимальной симметрии.

Геодезические, соответствующие этой метрике, имеют замечательно простой вид. С помощью (13.3.4) легко вычислить, что аффинная связность равна

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} = K x^{\mu} g_{\nu\lambda}, \tag{13.3.21}$$

так что дифференциальное уравнение для геодезических выглядит так:

$$\frac{d^2 x^{\mu}}{d\tau^2} + K x^{\mu} = 0. \tag{13.3.22}$$

Решение его — это линейные комбинации $\sin(\tau\sqrt{K})$ и $\cos(\tau\sqrt{K})$ для $K>0$ или $\operatorname{sh}(\tau\sqrt{-K})$ и $\operatorname{ch}(\tau\sqrt{-K})$ для $K<0$.

Можно выявить внутренние свойства данного пространства, вычисляя его тензор кривизны. Непосредственные вычисления, использующие выражения (6.6.2) и (13.2.21), дают тензор Римана — Кристоффеля для метрики (13.3.4) в виде

$$R_{\varkappa\nu\rho\sigma} = K\left[C_{\varkappa\sigma}C_{\nu\rho} - C_{\varkappa\rho}C_{\nu\sigma}\right] +$$
$$+ K^2\left[1 - KC_{\mu\lambda}x^{\mu}x^{\lambda}\right]^{-1}\left[C_{\varkappa\sigma}x_{\nu}x_{\rho} - C_{\varkappa\rho}x_{\nu}x_{\sigma} + C_{\nu\rho}x_{\varkappa}x_{\sigma} - C_{\nu\sigma}x_{\rho}x_{\varkappa}\right]$$

(где $X_{\nu} \equiv C_{\nu\mu}X^{\mu}$) или

$$R_{\varkappa\nu\rho\sigma} = K\left[g_{\rho\nu}g_{\varkappa\sigma} - g_{\sigma\nu}g_{\varkappa\rho}\right]$$

в соответствии с выражением (13.2.9). Поэтому постоянная K в выражениях (13.3.1) и (13.3.2) та же самая, что и постоянная кривизны, используемая в предыдущем параграфе.

Так как K — инвариантный параметр, мы не можем заменить метрику (13.3.4) подобной метрикой с отличным K с помощью преобразований координат. Напротив, из выражения (13.3.3) следует, что с помощью линейной трансформации

$$x^{\mu} = A^{\mu}{}_{\nu}x'^{\nu}$$

можно преобразовать метрику (13.3.4) в подобную метрику с тем же самым K и $C_{\mu\nu}$, замененным на

$$C'_{\mu\nu} = A^{\rho}{}_{\mu}A^{\sigma}{}_{\nu}C_{\rho\sigma}.$$

Из обсуждения, проведенного в § 6 гл. 3, вытекает, что таким способом можно заменить $C_{\mu\nu}$ любой действительной симметричной матрицей по нашему желанию, имеющей, однако, те же самые числа положительных и отрицательных собственных значений Числа собственных значений каждого знака матрицы $C_{\mu\nu}$ те же самые, что и у матрицы $g_{\mu\nu}$ в точке $x = 0$, и, следовательно, те же самые, что и во всем пространстве, поскольку все его точки эквивалентны.

N-мерная метрика, позволяющая ввести локальные евклидовы системы координат (в противоположность, скажем, системе Минковского), будет иметь все собственные значения положительными, а потому для $K \neq 0$ можно считать $C_{\mu\nu}$ равной $|K|^{-1}$, умноженной на единичную матрицу. В этом случае (13.3.3) примет вид

$$ds^2 = K^{-1}\left[d\mathbf{x} + \frac{(\mathbf{x}\cdot d\mathbf{x})^2}{1-\mathbf{x}^2}\right] \text{ для } K > 0 \qquad (13.3.23)$$

или

$$ds^2 = |K|^{-1}\left[d\mathbf{x}^2 - \frac{(\mathbf{x}\cdot d\mathbf{x})^2}{1+\mathbf{x}^2}\right] \text{ для } K < 0. \qquad (13.3.24)$$

Для $K = 0$ можно положить $C_{\mu\nu}$ равной просто единичной матрице; тогда (13.3.3) дает

$$ds^2 = d\mathbf{x}^2 \quad \text{для} \quad K = 0. \qquad (13.3.25)$$

(Здесь используются N-мерные обозначения векторов. Мы заменили также $-d\tau^2$ собственной длиной ds^2, поскольку в данном примере интересуемся скорее геометрией, чем физикой.) Перейдем теперь к исследованию *глобальных* свойств этих пространств.

Для $K > 0$ удобнее вернуться к интерпретации (13.3.23) как метрики кривого пространства, вложенного с помощью (13.3.2) в плоское пространство (13.3.1). Будем считать, что (13.3.23) описывает поверхность

$$\mathbf{x}^2 + z^2 = 1 \qquad (13.3.26)$$

в плоском пространстве, где интервал имеет вид

$$ds^2 = K^{-1}\,[d\mathbf{x}^2 + dz^2]. \qquad (13.3.27)$$

Очевидно, что эта метрика соответствует просто поверхности сферы с радиусом $K^{-1/2}$ в $(N+1)$-мерном пространстве. [Чтобы сделать координаты $\mathbf{x}$ и z истинно евклидовыми, произведем замены $\mathbf{x}' = K^{-1/2}\mathbf{x}$ и $z' = K^{-1/2}z$. Тогда (13.3.26) будет выглядеть так: $\mathbf{x}'^2 + z'^2 = K^{-1}$.] Так, в двумерном пространстве можно ввести угловые координаты θ, φ, задавая

$$x_1 = \sin\theta\cos\varphi, \qquad x_2 = \sin\theta\sin\varphi,$$

и (13.3.27) тогда принимает известный вид линейного элемента на сфере с радиусом $K^{-1/2}$:

$$ds^2 = K^{-1}[d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2]. \tag{13.3.28}$$

Вообще говоря, значения переменных $\mathbf{x}$ ограничены следующим образом:

$$\mathbf{x}^2 \leqslant 1.$$

Однако в действительности каждое $\mathbf{x}$ соответствует *двум* точкам, по числу корней уравнения (13.3.26) для z. (Например, в двумерном пространстве компоненты $\mathbf{x}$ — это координаты точек сферы, спроецированные на касательную плоскость. На карте Земли в полярной проекции Бостон, таким образом, оказывается в той же самой точке, что и Сан-Карлос де Барилоче в Аргентине.) Объем N-мерного пространства описывается (13.3.23) и, следовательно, равняется

$$V_N = 2\int\limits_{\mathbf{x}^2\leqslant 1} \sqrt{g}\, dx_1 \ldots dx_N = 2K^{-N/2}\int\limits_{\mathbf{x}^2\leqslant 1} \frac{dx_1 \ldots dx_N}{[1-\mathbf{x}^2]^{1/2}}.$$

Непосредственное вычисление дает

$$V_N = \frac{2\pi^{(N+1)/2}}{\Gamma((N+1)/2)} K^{-N/2}. \tag{13.3.29}$$

Например, $V_1 = 2\pi K^{-1/2}$ есть периметр окружности радиусом $K^{-1/2}$, а $V_2 = 4\pi K^{-1}$ есть площадь сферы радиусом $K^{-1/2}$. Трехмерное пространство постоянной положительной кривизны имеет объем

$$V_3 = 2\pi^2 K^{-3/2}.$$

Можно также вычислить длину окружности на такой сфере, используя в качестве геодезических решения уравнения (13.3.22), которое теперь имеет вид

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2} + K\mathbf{x} = 0. \tag{13.3.30}$$

Решения, проходящие через точку $\mathbf{x} = 0$, запишутся в виде

$$\mathbf{x} = \mathbf{e}\sin(sK^{1/2}), \tag{13.3.31}$$

где для того, чтобы удовлетворить (13.3.23), положено

$$\mathbf{e}^2 = 1. \tag{13.3.32}$$

Если мы начнем двигаться с «Северного полюса» $\mathbf{x} = 0$ вдоль геодезической, мы достигнем «экватора» $\mathbf{x} = \mathbf{e}$ при $s = \pi K^{-1/2}/2$, «Южного полюса» $\mathbf{x} = 0$ при $s = \pi K^{-1/2}$, достигнем противоположной точки $\mathbf{x} = -\mathbf{e}$ на «экваторе» при $s = 3\pi K^{-1/2}/2$ и вернемся в начальную точку при $s = 2\pi K^{-1/2}$. Таким образом, длина геодезической, охватывающей все пространство и возвращающейся в ту же точку, равняется

$$L = 2\pi K^{-1/2} \tag{13.3.33}$$

в пространстве произвольного числа измерений с постоянной положительной кривизной. Это вычисление наглядно показывает, что пространство, задаваемое (13.3.23), *конечно*, но не *ограничено*; когда мы достигаем кажущейся сингулярности при $\mathbf{x}^2 = 1$, то мы просто проходим через нее, но уже с z, равным корню того же уравнения (13.3.26) с обратным знаком.

При $K < 0$ метрика (13.3.24) не имеет даже кажущейся сингулярности и ничто не ограничивает координаты $\mathbf{x}$. В этом можно убедиться, вычисляя геодезические, которые, согласно уравнениям (13.3.30) и (13.3.24), имеют в данном случае следующий вид:

$$\mathbf{x} = \mathbf{e}\, \mathrm{sh}\, (s\, (-K)^{1/2}), \tag{13.3.34}$$

$$\mathbf{e}^2 = 1. \tag{13.3.35}$$

Можно, очевидно, пройти вдоль этой геодезической неограниченное расстояние, выйдя из начала координат. Для $N = 2$ это пространство совпадает с тем, что было открыто Гауссом, Бойяи и Лобачевским. [См. § 1 гл. 1. Для того чтобы задать метрику в форме (1.1.9) модели Клейна, необходимо ввести новый набор координат x'^i, определяемый $\mathbf{x}' = \mathbf{x}\,(1 + \mathbf{x}^2)^{-1/2}$.] Из (13.3.1) и (13.3.2) видно, что эта геометрия отвечает следующей поверхности в плоском пространстве:

$$-\mathbf{x}^2 + z^2 = 1, \tag{13.3.36}$$

где

$$ds^2 = |K|^{-1}\, [d\mathbf{x}^2 - dz^2]. \tag{13.3.37}$$

Знак минус в (13.3.37) означает, что это плоское пространство не является евклидовым. Теперь понятно, что геометрия Гаусса — Бойяи — Лобачевского не могла быть открыта до тех пор, пока геометры не научились думать о кривых поверхностях не как о подпространствах обычного евклидова пространства, но как о пространствах, характеризуемых их собственными внутренними метрическими соотношениями.

Наконец, возвратимся к пространству-времени и исследуем структуру четырехмерной максимально симметричной метрики с тремя положительными и одним отрицательным собственными значениями. В этом случае можно положить

$$C_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}. \tag{13.3.38}$$

Тогда метрика примет вид

$$-d\tau^2 = d\mathbf{x}^2 - dt^2 + \frac{K\,(\mathbf{x}\cdot d\mathbf{x} - t\,dt)^2}{1 - K\,(\mathbf{x}^2 - t^2)}. \tag{13.3.39}$$

При $K > 0$ можно ввести координаты, в которых *пространственная* часть метрики оказывается плоской, а именно

$$t = \frac{1}{\sqrt{K}} \left[\frac{Kr'^2}{2} \operatorname{ch}(K^{1/2}t') + \left(1 + \frac{Kr'^2}{2}\right) \operatorname{sh}(K^{1/2}t') \right], \tag{13.3.40}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}' \exp(K^{1/2}t').$$

Тогда (13.3.39) записывается следующим образом:

$$d\tau^2 = dt'^2 - \exp(2K^{1/2}t')\, d\mathbf{x}'^2. \tag{13.3.41}$$

Можно также ввести координаты, в которых метрика оказывается не зависящей от времени, т. е.

$$t'' = t' - \frac{1}{2K^{1/2}} \ln[1 - K\mathbf{x}'^2 \exp(2K^{1/2}t')],$$

$$\mathbf{x}'' = \mathbf{x}' \exp(K^{1/2}t'). \tag{13.3.42}$$

Тогда (13.3.41) принимает вид

$$d\tau^2 = (1 - K\mathbf{x}''^2)\, dt''^2 - d\mathbf{x}''^2 - \frac{K(\mathbf{x}'' \cdot d\mathbf{x}'')^2}{1 - K\mathbf{x}''^2}. \tag{13.3.43}$$

Такую метрику впервые обсуждал де Ситтер [2], она явится основой нашего рассмотрения стационарной космологической модели в гл. 14.

Следует еще раз подчеркнуть, что хотя и кажется, что максимально симметричная метрика (13.3.4) возникает произвольным образом, в действительности она представляет собой наиболее общий возможный случай максимально симметричной метрики, поскольку теорема единственности из предыдущего параграфа утверждает, что любая другая максимально симметричная метрика может быть приведена к виду (13.3.4) с помощью надлежащего преобразования координат.

§ 4. Тензоры в максимально симметричном пространстве

Предположение о максимальной симметрии может быть отнесено не только к метрике пространства, но и к любому тензорному полю, содержащемуся в пространстве. Говорят, что тензорное поле $T_{\mu\nu\ldots}$ является *форминвариантным* относительно преобразования $x \to x'$, если $T'_{\mu\nu}\ldots(x')$ — та же самая функция его аргумента x'^{μ}, что и $T_{\mu\nu\ldots}(x)$ ее аргумента x^{μ}, т. е.

$$T'_{\mu\nu\ldots}(y) = T_{\mu\nu\ldots}(y) \quad \text{для всех } y. \tag{13.4.1}$$