

Чтобы отыскать зависимость f от координат, можно подставить (13.4.10) снова в условие форминвариантности (13.4.3):

$$0 = \frac{\partial \xi^\rho}{\partial x^\mu} f g_{\rho\nu} + \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\nu} f g_{\mu\rho} + \xi^\lambda \frac{\partial}{\partial x^\lambda} (f g_{\mu\nu}).$$

Но $g_{\mu\nu}$ удовлетворяет условию Киллинга (13.1.4), что дает

$$0 = g_{\mu\nu} \xi^\lambda \frac{\partial f}{\partial x^\lambda}.$$

В максимально симметричном пространстве можно в любой данной точке придать ξ^λ любое значение и, следовательно,

$$\frac{\partial f}{\partial x^\lambda} = 0. \quad (13.4.11)$$

Таким образом, единственный максимально форминвариантный тензор второго ранга — это метрический тензор, возможно, умноженный на какую-нибудь постоянную.

§ 5. Пространство с максимально симметричными подпространствами

Во многих физически важных случаях все пространство (или пространство-время) не является максимально симметричным, но может быть разложено на максимально симметричные подпространства. Например, сферически-симметричное трехмерное пространство может быть представлено как набор сферических поверхностей с центрами в начале координат, каждая из которых описывается метрикой (13.3.28). В гл. 14 мы рассмотрим такие типы пространства-времени, для которых метрика сферически-симметрична и однородна в каждой «плоскости» постоянного времени.

В этом параграфе мы увидим, что максимальная симметрия набора подпространств накладывает очень сильные ограничения на метрику всего пространства. Для того чтобы сформулировать и доказать это положение, прежде всего выберем удобную систему координат. Если все пространство имеет N измерений, а его максимально симметричные подпространства M -мерны, то мы можем маркировать эти подпространства $N - M$ координатами, обозначаемыми v^a , и задавать точки внутри каждого подпространства с M координатами u^i . Ряд примеров приведен в табл. 13.1.

Мы говорим, что подпространства с постоянными v^a являются максимально симметричными, если метрика всего пространства инвариантна относительно группы инфинитезимальных преобразований

$$u^i \rightarrow u'^i = u^i + \epsilon \xi^i(u, v), \quad (13.5.1)$$

$$v^a \rightarrow v'^a = v^a, \quad (13.5.2)$$

Таблица 13.1

Примеры пространства с максимально симметричными подпространствами

Пример	v -координата	u -координата
Сферически-симметричное пространство	r	θ, φ
Сферически-симметричное пространство-время	r, t	θ, φ
Сферически-симметричное и однородное пространство-время	t	r, θ, φ

где ξ^i являются $M(M+1)/2$ независимыми векторами Киллинга. Это преобразования общего вида (13.1.3), но с той особенностью, что v^a являются инвариантами, а потому

$$\xi^a(u, v) = 0. \quad (13.5.3)$$

Заметим, что хотя эти преобразования действуют только на переменные u , нет никаких причин, по которым эти правила преобразований не могли бы зависеть параметрически от величин v^a , соответствующих данному трансформируемому подпространству. Наше утверждение о том, что имеется $M(M+1)/2$ «независимых» векторов Киллинга, следует понимать в том смысле, что существует $M(M+1)/2$ векторов Киллинга, не связанных никакими линейными соотношениями, в которых коэффициенты не зависят от u .

Общее положение, определяющее структуру таких пространств, формулируется в виде следующей теоремы. Всегда можно выбрать такие координаты, что метрика всего пространства задается формулой

$$-d\tau^2 \equiv g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{ab}(v) dv^a dv^b + f(v) \tilde{g}_{ij}(u) du^i du^j, \quad (13.5.4)$$

где $g_{ab}(v)$ и $f(v)$ — функции только v -координат, а $\tilde{g}_{ij}(u)$ — функция только u -координат и сама по себе является метрикой M -мерного максимально симметричного пространства. (Обозначение суммирования здесь прежнее, причем a, b, \dots пробегают $N - M$ значений номеров координат v , а i, j, k, l, \dots пробегают M значений номеров координат u .)

Начиная доказательство, запишем условие того, что (13.5.1) есть изометрия всего пространства $g_{\mu\nu}(x)$. Это условие удобно использовать здесь в его первоначальной форме (13.1.4), а не в более изящной ковариантной форме записи (13.1.5). Каждый индекс μ, ν, ρ, \dots в (13.1.4) теперь пробегает $N - M$ значений номеров координат v^a и M значений номеров u^i , а потому (13.1.4) записывается теперь в виде трех отдельных уравнений.

Для $\rho = i, \sigma = j$ имеем

$$0 = \frac{\partial \xi^k(u, v)}{\partial u^i} g_{kj}(u, v) + \frac{\partial \xi^k(u, v)}{\partial v^j} g_{ki}(u, v) + \\ + \xi^k(u, v) \frac{\partial g_{ij}(u, v)}{\partial u^k}. \quad (13.5.5)$$

Для $\rho = i, \sigma = a$ имеем

$$0 = \frac{\partial \xi^k(u, v)}{\partial u^i} g_{ka}(u, v) + \frac{\partial \xi^k(u, v)}{\partial v^a} \times \\ \times g_{ik}(u, v) + \xi^k(u, v) \frac{\partial g_{ia}(u, v)}{\partial u^k}. \quad (13.5.6)$$

Для $\rho = a, \sigma = b$ имеем

$$0 = \frac{\partial \xi^k(u, v)}{\partial v^a} g_{kb}(u, v) + \frac{\partial \xi^k(u, v)}{\partial v^b} \times \\ \times g_{ka}(u, v) + \xi^k(u, v) \frac{\partial g_{ab}(u, v)}{\partial v^k}. \quad (13.5.7)$$

Первое из этих трех уравнений говорит просто о том, что $g_{ij}(u, v)$ должно быть для каждого фиксированного набора v^a метрикой M -мерного пространства с координатами u^i , которая допускает существование векторов Киллинга ξ^i . Мы предполагаем здесь, что существует $M(M+1)/2$ таких независимых векторов Киллинга; из этого следует, что подматрица $g_{ij}(u, v)$ является в свою очередь максимально симметричной метрикой для каждого набора фиксированных v^a . Из обсуждения, проведенного в § 1 гл. 13, вытекает, что для любой данной точки u_0 можно найти векторы Киллинга $\xi^k(u, v)$, причем $\xi^k(u_0, v)$ и $\xi_{k;l}(u_0, v)$ принимают произвольные значения, удовлетворяющие единственному требованию, чтобы $\xi_{k;l} = -\xi_{l;k}$. Таким образом, метрика $g_{ij}(u, v)$ является для каждого v однородной по u и изотропной в любой точке.

Два других уравнения содержат информацию об остальных элементах g_{ai} и g_{ab} , а также о зависимости векторов Киллинга от v . (Зависимость от v не совсем произвольна. Например, справедливо следующее утверждение: переопределением координат u всегда можно добиться того, чтобы метрика $g_{ij}(u, v)$ имела независимые от v векторы Киллинга $\xi^i(u)$, а векторы Киллинга $\xi^i(u, v)$ всего пространства были бы, вообще говоря, линейными комбинациями $\xi^i(u)$, причем коэффициенты в них могли бы зависеть от координат v .) Для того чтобы извлечь информацию, содержащуюся в (13.5.6) и (13.5.7), очень удобно перейти к новому набору координат $u^{i'}(u, v)$ в максимально симметричных подпространствах так, чтобы g'_{ja} равнялись нулю. Предположим, что можно

найти функцию $U^k(v; u_0)$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению

$$g_{ik}(U, v) \frac{\partial U^k}{\partial v^a} = -g_{ia}(U, v) \quad (13.5.8)$$

с начальным условием

$$U^k(v_0; u_0) \equiv u_0^k \quad (13.5.9)$$

в некоторой точке v_0^a . Тогда координаты u'^i, v'^a определяются соотношением

$$u^i = U^i(v'; u'), \quad (13.5.10)$$

$$v^a = v'^a. \quad (13.5.11)$$

В этой системе координат метрика имеет вид

$$\begin{aligned} g'_{ja}(u', v') &= \frac{\partial u^l}{\partial u'^j} \frac{\partial u^k}{\partial v'^a} g_{lk}(u, v) + \frac{\partial u^l}{\partial u'^j} g_{la}(u, v) = \\ &= \frac{\partial U^l(v'; u')}{\partial u'^j} \left\{ \frac{\partial U^k(v'; u')}{\partial v'^a} g_{lk}(U, v') + g_{la}(U, v') \right\}, \end{aligned}$$

и, таким образом, уравнение (13.5.8) приводит к результату

$$g'_{ia} = 0. \quad (13.5.12)$$

Следовательно, можно построить координаты u' , в которых g'_{ia} равняется нулю, если существуют решения дифференциального уравнения (13.5.8) с произвольными начальными условиями (13.5.9).

Перепишем (13.5.8) в эквивалентной форме:

$$\frac{\partial U^k}{\partial v^a} = -F^k_a(U, v), \quad (13.5.13)$$

где

$$F^k_a(U, v) \equiv \bar{g}^{ki}(U, v) g_{ia}(U, v), \quad (13.5.14)$$

а \bar{g}^{ij} — матрица, обратная g_{ij} , т. е.

$$\bar{g}^{ij} \bar{g}_{jk} = \delta_k^i. \quad (13.5.15)$$

(Черта должна напоминать, что ij -элемент матрицы \bar{g}^{ij} , обратной к g_{ij} , не равен ij -элементу g^{ij} матрицы $g^{\mu\nu}$, обратной к $g_{\mu\nu}$.) Когда имеется только одна координата v (как в случае, рассмотренном в главе, посвященной космологии), очевидно, что уравнение (13.5.13) может быть решено при произвольных начальных условиях. В общем случае для того, чтобы доказать, что (13.5.13) интегрируемо, надо проделать некоторую работу. Применим тот же метод, что и в § 2 этой главы. Попытаемся решить уравнение (13.5.13) в окрестности v_0 с помощью разложения

по степеням $v - v_0$:

$$U^k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} c_{a_1 \dots a_n}^k (v - v_0)^{a_1} \dots (v - v_0)^{a_n}. \quad (13.5.16)$$

Ясно, что начальные условия (13.5.9) удовлетворяются, если выбрать коэффициент при $n = 0$ в виде

$$c^k = u_0^k,$$

и уравнение (13.5.13) удовлетворяется в нулевом порядке по $v - v_0$, если выбрать

$$c^k_a = -F^k_a(u_0, v_0).$$

Теперь, продолжая по индукции, предположим, что можно выбрать члены из (13.5.16), вплоть до членов порядка $(v - v_0)^n$, так что (13.5.13) удовлетворяется с точностью до $(v - v_0)^{n-1}$. Тогда можно использовать эти члены для вычисления вклада порядка $(v - v_0)^n$ в $F^k_a(U, v)$. Запишем его в виде

$$[F^k_a(U(v; u_0), v)]_{\text{порядка } n} = \frac{1}{n!} f_{ab_1 \dots b_n}^k (v - v_0)^{b_1} \dots (v - v_0)^{b_n}.$$

В этом случае (13.5.16) будет удовлетворять (13.5.13) с точностью до членов порядка $(v - v_0)^n$, если представить вклад в U порядка $n+1$ как

$$[U^k(v; u_0)]_{\text{порядка } n+1} = \frac{1}{(n+1)!} f_{ab_1 \dots b_n}^k (v - v_0)^a (v - v_0)^{b_1} \dots (v - v_0)^{b_n},$$

с условием, что f симметрично по всем его индексам. Так как $f_{ab_1 \dots b_n}^k$ можно, очевидно, выбрать симметричным по индексам b , достаточно потребовать, чтобы оно было также симметричным при перестановках a и любого b или, эквивалентно, чтобы величина

$$\left[\frac{\partial}{\partial v^b} F^k_a(U(v; u_0), v) \right]_{\text{порядка } n-1}$$

была симметричной по a и b . Но предполагается, что U удовлетворяет (13.5.13) в порядке $(v - v_0)^{n-1}$, а потому предыдущее требование выполняется, если величина

$$\left[-\frac{\partial F^k_a(u, v)}{\partial u^l} F^l_b(u, v) + \frac{\partial F^k_a(u, v)}{\partial v^b} \right]_{u=U(v, u_0)}$$

симметрична по a и b . Итак, приходим к выводу, что (13.5.13) интегрируемо, если выполняется соотношение

$$\begin{aligned} \frac{\partial F^k_a(u, v)}{\partial u^l} F^l_b(u, v) - \frac{\partial F^k_a(u, v)}{\partial v^b} &= \\ &= \frac{\partial F^k_b(u, v)}{\partial u^l} F^l_a(u, v) - \frac{\partial F^k_b(u, v)}{\partial v^a} \end{aligned} \quad (13.5.17)$$

при всех u и v .

Для того чтобы доказать, что (13.5.17) действительно справедливо, вспомним условие (13.5.6) для вектора Киллинга. Умно-

иная его на \bar{g}^{il} , получаем

$$\frac{\partial \xi^l}{\partial v^a} = -\bar{g}^{il} \frac{\partial \xi^m}{\partial u^i} g_{ma} - \bar{g}^{il} \xi^k \frac{\partial g_{ia}}{\partial u^k}.$$

Умножая далее (13.5.5) на $\bar{g}^{il} \cdot \bar{g}^{jm}$, имеем

$$\bar{g}^{il} \frac{\partial \xi^m}{\partial u^i} + \bar{g}^{jm} \frac{\partial \xi^l}{\partial u^j} = -\xi^k \bar{g}^{il} \bar{g}^{jm} \frac{\partial g^{ij}}{\partial u^k} = \xi^k \frac{\partial \bar{g}^{lm}}{\partial u^k},$$

а потому

$$\frac{\partial \xi^l}{\partial v^a} = \bar{g}^{jm} \frac{\partial \xi^l}{\partial u^j} g_{ma} - \xi^k \frac{\partial \bar{g}^{lm}}{\partial u^k} g_{ma} - \xi^k \bar{g}^{lm} \frac{\partial g_{ma}}{\partial u^k}.$$

Привлекая (13.5.14), можно переписать это выражение так:

$$\frac{\partial \xi^l}{\partial v^a} = F^j_a \frac{\partial \xi^l}{\partial u^j} - \xi^k \frac{\partial F^l_a}{\partial u^k}. \quad (13.5.18)$$

Теперь продифференцируем его по v^b и найдем

$$\frac{\partial^2 \xi^l}{\partial v^b \partial v^a} = F^j_a \frac{\partial}{\partial u^j} \left(\frac{\partial \xi^l}{\partial v^b} \right) + \frac{\partial F^j_a}{\partial v^b} \frac{\partial \xi^l}{\partial u^j} - \frac{\partial \xi^k}{\partial v^b} \frac{\partial F^l_a}{\partial u^k} - \xi^k \frac{\partial^2 F^l_a}{\partial v^b \partial u^k},$$

а подставляя (13.5.18) в правую часть, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi^l}{\partial v^b \partial v^a} &= F^j_a F^i_b \frac{\partial^2 \xi^l}{\partial u^j \partial u^i} + F^j_a \frac{\partial F^i_b}{\partial u^j} \frac{\partial \xi^l}{\partial u^i} - F^j_a \frac{\partial F^l_b}{\partial u^k} \frac{\partial \xi^k}{\partial u^j} - \\ &- F^j_a \frac{\partial^2 F^l_b}{\partial u^k \partial u^j} \xi^k + \frac{\partial F^j_a}{\partial v^b} \frac{\partial \xi^l}{\partial u^j} - F^i_b \frac{\partial F^l_a}{\partial u^k} \frac{\partial \xi^k}{\partial u^i} + \\ &+ \frac{\partial F^k_b}{\partial u^i} \frac{\partial F^l_a}{\partial u^k} \xi^i - \frac{\partial^2 F^l_a}{\partial v^b \partial u^k} \xi^k. \end{aligned}$$

Но это последнее выражение должно быть симметрично по a и b ; следовательно, справедливо

$$\begin{aligned} 0 &= \left\{ F^j_a \frac{\partial F^i_b}{\partial u^j} - F^i_b \frac{\partial F^j_a}{\partial u^j} + \frac{\partial F^i_a}{\partial v^b} - \frac{\partial F^i_b}{\partial v^a} \right\} \frac{\partial \xi^l}{\partial u^i} + \\ &+ \left\{ -F^j_a \frac{\partial^2 F^l_b}{\partial u^k \partial u^j} + F^j_b \frac{\partial^2 F^l_a}{\partial u^k \partial u^j} + \frac{\partial F^i_b}{\partial u^k} \frac{\partial F^l_a}{\partial u^i} - \right. \\ &\left. - \frac{\partial F^i_a}{\partial u^k} \frac{\partial F^l_b}{\partial u^i} - \frac{\partial^2 F^l_a}{\partial v^b \partial u^k} + \frac{\partial^2 F^l_b}{\partial v^a \partial u^k} \right\} \xi^k. \quad (13.5.19) \end{aligned}$$

Мы уже отмечали, что наше предположение о существовании $M(M+1)/2$ независимых векторов Киллинга позволяет в любой данной точке найти векторы Киллинга, для которых ξ^k исчезают и $\xi_{k;j} = g_{kl} \partial \xi^l / \partial u^i$ является произвольной антисимметричной матрицей. В частности, можно в любой данной точке выбрать ξ^i так, чтобы выполнялось условие

$$\xi^k = 0,$$

$$\xi_{k;i} = g_{kl} \frac{\partial \xi^l}{\partial x^i} = \delta_{km} \delta_{in} - \delta_{kn} \delta_{im}.$$

Поэтому, умножая (13.4.19) на g_{kl} и полагая $k = n \neq m$, находим

$$F^j{}_a \frac{\partial F^m{}_b}{\partial u^j} - F^j{}_b \frac{\partial F^m{}_a}{\partial u^j} = \frac{\partial F^m{}_b}{\partial v^a} - \frac{\partial F^m{}_a}{\partial v^b},$$

что и является искомым соотношением (13.5.17). Коэффициент при ξ^i в (13.5.19) также должен равняться нулю, но здесь это не существенно.

Возвратимся теперь к главной линии нашего доказательства. Показав справедливость (13.5.17), мы теперь знаем, что (13.5.13) интегрируемо. Поэтому можно построить координаты u'^i и v'^a , определяемые (13.5.10) и (13.5.11), в которых компоненты метрики g_{ia} равны нулю. Выполнив это и опустив штрихи, запишем

$$g_{ia} = 0. \quad (13.5.20)$$

Условия для векторов Киллинга (13.5.6) и (13.5.7) теперь выглядят так:

$$0 = \frac{\partial \xi^k}{\partial v^a} g_{ik}, \quad (13.5.21)$$

$$0 = \xi^k \frac{\partial g_{ab}}{\partial u^k}. \quad (13.5.22)$$

Так как g_{ik} несингулярно, из условия (13.5.21) следует, что

$$\frac{\partial \xi^k}{\partial v^a} = 0. \quad (13.5.23)$$

Мы отмечали также, что в каждой точке можно найти векторы Киллинга, для которых ξ_k принимают любые произвольные значения, а потому коэффициент при ξ^k в (13.5.22) должен равняться нулю:

$$\frac{\partial g_{ab}}{\partial u^k} = 0. \quad (13.5.24)$$

Теперь остается только показать, что $g_{ij}(u, v)$ не зависит от v или эта зависимость определяется множителем $f(v)$. Воспользуемся тем фактом, что для любого фиксированного v_0 имеется $M(M+1)/2$ независимых векторов Киллинга, соответствующих метрике $g_{ij}(u, v_0)$, которые, согласно (13.5.23), являются также векторами Киллинга для $g_{ij}(u, v)$ при любом v . Каждый из этих векторов Киллинга $\xi^i(u)$ будет тогда удовлетворять (13.5.5) для $v = v_0$ и при любом v :

$$0 = \frac{\partial \xi^k(u)}{\partial u^i} g_{kj}(u, v_0) + \frac{\partial \xi^k(u)}{\partial u^j} g_{ki}(u, v_0) + \xi^k(u) \frac{\partial g_{ij}(u, v_0)}{\partial u^k},$$

$$0 = \frac{\partial \xi^k(u)}{\partial u^i} g_{kj}(u, v) + \frac{\partial \xi^k(u)}{\partial u^j} g_{ki}(u, v) + \xi^k(u) \frac{\partial g_{ij}(u, v)}{\partial u^k}.$$

Можно интерпретировать эти два уравнения, сказав, что $g_{ij}(u, v)$ — максимальный форминвариантный тензор [в смысле

формулы (13.4.3)] в максимально симметричном пространстве с метрикой $g_{ij}(u, v_0)$. Тогда из этого следует, согласно выражениям (13.4.10) и (13.4.11), что тензор $g_{ij}(u, v)$ пропорционален метрике $g_{ij}(u, v_0)$, причем коэффициент пропорциональности не зависит от u , т. е.

$$g_{ij}(u, v) = f(v, v_0) g_{ij}(u, v_0).$$

Значение v_0 может быть фиксировано произвольным образом, так что мы можем его вообще не писать:

$$g_{ij}(u, v) = f(v) \tilde{g}_{ij}(u), \quad (13.5.25)$$

где

$$f(v) \equiv f(v, v_0), \quad \tilde{g}_{ij}(u) \equiv g_{ij}(u, v_0). \quad (13.5.26)$$

Собирая (13.5.20), (13.5.24) и (13.5.25), убеждаемся, что метрика $g_{\mu\nu}(u, v)$ действительно имеет форму, задаваемую (13.5.4), (13.5.26) и (13.5.5), где $v = v_0$ показывает, что $\tilde{g}_{ij}(u)$ — максимально симметричная метрика, как было доказано.

Эту теорему можно было бы также доказать при явно более слабом предположении, что все пространство разбивается на подпространства, изотропные в каждой точке. Это предположение означает, что в любой точке u_0 , v можно найти векторы Киллинга всего пространства с $\xi^a = 0$, для которых ξ^i исчезают в точке u_0 , v и для которых $\xi_{i;k}$ в точке u_0 , v — это произвольная антисимметричная матрица. В частности, можно найти M ($M = 1$)/2 векторов Киллинга $\xi^{(lm)}(u, v; u_0)$, причем

$$\begin{aligned} \xi^{a(lm)}(u, v; u_0) &= 0 \\ \xi^{i(lm)}(u, v; u_0) &= -\xi^{i(ml)}(u, v; u_0), \end{aligned}$$

для которых справедливо соотношение

$$\xi_{i;j}^{(lm)}(u_0, v; u_0) \equiv g_{ik}(u_0, v) \left(\frac{\partial \xi^{k(lm)}(u, v; u_0)}{\partial u^j} \right)_{u=u_0} = \delta_i^l \delta_j^m - \delta_i^m \delta_j^l.$$

Можно затем ввести

$$\xi^{\mu(l)}(u, v; u_0) \equiv \frac{\partial}{\partial u_0^m} \xi^{\mu(lm)}(u, v; u_0),$$

и аргументы, приведенные в § 1 этой главы, указывают на то, что это векторы Киллинга *всего пространства*, причем

$$\xi^{a(l)}(u, v; u_0) = 0$$

а

$$\xi^{i(l)}(u_0, v; u_0) = -\frac{1}{(N-1)} \bar{g}^{il}(u_0, v).$$

Существование $M(M+1)/2$ независимых векторов Киллинга $\xi^{\mu(lm)}$ и $\xi^{\mu(l)}$ показывает, что пространство действительно обладает максимально симметричными подпространствами.

Во всех практических важных случаях максимально симметричные подпространства являются *пространствами*, которые в противоположность пространству-времени имеют положительные собственные значения подматрицы g_{ij} . В этом случае для того, чтобы вычислить $\tilde{g}_{ij} du^i du^j$, можно использовать (13.3.23), (13.3.24) или (13.3.25), что дает

$$-d\tau^2 = g_{ab}(v) dv^a dv^b + f(v) \left\{ du^2 + \frac{k(u \cdot du)^2}{1 - ku^2} \right\}, \quad (13.5.27)$$

где $f(v)$ положительно и

$$k = \begin{cases} +1, & \text{если } K > 0, \\ -1, & \text{если } K < 0, \\ 0, & \text{если } K = 0, \end{cases} \quad (13.5.28)$$

где K — скалярная кривизна максимально симметричного подпространства. [Ранее в (13.3.23) и (13.3.24) мы включили скалярную кривизну $|K|^{-1}$ в функцию $f(v)$.] Воспользуемся теперь полученным выражением для рассмотрения частных случаев, перечисленных в табл. 13.1.

A. Сферически-симметричное пространство. Предположим, что размерность пространства $N = 3$, что все собственные значения его метрики положительны и что оно имеет максимально симметричные двумерные подпространства положительной кривизны. Тогда имеется одна координата v , которую обозначим r , и две координаты u , которые определим через углы θ и ϕ следующим образом:

$$u^1 = \sin \theta \cos \phi, \quad u^2 = \sin \theta \sin \phi. \quad (13.5.29)$$

Тогда при $k = 1$ выражение (13.5.27) принимает вид

$$ds^2 = g(r) dr^2 + f(r) \{d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2\}, \quad (13.5.30)$$

где $f(r)$ и $g(r)$ — положительные функции от r .

B. Сферически-симметричное пространство-время. Предположим, что размерность всего пространства-времени $N = 4$, что три собственных значения его метрики положительны и одно отрицательно и что пространство-время обладает максимально симметричными двумерными подпространствами, метрики которых имеют положительные собственные значения и положительную кривизну. Тогда имеются две координаты v , которые можно назвать r и t , и две координаты u , которые можно заменить на θ

и φ , как в (13.5.29). Тогда при $k = 1$ выражение (13.5.27) принимает вид

$$-d\tau^2 = g_{tt}(r, t) dt^2 + 2g_{rt}(r, t) dr dt + \\ + g_{rr}(r, t) dr^2 + f(r, t) \{ d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2 \}, \quad (13.5.31)$$

где $f(r, t)$ — положительная функция, а $g_{ij}(r, t)$ — матрица 2×2 с одним положительным и одним отрицательным собственными значениями.

В. Сферически-симметричное однородное пространство-время. Предположим, что размерность всего пространства-времени $N = 4$, что три собственных значения его метрики положительны, а одно отрицательно и что имеются максимально симметричные трехмерные подпространства, метрики которых имеют положительные собственные значения и произвольную кривизну. Тогда существует одна координата v и три координаты u , и (13.5.27) выглядит так:

$$-d\tau^2 = g(v) dv^2 + f(v) \left\{ du^2 + \frac{k(u \cdot du)^2}{1 - ku^2} \right\}.$$

Здесь $f(v)$ — положительная функция, а $g(v)$ — отрицательная функция от v . Очень удобно ввести новые координаты t, v, θ, φ с помощью соотношений:

$$\int (-g(v))^{1/2} dv \equiv t, \\ u^1 \equiv r \sin \theta \cos \varphi, \\ u^2 \equiv r \sin \theta \sin \varphi, \\ u^3 \equiv r \cos \theta.$$

Получаем

$$d\tau^2 = dt^2 - R^2(t) \left\{ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right\}, \quad (13.5.32)$$

где $R(t) \equiv \sqrt{f(v)}$.

Первые два примера показывают, как можно отразить сущность сферической симметрии с помощью качественного описания пространства (или пространства-времени), задавая размерность, знаки собственных значений, кривизны и максимальную симметрию подпространства. Метрики (13.5.30) и (13.5.31) — как раз те, что мы ожидали бы получить на основании более элементарных соображений: (13.5.31) служило даже отправным пунктом в § 7 гл. 11.

Однако наш третий пример приводит к выводу, который было не столь легко предвидеть. Конечно, выражение (13.5.32) уже

было получено в § 9 гл. 11 как метрика внутри сферически-симметричной коллапсирующей звезды с однородной плотностью и нулевым давлением. Здесь мы, однако, увидели удивительно красивый путь получения метрики, исходя лишь из предположения об однородности и изотропности, т. е. без явного использования уравнений поля Эйнштейна

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

- Eisenhart L. P.*, Continuous Groups of Transformations, Dover Publ., 1961
 (см. перевод: Эйзенхарт Л. П., Непрерывные группы преобразований, ИЛ, 1947).
Eisenhart L. P., Riemannian Geometry, Princeton University Press, 1926
 (см. перевод: Эйзенхарт Л. П., Риманова геометрия, ИЛ, 1949).
Helgason S., Differential Geometry and Symmetric Spaces, Academic Press, 1962.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Killing W.*, J. f. d. reine u. angew. Math. (Crelle), 109, 121 (1892).
2. *de Sitter W.*, Proc. Roy. Acad. Sci. (Amsterdam), 19, 1217 (1917); 20, 229 (1917); 20, 1309 (1917); Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 78, 3 (1917).