§ 7. Подсчеты источников

Поскольку программа Хаббла пока еще не приводит к существенному прогрессу в определении космического масштабного фактора $R(t)$, будет естественно расширить рамки нашего подхода к этой проблеме и рассмотреть зависимость *числа* наблюдаемых радио- и оптических источников от видимой светимости и (или) красного смещения. Подход, основанный на подсчете числа источников, имеет два потенциальных преимущества по сравнению с программой Хаббла:

А. Появление радиотелескопов с очень большой апертурой и чувствительностью привело к обнаружению и разрешению тысяч слабых радиоисточников, большинство которых находится, по-видимому, на очень больших расстояниях. Большая часть этих источников пока еще не идентифицирована с оптическими источниками, так что их красные смещения еще не известны. [В разрешенных радиоисточниках не наблюдалось каких-либо отдельных линий (в радиодиапазоне), и поэтому их красные смещения могут быть измерены лишь оптически.] Наилучшее «применение», которое космологи могут найти для этих источников без знания их красных смещений,— это представить их число как функцию яркости.

Б. Для квазаров, о которых говорилось в предыдущем параграфе, измерения дают красные смещения до $z \approx 2$, но слишком большой разброс их абсолютных светимостей не позволяет определить фотометрическое расстояние $d_ф$ до них. Представляя число квазаров как функцию z и l или только z, можно устранить часть проблем, связанных с разбросом L.

При самом общем подходе следует начать с предположения о том, что в момент t_1 в единице объема имеется $n(L, t_1)\,dL$ источников с абсолютной светимостью между L и $L + dL$. Элемент собственного объема равен

$$dV = \sqrt{g}\,dr_1\,d\theta_1\,d\phi_1 = R^3(t_1)(1 - kr_1^2)^{-1/2} r_1^2\,dr_1 \sin\theta_1\,d\theta_1\,d\phi_1,$$

и, следовательно, число источников с абсолютной светимостью между L и $L + dL$, расположенных на расстоянии от r_1 до $r_1 + dr_1$, равно

$$dN = 4\pi R^3(t_1)(1 - kr_1^2)^{-1/2} r_1^2 n(t_1, L)\,dr_1\,dL. \qquad (14.7.1)$$

Координаты r_1 и t_1 связаны равенством (14.3.1), которое можно записать в виде

$$r_1 = r(t_1), \qquad (14.7.2)$$

где $r(t)$ — функция определенная равенством

$$\int_t^{t_0} \frac{dt'}{R(t')} = \int_0^{r(t)} \frac{dr}{(1 - kr^2)^{1/2}}. \qquad (14.7.3)$$

Дифференцируя (14.7.3), получаем

$$dr_1 = -\left(1-k\,{}_1^2\right)^{1/2}\frac{dt_1}{R(t_1)};$$

отсюда и из (14.7.1) следует, что

$$dN = 4\pi R^2(t_1)\,r^2(t_1)\,n(t_1, L)\,|\,dt_1\,|\,dL. \tag{14.7.4}$$

Красное смещение и видимая светимость источника на расстоянии r_1 с абсолютной светимостью L в момент t_1 определены формулами (14.3.6) и (14.4.12):

$$z = \frac{R(t_0)}{R(t_1)} - 1, \tag{14.7.5}$$

$$l = \frac{LR^2(t_1)}{4\pi r_1^2 R^4(t_0)}. \tag{14.7.6}$$

Следовательно, число источников с красным смещением, *меньшим* z, и с видимой светимостью, *большей* l, равно интегралу от (14.7.4) по всем L и по конечному промежутку t_1:

$$N(<z, >l) = \int\limits_0^\infty dL \int\limits_{\text{макс}\{t_z,\, t_l(L)\}}^{t_0} dt_1 4\pi r^2(t_1)\,R^2(t_1)\,n(t_1, L), \tag{14.7.7}$$

где нижний предел определяется условиями на красное смещение и видимую светимость:

$$R(t_z) \equiv \frac{R(t_0)}{1+z}, \tag{14.7.8}$$

$$\frac{r^2(t_l)}{R^2(t_l)} \equiv \frac{L}{4\pi l R^4(t_0)}. \tag{14.7.9}$$

Если красные смещения неизвестны, интересующей нас величиной будет $N(>l)$ — число источников с видимой светимостью, большей чем l; оно получается, если положить нижний предел в (14.7.7) равным именно $t_l(L)$. Наоборот, если неизвестны видимые светимости, то нужно рассматривать $N(<z)$ — число источников с красным смещением, меньшим z; чтобы вычислить его, нужно взять t_z нижним пределом в (14.7.7). [Вместе с тем подсчет числа реально наблюдаемых источников не является измерением $N(z)$, а дает для него лишь нижнюю границу; дело в том, что любые радио- или оптические телескопы детектируют лишь те источники, которые ярче некоторого минимума.]

Радиотелескопы не могут служить для измерения полной видимой светимости, но зато позволяют измерить *плотность потока* S — мощность, приходящуюся на единицу площади антенны и на единицу интервала частоты при фиксированной частоте. Плотность потока в момент t_1 для источника, расположенного в точке r_1, равна

$$S(\nu) = \frac{P(\nu R(t_0)/R(t_1))\, R(t_1)}{R^3(t_0)\, r_1^2}, \tag{14.7.10}$$

где P — мощность, излученная в единичный телесный угол и в единичном интервале частот. [См. формулу (14.4.35), учитывая, что $S \equiv l'$, $P \equiv L'/4\pi$.]

Следуя по тому же пути, который привел к (14.7.7), мы найдем, что число источников с красным смещением, меньшим z, и плотностью потока на частоте ν, большей S, равно

$$N(<z, >S;\ \nu) = \int_0^\infty dP \int_{\text{макс}\{t_z,\ t_S(P)\}}^{t_0} dt_1 4\pi r^2(t_1) \times$$
$$\times R^2(t_1)\, n\left(t_1,\ P,\ \nu\frac{R(t_0)}{R(t_1)}\right), \tag{14.7.11}$$

где $t_S(P)$ определяется уравнением

$$\frac{r^2(t_S)}{R(t_S)} = \frac{P}{SR^3(t_0)}. \tag{14.7.12}$$

Анализ результатов подсчета радиоисточников сильно облегчается тем фактом [62, 76, 77], что обычные радиоисточники имеют спектры

$$P \sim \nu^{-\alpha}, \tag{14.7.13}$$

причем *спектральный индекс* α порядка 0,7—0,8. Ввиду этого число источников, у которых мощность при частоте ν лежит в интервале $[P, P + dP]$, дается выражением вида

$$n(t,\ P,\ \nu)\, dP = n\left(t,\ P\left[\frac{\nu}{\nu_0}\right]^\alpha\ \nu_0\right) d\left(P\left[\frac{\nu}{\nu_0}\right]^\alpha\right),$$

где ν_0 — некоторая произвольная фиксированная частота. Следовательно, плотность числа источников удовлетворяет следующему правилу подобия:

$$n(t,\ P,\ \nu) = \left[\frac{\nu}{\nu_0}\right]^\alpha n\left(t,\ P\left[\frac{\nu}{\nu_0}\right]^\alpha,\ \nu_0\right). \tag{14.7.14}$$

Заменой переменной интегрирования P в (14.7.11) на $P\,[R(t_0)/R(t_1)]^\alpha$ мы можем отнести плотность числа объектов в подынтегральном выражении к фиксированной частоте ν; тогда

$$N(<z,\ >S;\ \nu) = \int_0^\infty dP \int_{\text{макс}\{t_z,\ t_{S\alpha}(P)\}} dt_1\, 4\pi r^2(t_1)\, R^2(t_1)\, n(t_1,\ P,\ \nu), \tag{14.7.15}$$

где $t_{S\alpha}(P)$ определяется из уравнения

$$r^2(t_{S\alpha})\left(\frac{R(t_{S\alpha})}{R(t_0)}\right)^{-1-\alpha}=\frac{P}{SR^2(t_0)}. \tag{14.7.16}$$

Для N ($<z$, $>S$; ν) должно выполняться правило подобия:

$$N(<z, >S; \nu)=N\left(<z, >S\left[\frac{\nu}{\nu_0}\right]^{\alpha}; \nu_0\right). \tag{14.7.17}$$

Мы можем считать, что все источники действительно обладают спектром (14.7.13) с одним и тем же спектральным индексом с той степенью вероятности, с какой выполняется правило (14.7.17).

Если за время, которое нужно, чтобы свет самых далеких наблюдаемых нами объектов дошел до нас, не происходит рождения, распада или эволюции источников, то и $n(t, L)$, и $n(t, P, \nu)$ имеют простую зависимость от времени (14.2.17):

$$n(t, L)=\left[\frac{R(t_0)}{R(t)}\right]^3 n(t_0, L), \tag{14.7.18}$$

$$n(t, P, \nu)=\left[\frac{R(t_0)}{R(t)}\right]^3 n(t_0, P, \nu). \tag{14.7.19}$$

В этом случае подсчет наблюдаемых источников мог бы служить для получения информации о k и $R(t)$. Наоборот, при наличии космологической модели для k и $R(t)$ можно было бы использовать этот подсчет для вывода функциональной зависимости плотности числа источников от t и от L или P.

Понимание того, каких результатов следует ожидать от этих двух подходов к анализу наблюдаемых данных, может быть в значительной мере достигнуто при внимательном рассмотрении тех выделенных случаев, когда z мало́ либо когда l или S велики. В этих случаях нижние пределы интегралов по t_1 в (14.7.7) и (14.7.11) близки к t_0 и, следовательно, можно воспользоваться разложениями (14.6.1) и (14.6.6):

$$R(t_1)=R(t_0)\{1-H_0(t_0-t_1)+\ldots\},$$

$$r(t_1)=R^{-1}(t_0)(t_0-t_1)\left\{1+\frac{1}{2}H_0(t_0-t_1)+\ldots\right\}.$$

Разложим по t_0-t_1 также и плотности числа источников:

$$n(t_1, L)=n(t_0, L)\{1-\beta_0(L)H_0(t_0-t_1)+\ldots\}, \tag{14.7.20}$$

$$n\left(t_1, P, \nu\frac{R(t_0)}{R(t_1)}\right)=$$
$$=n(t_0, P, \nu)\{1-[\beta_0(P, \nu)+2\alpha_0(P, \nu)]H_0(t_0-t_1)+\ldots\}, \tag{14.7.21}$$

где β_0 определяет относительную скорость изменения плотности источников:

$$\beta_0(L)\equiv H_0^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial t}\ln n(t, L)\right)_{t=t_0}, \tag{14.7.22}$$

$$\beta_0(P, \nu)\equiv H_0^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial t}\ln n(t, P, \nu)\right)_{t=t_0}, \tag{14.7.23}$$

а α_0 — эффективный спектральный индекс:

$$2\alpha_0(P, \nu) \equiv -\nu \frac{\partial}{\partial\nu} \ln n(t_0, P, \nu). \qquad (14.7.24)$$

Смысл такого определения станет ясен ниже.) Тогда для t, близкого к t_0, получаем

$$\int\limits_t^{t_0} dt_1\, 4\pi r^2(t_1)\, R^2(t_1)\, n(t_1, L) =$$

$$= \frac{4\pi}{3} n(t_0, L)(t_0 - t)^3 \left\{1 - \frac{3}{4}[\beta_0(L)+1]\, H_0(t_0-t) + \ldots\right\}, \quad (14.7.25)$$

$$\int\limits_t^{t_0} dt_1\, 4\pi r^2(t_1)\, R^2(t_1)\, n\left(t_1, P, \nu\frac{R(t_0)}{R(t_1)}\right) =$$

$$= \frac{4\pi}{3} n(t_0, P, \nu)(t_0 - t)^3 \left\{1 - \frac{3}{4}[\beta_0(P, \nu) + 2\alpha_0(P, \nu) + 1] \times \right.$$

$$\left. \times H_0(t_0 - t) + \ldots\right\}. \quad (14.7.26)$$

При малых z нижний предел интеграла (14.7.25) определяется уравнением (14.7.8), из которого следует

$$H_0(t_0 - t_z) = z - \left(1 + \frac{q_0}{2}\right) z^2 + \ldots .$$

Отсюда и из (14.7.7) следует, что число источников с красным смещением, меньшим z, равно

$$N(<z) = \frac{4\pi}{3} H_0^{-3} z^3 \int\limits_0^\infty dL\, n(t_0, L) \times$$

$$\times \left\{1 - \frac{3}{4}[\beta_0(L) + 2q_0 + 5]\, z + \ldots\right\}. \quad (14.7.27)$$

При больших l нижний предел в (14.7.25) определяется уравнением (14.7.9); из него следует, что

$$t_0 - t_l(L) = \left(\frac{L}{4\pi l}\right)^{1/2} \left\{1 - \frac{3}{2}\left(\frac{LH_0^2}{4\pi l}\right)^{1/2} + \ldots\right\}.$$

Теперь формула (14.7.7) дает число источников с видимой светимостью, большей l:

$$N(>l) = \frac{4\pi}{3}(4\pi l)^{-3/2} \int\limits_0^\infty dL\, n(t_0, L) \times$$

$$\times \left\{1 - \frac{3}{4}[\beta_0(L) + 7]\left(\frac{LH_0^2}{4\pi l}\right)^{1/2} + \ldots\right\} L^{3/2}. \quad (14.7.28)$$

Наконец, при больших S нижний предел интеграла (14.7.26) определяется уравнением (14.7.12), из которого следует

$$t_0 - t_S(P) = \left(\frac{P}{S}\right)^{1/2} \left\{1 - \left(\frac{PH_0^2}{S}\right)^{1/2} + \ldots\right\}.$$

В этом случае из (14.7.11) получается следующее выражение для числа источников с большей чем S плотностью потока на частоте ν:

$$N(>S, \nu) = \frac{4\pi}{3} S^{-3/2} \int_0^\infty dPn(t_0, P, \nu) P^{3/2} \times$$
$$\times \left\{1 - \frac{3}{4}[\beta_0(P, \nu) + 2\alpha_0(P, \nu) + 5]\left(\frac{PH_0^2}{S}\right)^{1/2} + \ldots\right\}. \quad (14.7.29)$$

Если все источники имеют спектры вида (14.7.13), то из (14.7.14) и (14.7.24) получаем

$$\alpha_0(P, \nu) = -\frac{\alpha}{2}\left[1 + P\frac{\partial}{\partial P}\ln n(t_0, P, \nu)\right]; \quad (14.7.30)$$

тогда интегрированием по частям можно убедиться в допустимости подстановки

$$\alpha_0(P, \nu) \to \alpha \quad (14.7.31)$$

в формуле (14.7.29).

Из анализа этих результатов видно, что измеренные значения $N(<z)$ при $z \ll 1$ могли бы быть использованы для вычисления параметра замедления q_0, если известен эволюционный параметр β_0, в то время как измерение $N(>l)$ или $N(>S, \nu)$ для больших l или S, наоборот, не дает никакой информации относительно q_0, какие бы предположения относительно β_0 ни делались.

Если предположить, что нет никакой эволюции, то зависимость n от времени определяется формулой (14.7.18) или формулой (14.7.19) и разложением (14.6.1); тогда из (14.7.22) и (14.7.23) следует, что

$$\beta_0(L) = \beta_0(P, \nu) = -3 \quad \text{(без эволюции)}. \quad (14.7.32)$$

Отсюда и из (14.7.27) — (14.7.29) получаем

$$N(<z) = \frac{4\pi}{3} H_0^{-3} z^3 \int_0^\infty dLn(t_0, L) \left\{1 - \frac{3}{2}(q_0 + 1) z + \ldots\right\}, \quad (14.7.33)$$

$$N(>l) = \frac{4\pi}{3}(4\pi l)^{-3/2} \int_0^\infty dLn(t_0, L) \left\{1 - 3\left(\frac{LH_0^2}{4\pi l}\right)^{1/2} + \ldots\right\} L^{3/2},$$
$$(14.7.34)$$

и для рассматриваемых нами спектров

$$N(>S, \nu) = \frac{4\pi}{3} S^{-3/2} \int_0^\infty dPn(t_0, P, \nu) \times$$
$$\times \left\{1 - \frac{3}{2}(\alpha+1)\left(\frac{PH_0^2}{S}\right)^{1/2} + \ldots\right\} P^{3/2}. \quad (14.7.35)$$

Таким образом, если пренебречь эволюцией, мы получаем ясные предсказания о том, что $N(>l)$ должно убывать с ростом l *медленнее*, чем $l^{-3/2}$, и, поскольку $\alpha > 0$, $N(>S, \nu)$ должно убывать с ростом S медленнее, чем $S^{-3/2}$.

Таблица 14.1

Основные каталоги радиоисточников *

Обсерватория	Каталог	ν, МГц	Число источников	$S_{\text{мин}}$, 10^{-26} Вт×$\times$м$^{-2}\cdot$Гц$^{-1}$
Кембридж	3C	159	471	8
	3CR	178	—	9
	4C	178	4843	2
	5C	408	276	0,025
	WKB	38	1069	14
	RN	178	87	0,25
	NB	81,5	558	1
Миллс-Кросс	MSH	86	2270	7
Паркс	PKS	408, 1410, 2650	297	4
	PKS	408, 1410	247	0,5
	PKS	408, 1410	564	0,3
	PKS	408, 1410	628	0,4
	PKS	635, 1410, 2650	397	1,5
Оуэнс-Вэлли	CTA	906	106	—
	CTB, CTBR	960	110	—
	CTD	1421	—	1,15
Грин-Бэнк	NRAO	750, 1400	726	(3C и 3CR)
	NRAO	750, 1400	458	0,5
Болонья	B1	408	629	1
	B2	408	3235	0,2
Обсерватория штата Огайо	O	1415	128	2, 0,5
	O	1415	236	0,37
	O	1415	1199	0,3
	O	1415	2101	0,2
Вермийон-Ривер	VRO	610,5	239	0,8
	VRO	610,5	625	0,8
Радиообсерватория Доминион	DA	1420	615	2
Двингелоо — Грин-Бэнк	DW	1417	188	2,3
Аресибо	AO	430	25	—

* Разные каталоги относятся к различным, частично перекрывающимся участкам неба; они не являются совершенно полными в пределах своих участков и плотностей потоков. Более подробные данные и ссылки см. в [89], стр. 241 и далее.

Оказывается, однако, что эти результаты противоречат наблюдениям [1]). Свидетельствующие об этом обозрения радиоисточников приведены в табл. 14.1. Они приводят к функции $N\,(>S,\,\nu)$, которая убывает с ростом S (при $S > 5\cdot 10^{-26}$ Вт·м$^{-2}$·Гц$^{-1}$) приблизительно как $S^{-1,8}$ и определенно *быстрее*, чем $S^{-3/2}$ [79, 80] [2]). Из этого следует вывод, что эволюцию учитывать нужно. Согласно (14.7.29), для того чтобы $N\,(>S,\,\nu)$ убывало как $S^{-3/2}$, требуется выполнение неравенства

$$\beta_0 < -2\alpha_0 - 5 \approx 6{,}5, \tag{14.7.36}$$

из чего следует, что плотность числа источников должна убывать быстрее, чем $R\,(t)^{-6,5}$.

К аналогичному выводу приводят подсчеты числа радиоисточников как функции их углового диаметра. Исходя из распределения размеров радиоисточников в каталоге 3С, Лонгейр и Пули [83] вычислили, какого распределения угловых диаметров следует ожидать у более слабых источников из каталога 5С. Их результат не согласуется с наблюдениями, каким бы ни выбиралось значение параметра q_0, характеризующего уменьшение истинной плотности числа источников вследствие эволюции.

Если эволюция столь существенна, сколь это следует из подсчетов источников, мы, очевидно, не можем узнать много о $R\,(t)$ из этих подсчетов. Мы вернемся к программе применения подсчета источников для изучения эволюции источников в следующей главе, где мы рассмотрим динамическую модель для масштабной функции $R\,(t)$.

§ 8. Стационарная космологическая модель

До сих пор мы следовали «космологическому принципу», утверждающему, что Вселенная пространственно изотропна и однородна. Т. Бонди и Г. Голд [84] пошли дальше и предположили, что во Вселенной выполняется «абсолютный космологический принцип», согласно которому Вселенная выглядит одинаково не только во всех точках и во всех направлениях, но также и *во все моменты времени*. Это предположение приводит к *стационарной модели Вселенной*. Приблизительно одновременно с Бонди и Голдом такую же модель предложил Ф. Хойл [85], который ввел изменения в структуру тензора энергии-импульса, входящего в уравнение Эйнштейна. Здесь мы будем следовать подходу Бонди и Голда как более соответствующему общему духу этой главы, но позже вернемся к теории Хойла (в последней главе).

---

[1]) Обсуждение подсчетов галактик в оптической астрономии см. в работе [78].

[2]) Результаты подсчетов источников на более высоких частотах (они, по-видимому, согласуются с законом $S^{-3/2}$) см. в [81, 82].