Нужно только показать, что эти шесть векторов независимы. Допустим, что они удовлетворяют линейному соотношению

$$\sum_j c^j(t)\, \xi^i_j(x) + \sum_j \bar{c}^j(t)\, \bar{\xi}^i_j(x) = 0. \tag{14.1.8}$$

Согласно уравнениям (14.1.4) и (14.1.5), имеем

$$\xi^i_j(0,\ t) = 0, \tag{14.1.9}$$

$$\bar{\xi}^i_j(0,\ t) = -\left.\frac{\partial X^i(t,\ a)}{\partial a^j}\right|_{a=0}, \tag{14.1.10}$$

так что при $x^i = 0$ соотношение (14.1.8) имеет вид

$$\sum_j \bar{c}^j(t) \left(\frac{\partial X^i(t,\ a)}{\partial a^j}\right)_{a=0} = 0.$$

Поскольку a^i — независимые параметры, отсюда следует, что

$$\bar{c}^j(t) = 0. \tag{14.1.11}$$

Вновь обращаясь к (14.1.8) и (14.1.6), получаем теперь

$$\sum_j c^j(t) \left(\frac{\partial x'^i(x;\ \theta)}{\partial \theta^j}\right)_{\theta=0} = 0,$$

и, так как θ^i — независимые параметры, отсюда следует, что

$$c^j(t) = 0. \tag{14.1.12}$$

Таким образом, имеется шесть независимых векторов Киллинга с $\xi^t = 0$, т. е. максимально возможное число (§ 1 гл. 13) при трех измерениях.

В заключение можно сформулировать космологический принцип на языке гл. 13 следующим образом:

1. Гиперповерхности постоянного стандартного космического времени суть максимально симметричные подпространства всего пространства-времени в целом.

2. Не только метрика $g_{\mu\nu}$, но и все космические тензоры, такие, как $T_{\mu\nu}$, форминвариантны относительно изометрий этих подпространств.

§ 2. Метрика Робертсона — Уокера

Формулировка космологического принципа, данная в предыдущем параграфе, позволяет нам применить результаты, полученные в § 5 гл. 13, для пространств с максимально симметричными подпространствами. Ясно сразу, что можно выбрать такие координаты r, θ, ϕ, t, что метрика запишется в виде

$$d\tau^2 = dt^2 - R^2(t)\left\{\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2\, d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\phi^2\right\}, \tag{14.2.1}$$

где $R(t)$ — неизвестная функция времени и k — постоянная, значения которой при подходящем выборе единиц для r равны $+1$, 0 или -1. [Эти координаты не обязательно совпадают со стандартными космическими координатами, введенными в предыдущем параграфе, хотя t в (14.2.1) есть эталонное космическое время или его функция.] Метрика (14.2.1) известна в космологии как *метрика Робертсона — Уокера.*

Интересно рассмотреть геометрические свойства трехмерных пространств постоянного t. Они имеют метрику

$$^3g_{rr} = \frac{R^2(t)}{1-kr^2}, \quad ^3g_{\theta\theta} = r^2R^2(t), \quad ^3g_{\phi\phi} = r^2\sin^2\theta R^2(t) \qquad (14.2.2)$$

и $^3g_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Сравнение с (13.3.23) — (13.3.25) показывает, что *трехмерная* скалярная кривизна равна

$$^3K(t) = kR^{-2}(t). \qquad (14.2.3)$$

Для $k = -1$ или $k = 0$ пространство бесконечно, тогда как для $k = +1$ оно конечно (хотя и не ограничено), и в этом случае наибольшая длина окружности в нем и его собственный объем определяются соответственно формулами (13.3.33) и (13.3.29):

$$^3L = 2\pi R(t), \qquad (14.2.4)$$

$$^3V = 2\pi^2R^3(t). \qquad (14.2.5)$$

Для $k = +1$ пространство Вселенной можно рассматривать как поверхность сферы радиусом $R(t)$ в четырехмерном евклидовом пространстве (§ 3 гл. 13), и есть все основания называть $R(t)$ «радиусом Вселенной». Для $k = -1$ и $k = 0$ никакой интерпретации такого рода дать нельзя, но $R(t)$ по-прежнему характеризует геометрические размеры пространства, так что $R(t)$ во всех случаях будет именоваться *космическим масштабным фактором.*

Координаты r, θ, ϕ, t в § 5 гл. 13 были построены так, чтобы координатные преобразования, оставляющие форминвариантной четырехмерную метрику (14.2.1), были чисто пространственными преобразованиями, оставляющими форминвариантной метрику (14.2.2). Они состоят из вращений координатной системы как твердого тела вокруг начала

$$x'^i = R^i{}_j x^j \qquad (i, j = 1, 2, 3), \qquad (14.2.6)$$

где R — произвольная ортогональная матрица (и как обычно, $x^1 \equiv r\sin\theta\cos\phi$, $x^2 \equiv r\sin\theta\sin\phi$, $x^3 \equiv r\cos\theta$) и из «квазитрансляций», которые получаются после приравнивания матрицы KC в (13.3.17) единичной матрице, умноженной на k:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{a}\left\{(1-k\mathbf{x}^2)^{1/2} - [1-(1-k\mathbf{a}^2)^{1/2}]\left(\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{a}}{\mathbf{a}^2}\right)\right\}, \qquad (14.2.7)$$

где $\mathbf{a}$ — произвольный 3-вектор.

Преобразование (14.2.7) переносит начало в точку **a**. Поэтому можно сделать вывод, что любая *фиксированная* точка может служить началом координат, эквивалентных координатной системе, используемой в (14.2.1). Иначе говоря, равенство $\mathbf{X}(t;\ \mathbf{a}) = \mathbf{a}$ определяет «фундаментальные траектории» наблюдателей, для которых Вселенная выглядит так же, как для нас. В предыдущем параграфе уже отмечалось, что фундаментальные траектории должны быть близки к путям движения типичных галактик. Поэтому мы можем приближенно полагать, что пространственные координаты r, θ, ϕ образуют *сопутствующую систему* в том смысле, что *типичные галактики имеют постоянные пространственные координаты* r, θ, ϕ. Можно представить себе сопутствующую координатную сеть в виде линий, проведенных на поверхности воздушного шарика, а типичные галактики — в виде точек, нанесенных на нее. Когда шарик раздувается или сжимается, его точки движутся, но вместе с ними движутся и линии, так что каждая точка имеет те же самые координаты.

Важно отметить, что фундаментальные траектории $\mathbf{x} = \mathrm{const}$ являются геодезическими, поскольку в силу (14.2.1)

$$\Gamma^{\mu}_{tt} = 0. \qquad (14.2.8)$$

Таким образом, утверждение, что галактика имеет постоянные r, θ, ϕ, вполне согласуется с предположением, что галактики находятся в свободном падении. Заметим также, что t в (14.2.1) — не только возможное эталонное космическое время, но оно также есть собственное время, показываемое покоящимися часами в каждой типичной свободно падающей галактике. Координаты x, t являются, таким образом, сопутствующими в точно том же смысле, что и «нормальные гауссовы» координаты, введенные в § 8 гл. 11.

Применение космологического принципа к тензорам, описывающим усредненное состояние космической материи, таким, как тензор энергии-импульса $T^{\mu\nu}$ и ток галактик J^{μ}_{G} [J^{μ}_{G} определяется точно так же, как электрический ток (5.2.13), только сумма берется по галактикам, а не по частицам и множитель e_n берется равным 1], помогает лучше понять поведение материи во вселенной Робертсона — Уокера. Требуется, чтобы все такие тензоры были форминвариантны [в смысле рассуждений § 4 гл. 13 и формулы (14.1.2)] относительно преобразований координат. таких, как (14.2.6), (14.2.7), которые оставляют форминвариантной метрику (14.2.1). Эти «изометрии», будучи чисто пространственными, преобразуют J^{t}_{G} и T^{tt} как 3-скаляры, J^{i}_{G} и T^{it} как 3-векторы, а T^{ij} как 3-тензор. Отсюда следует, согласно теоремам. доказанным в § 4 гл. 13, что

$$J_G{}^t = n_G(t), \qquad J_G{}^i = 0 \qquad (14.2.9)$$

и

$$T_{tt} = \rho(t), \quad T_{it} = 0, \quad T_{ij} = {}^3g_{ij}p(t), \tag{14.2.10}$$

где n_G, ρ и p — неизвестные величины, которые могут зависеть от t, но *не* от r, θ или ϕ. Эти результаты можно записать изящнее:

$$J_G{}^\mu = n_G U^\mu, \tag{14.2.11}$$

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)\, U_\mu U_\nu + p g_{\mu\nu}, \tag{14.2.12}$$

где U_μ — «вектор 4-скорости»:

$$U^t \equiv 1, \tag{14.2.13}$$

$$U^i \equiv 0. \tag{14.2.14}$$

Из равенства (14.2.14) следует, что *содержимое Вселенной*, как и ожидалось, *в среднем покоится в системе* r, θ, ϕ. Кроме того, сравнение (14.2.12) с (5.4.2) показывает, что *тензор энергии-импульса Вселенной с необходимостью принимает форму такую же, как для идеальной жидкости.*

Полезно выписать сразу дифференциальные уравнения для $n_G(t)$, $\rho\,(t)$ и $p\,(t)$, вытекающие из законов сохранения. Если галактики не возникают и не распадаются, то J_G^μ подчиняются уравнению непрерывности (5.2.14):

$$0 = (J_G{}^\mu)_{;\,\mu} = g^{-1/2} \frac{\partial}{\partial x^\mu} (g^{1/2} J_G{}^\mu) = g^{-1/2} \frac{\partial}{\partial t} (g^{1/2} n_G). \tag{14.2.15}$$

Детерминант метрики (14.2.1) равен $-g$, причем

$$g = R^6\,(t)\, r^4\, (1 - kr^2)^{-1} \sin^2\theta, \tag{14.2.16}$$

и, следовательно, сохранение числа галактик сводится к равенству

$$n_G(t)\, R^3\,(t) = \text{const}. \tag{14.2.17}$$

(Заметим, что n_G есть число галактик в единице собственного объема, которая увеличивается или уменьшается в зависимости от того, сжимается или расширяется Вселенная, в то время как $n_G R^3$ — число галактик в единице *координатного* объема и оно остается постоянной в сопутствующей системе координат.) Тензор энергии-импульса (14.2.12) подчиняется уравнению непрерывности (5.4.3):

$$0 = T^{\mu\nu}{}_{;\,\nu} = \frac{\partial p}{\partial x^\nu} g^{\mu\nu} + g^{-1/2} \frac{\partial}{\partial x^\nu} [g^{1/2} (\rho + p)\, U^\mu U^\nu] + \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda} (\rho + p)\, U^\nu U^\lambda. \tag{14.2.18}$$

Используя (14.2.8) и (14.2.14), находим, что это уравнение тривиально удовлетворяется при $\mu = r$, θ, ϕ, а при $\mu = t$ имеет вид

$$R^3\,(t) \frac{dp\,(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \{R^3\,(t)\, [\rho\,(t) + p\,(t)]\}. \tag{14.2.19}$$

Например, если давление космической материи пренебрежимо мало, то (14.2.19) дает результат, аналогичный (14.2.17):

$$\rho(t)\, R^3(t) = \mathrm{const}. \qquad (14.2.20)$$

Исключительное удобство сопутствующих координат не должно заслонять от нас того факта, что на самом деле типичные галактики удаляются друг от друга или сближаются при увеличении или уменьшении $R(t)$. Чтобы уяснить это, нужно более четко определить, что мы подразумеваем под расстоянием между галактиками. Представим себе цепочку галактик, расположенных близко друг к другу на луче зрения между нами и некоторой удаленной галактикой с координатами r_1, θ_1, ϕ_1, и предположим, что *в один и тот же момент t космического времени* наблюдатели на каждой галактике измеряют расстояние до соседней, скажем, измеряя время хода светового сигнала. (Заметьте, что это не то же самое, что измерение времени хода одного светового сигнала от $r = 0$ до $r = r_1$.) Сложение всех отдельных расстояний дает *собственное расстояние*:

$$d_{\text{соб}}(t) = \int_0^{r_1} \sqrt{g_{rr}}\, dr = R(t) \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}}. \qquad (14.2.21)$$

Очевидно, никто не собирается организовывать подобного рода космический заговор, а потому, с точки зрения наблюдательной космологии, нет необходимости иметь дело с понятием *собственное расстояние*. Однако мы увидим в § 4 этой главы, что более привычные способы измерения расстояний, основанные на видимых светимостях и угловых диаметрах при $r_1 \ll 1$, приближают нас к собственному расстоянию (14.2.21). Следовательно, в том или ином смысле галактики разбегаются, если $R(t)$ растет, или сближаются, если $R(t)$ уменьшается.

Космологическая теория выдвигает перед наблюдательной астрономией проблему измерения функции $R(t)$ и определения значения постоянной k — равна ли она $+1$, 0 или -1. Это не единственные данные, нужные космологии, но их получение является одной из центральных проблем, которые необходимо решить, если мы стремимся понять Вселенную. В оставшейся части главы говорится о том, в какой степени возможен ответ на этот вопрос.

§ 3. Красное смещение

Наиболее важную информацию о космическом масштабном факторе $R(t)$ мы получаем из наблюдения сдвигов частоты света, излучаемого удаленными источниками. Чтобы вычислить такие сдвиги частот, мы расположимся в начале ($r = 0$) координат (согласно космологическому принципу, это лишь вопрос удоб-