При $K > 0$ можно ввести координаты, в которых *пространственная* часть метрики оказывается плоской, а именно

$$t = \frac{1}{\sqrt{K}}\left[\frac{Kr'^2}{2}\operatorname{ch}(K^{1/2}t') + \left(1 + \frac{Kr'^2}{2}\right)\operatorname{sh}(K^{1/2}t')\right], \tag{13.3.40}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}' \exp(K^{1/2}t').$$

Тогда (13.3.39) записывается следующим образом:

$$d\tau^2 = dt'^2 - \exp(2K^{1/2}t')\, d\mathbf{x}'^2. \tag{13.3.41}$$

Можно также ввести координаты, в которых метрика оказывается не зависящей от времени, т. е.

$$t'' = t' - \frac{1}{2K^{1/2}}\ln\left[1 - K\mathbf{x}'^2 \exp(2K^{1/2}t')\right],$$

$$\mathbf{x}'' = \mathbf{x}' \exp(K^{1/2}t'). \tag{13.3.42}$$

Тогда (13.3.41) принимает вид

$$d\tau^2 = (1 - K\mathbf{x}''^2)\, dt''^2 - d\mathbf{x}''^2 - \frac{K(\mathbf{x}'' \cdot d\mathbf{x}'')^2}{1 - K\mathbf{x}''^2}. \tag{13.3.43}$$

Такую метрику впервые обсуждал де Ситтер [2], она явится основой нашего рассмотрения стационарной космологической модели в гл. 14.

Следует еще раз подчеркнуть, что хотя и кажется, что максимально симметричная метрика (13.3.4) возникает произвольным образом, в действительности она представляет собой наиболее общий возможный случай максимально симметричной метрики, поскольку теорема единственности из предыдущего параграфа утверждает, что любая другая максимально симметричная метрика может быть приведена к виду (13.3.4) с помощью надлежащего преобразования координат.

§ 4. Тензоры в максимально симметричном пространстве

Предположение о максимальной симметрии может быть отнесено не только к метрике пространства, но и к любому тензорному полю, содержащемуся в пространстве. Говорят, что тензорное поле $T_{\mu\nu\ldots}$ является *форминвариантным* относительно преобразования $x \to x'$, если $T'_{\mu\nu}\ldots(x')$ — та же самая функция его аргумента x'^{μ}, что и $T_{\mu\nu\ldots}(x)$ ее аргумента x^{μ}, т. е.

$$T'_{\mu\nu\ldots}(y) = T_{\mu\nu\ldots}(y) \quad \text{для всех } y. \tag{13.4.1}$$

В любой данной точке преобразованный тензор задается обычной формулой

$$T_{\mu\nu\ldots}(x) = \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} \ldots T'_{\rho\sigma\ldots}(x'),$$

а потому условие форминвариантности (13.4.1) выглядит так:

$$T_{\mu\nu\ldots}(x) = \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} \ldots T_{\rho\sigma\ldots}(x'). \tag{13.4.2}$$

При инфинитезимальном преобразовании

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \varepsilon\xi^{\mu}(x), \qquad |\varepsilon| \ll 1,$$

условие (13.4.2) в первом порядке по ε принимает вид

$$0 = \frac{\partial\xi^{\rho}(x)}{\partial x^{\mu}} T_{\rho\nu\ldots}(x) + \frac{\partial\xi^{\sigma}(x)}{\partial x^{\nu}} T_{\mu\sigma\ldots}(x) + \\ + \ldots + \xi^{\lambda}(x) \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} T_{\mu\nu\ldots}(x) \tag{13.4.3}$$

(т. е. *производная Ли* от $T_{\mu\nu\ldots}$ по ξ^{λ} равняется нулю; см. § 9 гл. 10). Тензор в максимально симметричном пространстве, удовлетворяющий (13.4.3) для всех $N(N+1)/2$ независимых векторов Киллинга $\xi^{\lambda}(x)$, будет называться *максимально форминвариантным*.

Для скаляра $S(x)$ соотношение (13.4.3) выглядит просто как

$$\xi^{\lambda}(x) \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} S(x) = 0. \tag{13.4.4}$$

Если скаляр является максимально форминвариантным, то $\xi^{\lambda}(x)$ в любой данной точке может принимать любое значение и, следовательно, (13.4.4) требует, чтобы S было постоянным:

$$\frac{\partial S}{\partial x^{\lambda}} = 0. \tag{13.4.5}$$

Для любого другого максимально форминвариантного тензора удобно сначала выбрать векторы Киллинга $\xi^{\lambda}(x)$, которые в данной точке X удовлетворяют условию

$$\xi^{\lambda}(X) = 0$$

и для которых величины

$$\xi_{\sigma;\mu}(X) = g_{\sigma\rho}(X) \left(\frac{\partial\xi^{\rho}(x)}{\partial x^{\mu}}\right)_{x=X}$$

образуют произвольную антисимметричную матрицу. Тогда в точке $x = X$ уравнение (13.4.3) записывается следующим образом:

$$0 = \xi_{\sigma;\tau}\{\delta^{\tau}_{\mu} T^{\sigma}{}_{\nu\ldots} + \delta^{\tau}_{\nu} T_{\mu}{}^{\sigma}{}_{\ldots} + \ldots\}.$$

Так как $\xi_{\sigma;\,\tau}$ — произвольная антисимметричная матрица, коэффициент при ней должен быть симметричным по σ и τ:

$$\delta_\mu^\tau T^\sigma{}_{\nu\ldots} + \delta_\nu^\tau T_\mu{}^\sigma{}_{\ldots} + \ldots = \delta_\mu^\sigma T^\tau{}_{\nu\ldots} + \delta_\nu^\sigma T_\mu{}^\tau{}_{\ldots} + \ldots . \tag{13.4.6}$$

Поскольку X было произвольным, это условие должно выполняться повсюду.

Для максимально форминвариантного вектора $A_\mu(x)$ соотношение (13.4.6) принимает вид

$$\delta_\mu^\tau A^\sigma = \delta_\mu^\sigma A^\tau .$$

Свертывая μ и τ, находим, что в N-мерном пространстве выполняется

$$NA^\sigma = A^\sigma .$$

Отсюда, исключая тривиальный случай $N = 1$, следует

$$A^\sigma = 0. \tag{13.4.7}$$

Для максимально форминвариантного тензора второго ранга $B_{\mu\nu}$ уравнение (13.4.6) выглядит так:

$$\delta_\mu{}^\tau B^\sigma{}_\nu + \delta_\nu{}^\tau B_\mu{}^\sigma = \delta_\mu{}^\sigma B^\tau{}_\nu + \delta^\sigma{}_\nu B_\mu{}^\tau .$$

Свертывание τ с μ дает

$$NB^\sigma{}_\nu + B_\nu{}^\sigma = B^\sigma{}_\nu + \delta^\sigma{}_\nu B_\mu{}^\mu ,$$

а понижение индекса σ приводит к условию

$$(N-1)\, B_{\sigma\nu} + B_{\nu\sigma} = g_{\sigma\nu} B_\mu{}^\mu . \tag{13.4.8}$$

Вычитая отсюда подобное соотношение с переставленными ν и σ, получаем

$$(N-2)\,(B_{\sigma\nu} - B_{\nu\sigma}) = 0,$$

т. е., если $N \neq 2$, тензор $B_{\sigma\nu}$ должен быть симметричным:

$$B_{\sigma\nu} = B_{\nu\sigma}. \tag{13.4.9}$$

(При двух измерениях $B_{\sigma\nu}$ может иметь антисимметричную часть, пропорциональную $g^{-1/2}\varepsilon_{\mu\nu}$; см. § 4 гл. 4.) Подставляя (13.4.9) в (13.4.8), находим, что для $N \geqslant 3$ (и для симметричной части $B_{\sigma\nu}$ при $N = 2$) выполняется соотношение

$$B_{\sigma\nu} = f g_{\sigma\nu}, \tag{13.4.10}$$

где

$$f \equiv \frac{1}{N} B_\mu{}^\mu .$$

Чтобы отыскать зависимость f от координат, можно подставить (13.4.10) снова в условие форминвариантности (13.4.3):

$$0 = \frac{\partial \xi^\rho}{\partial x^\mu} f g_{\rho\nu} + \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\nu} f g_{\mu\rho} + \xi^\lambda \frac{\partial}{\partial x^\lambda} (f g_{\mu\nu}).$$

Но $g_{\mu\varphi}$ удовлетворяет условию Киллинга (13.1.4), что дает

$$0 = g_{\mu\nu} \xi^\lambda \frac{\partial f}{\partial x^\lambda}.$$

В максимально симметричном пространстве можно в любой данной точке придать ξ^λ любое значение и, следовательно,

$$\frac{\partial f}{\partial x^\lambda} = 0. \tag{13.4.11}$$

Таким образом, *единственный максимально форминвариантный тензор второго ранга — это метрический тензор, возможно, умноженный на какую-нибудь постоянную.*

§ 5. Пространство с максимально симметричными подпространствами

Во многих физически важных случаях все пространство (или пространство-время) не является максимально симметричным, но может быть разложено на максимально симметричные подпространства. Например, сферически-симметричное трехмерное пространство может быть представлено как набор сферических поверхностей с центрами в начале координат, каждая из которых описывается метрикой (13.3.28). В гл. 14 мы рассмотрим такие типы пространства-времени, для которых метрика сферически-симметрична и однородна в каждой «плоскости» постоянного времени.

В этом параграфе мы увидим, что максимальная симметрия набора подпространств накладывает очень сильные ограничения на метрику всего пространства. Для того чтобы сформулировать и доказать это положение, прежде всего выберем удобную систему координат. Если все пространство имеет N измерений, а его максимально симметричные подпространства M-мерны, то мы можем маркировать эти подпространства $N - M$ координатами, обозначаемыми v^a, и задавать точки внутри каждого подпространства с M координатами u^i. Ряд примеров приведен в табл. 13.1.

Мы говорим, что подпространства с постоянными v^a являются максимально симметричными, если метрика всего пространства инвариантна относительно группы инфинитезимальных преобразований

$$u^i \to u'^i = u^i + \varepsilon \xi^i (u, v), \tag{13.5.1}$$

$$v^a \to v'^a = v^a, \tag{13.5.2}$$