Теперь вообразите поздний час,
Когда ползущий гул и волны мрака
Корабль вселенной буйно заливают.

В. Шекспир, Генрих V

Глава 15
КОСМОЛОГИЯ; ЭТАЛОННАЯ МОДЕЛЬ

В предыдущей главе мы подготовили координатную сетку для пространственно-временной карты Вселенной. Теперь нам нужно заполнить эту карту островами вещества и морями излучения — тем, что составляет физическое содержимое Вселенной.

Большей частью мы по-прежнему будем исходить из предположения об изотропии и однородности, к которому теперь еще добавим уравнения поля Эйнштейна. Это приводит к критической зависимости будущего Вселенной от ее кривизны: открытая Вселенная будет расширяться вечно, в закрытой — нынешнее расширение когда-нибудь прекратится и сменится общим сжатием. Кривизна в свою очередь критически зависит от плотности энергии в настоящий момент времени ρ_0: Вселенная является открытой или закрытой в зависимости от того, больше ρ_0, чем некоторая критическая плотность $\rho_{кр}$ порядка 10^{-29} г/см^3, или меньше ее. По-видимому, основной вклад в ρ_0 дает масса покоя обычного вещества — нейтронов и протонов. Если это верно, то при параметре замедления q_0, меньшем чем $^1/_2$, Вселенная — открытая и $\rho < \rho_{кр}$, а при $q_0 > {}^1/_2$ Вселенная — закрытая и $\rho_0 > \rho_{кр}$; этим объясняется то внимание к измерению q_0, которое было проявлено в предыдущей главе. Однако получающееся из наблюдений значение $q_0 \approx 1$ вступает в противоречие с наблюдаемой плотностью вещества в галактиках, которая значительно меньше $\rho_{кр}$. Это противоречие привело к усиленным поискам признаков межгалактического газа. Эти поиски, однако, пока совершенно безуспешны.

Обращаясь к прошлому, мы обнаруживаем, что эволюция однородной изотропной Вселенной в любой модели, подчиняющейся уравнениям Эйнштейна, должна начинаться с некоторой сингулярной плотности. При отсчете от этой сингулярности возраст Вселенной должен быть меньше H_0^{-1}, а если $q_0 > {}^1/_2$, то меньше $2/(3H_0)$. По измерениям радиоактивности и из теории эволюции звезд получаются оценки возраста Вселенной от $7 \cdot 10^9$ до $16 \cdot 10^9$ лет, но трудно думать, что этот возраст много меньше $2/(3H_0)$.

Наиболее известным реликтом раннего горячего состояния Вселенной является 2,7-градусный микроволновый фон, предсказанный в 1950 г. и обнаруженный в 1965 г. Совокупность имеющихся данных пока вполне согласуется с тем, что излучение совершенно изотропно, а его спектр является планковским спектром абсолютно черного тела. Зная температуру излучения в настоящее время, мы можем проследить тепловую историю Вселенной назад во времени вплоть до возраста в несколько минут и рассчитать образование сложных ядер в первичном сверхплотном огненном шаре. В итоге получается довольно четкое предсказание, что около 27% первичных нуклонов должны были слиться в ядра He^4. Одни измерения количества гелия в космосе подтверждают этот вывод, другие противоречат ему. Другим отпечатком ранних стадий эволюции Вселенной является наблюдаемая нами космическая морфология: звезды собраны в галактики, галактики — в скопления галактик, а скопления образуют более или менее однородный газ.

Современное теоретическое истолкование того, как образовалась такая структура, далеко от законченности, но ясно одно — фон излучения играл в этом важную роль. Можно также рассуждать и относительно самых первых нескольких секунд истории Вселенной, когда температура была достаточна для образования в большом числе мезонов, барионов и антибарионов, однако пока не видно какого-либо способа для проверки выводов из такого рода соображений.

Итак, мы дали краткое описание того, что можно назвать «эталонной моделью» Вселенной, основанной на космологическом принципе и уравнениях Эйнштейна. Еще одно «эталонное» предположение, играющее важную роль в рассуждениях § 7—11 этой главы, состоит в том, что удаленные галактики, так же как и наша, состоят из барионов, а не из антибарионов. Часто высказывалась мысль, что поскольку барионное число, так же как и заряд, сохраняется точно, то число барионов и антибарионов во Вселенной должно быть одинаково, так же как и число положительных и отрицательных зарядов. Однако следует иметь в виду, что в действительности барионное число не похоже на заряд: с зарядом связано существование дальнодействующей силы, чего, как мы знаем, нет для барионного числа. Действительно, в конечной Вселенной полный заряд *должен быть* равен нулю: в этом легко убедиться, интегрируя уравнение Максвелла $\nabla \cdot \mathbf{E} = \varepsilon$ по объему Вселенной; относительно барионного числа такого рода заключение ниоткуда не следует. Даже если полное барионное число Вселенной равно нулю, должно было каким-то образом произойти разделение барионов и антибарионов, и большинство рассуждений этой главы, во всяком случае, применимо к развитию Вселенной после этих событий.

Конечно, вполне возможно, что эталонная модель частично или полностью неверна. Однако ее ценность заключается не в ее непоколебимой справедливости, а в том, что она служит основой для обсуждения огромного разнообразия наблюдаемых данных. Обсуждение этих данных в контексте эталонной космологической модели может привести к уяснению их значения для космологии независимо от того, какая модель окажется правильной в конечном счете. Некоторые другие возможные модели Вселенной будут рассмотрены в следующей главе.

§ 1. Уравнения Эйнштейна

Обсуждение динамической космологии начнем с рассмотрения связей, налагаемых уравнениями Эйнштейна на метрику изотропной и однородной Вселенной. В соответствии с результатами § 2 гл. 14 мы можем выбрать метрику Робертсона — Уокера

$$g_{tt} = -1, \quad g_{it} = 0, \quad g_{kj} = R^2(t)\,\tilde{g}_{ij}(x). \tag{15.1.1}$$

Здесь t — космическая временная координата, i и j пробегают три сопутствующие пространственные координаты r, θ, φ; $\tilde{g}_{ij}$ — метрика трехмерного максимально симметричного пространства:

$$\tilde{g}_{rr} = (1 - kr^2)^{-1}, \quad \tilde{g}_{\theta\theta} = r^2, \quad \tilde{g}_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2\theta,$$
$$\tilde{g}_{ij} = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j, \tag{15.1.2}$$

причем k равно $+1$, -1 или 0.

Неисчезающими компонентами аффинной связности для этой метрики являются только

$$\Gamma^t_{ij} = R\dot{R}\tilde{g}_{ij}, \tag{15.1.3}$$

$$\Gamma^i_{tj} = \frac{\dot{R}}{R}\,\delta^i_j, \tag{15.1.4}$$

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}\,(\tilde{g}^{-1})^{il}\left(\frac{\partial\tilde{g}_{lj}}{\partial x^k} + \frac{\partial\tilde{g}_{lk}}{\partial x^j} - \frac{\partial\tilde{g}_{jk}}{\partial x^l}\right) \equiv \tilde{\Gamma}^i_{jk}. \tag{15.1.5}$$

Компоненты тензора Риччи равны

$$R_{tt} = \frac{3\ddot{R}}{R}, \tag{15.1.6}$$

$$R_{ti} = 0, \tag{15.1.7}$$

$$R_{ij} = \tilde{R}_{ij} - (R\ddot{R} + 2\dot{R}^2)\,\tilde{g}_{ij}, \tag{15.1.8}$$

где $\widetilde{R}_{ij}$ — тензор Риччи *трехмерного пространства*, вычисляемый относительно метрики $\widetilde{g}_{ij}$:

$$\widetilde{R}_{ij}=\frac{\partial\widetilde{\Gamma}^k_{ki}}{\partial x^j}-\frac{\partial\widetilde{\Gamma}^k_{ij}}{\partial x^k}+\widetilde{\Gamma}^k_{li}\widetilde{\Gamma}^l_{kj}-\widetilde{\Gamma}^k_{ij}\widetilde{\Gamma}^l_{kl}. \qquad (15.1.9)$$

Можно не тратить время на вычисление $\widetilde{R}_{ij}$ по формуле (15.1.9), если вспомнить, что в максимально симметричном пространстве, согласно (13.2.4),

$$\widetilde{R}_{ij}=-2k\widetilde{g}_{ij}. \qquad (15.1.10)$$

Используя это выражение в (15.1.8), получим пространственные компоненты *пространственно-временного* тензора Риччи:

$$R_{ij}=-(R\ddot{R}+2\dot{R}^2+2k)\,\widetilde{g}_{ij}. \qquad (15.1.11)$$

Тензор энергии-импульса в рассматриваемом случае должен иметь такой же вид, как для идеальной жидкости:

$$T_{\mu\nu}=pg_{\mu\nu}+(p+\rho)\,U_\mu U_\nu, \qquad (15.1.12)$$

где p и ρ зависят только от t, а U^μ определяется равенствами (14.2.13) и (14.2.14):

$$U^t=1, \qquad U^i=0. \qquad (15.1.13)$$

Правая часть уравнений Эйнштейна равна, таким образом,

$$S_{\mu\nu}\equiv T_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}T^\lambda{}_\lambda=\frac{1}{2}(\rho-p)\,g_{\mu\nu}+(p+\rho)\,U_\mu U_\nu. \qquad (15.1.14)$$

Отсюда с учетом (15.1.1), (15.1.13) получим

$$S_{tt}=\frac{1}{2}(\rho+3p), \qquad (15.1.15)$$

$$S_{it}=0, \qquad (15.1.16)$$

$$S_{ij}=\frac{1}{2}(\rho-p)\,R^2\widetilde{g}_{ij}. \qquad (15.1.17)$$

При подстановке в уравнения Эйнштейна

$$R_{\mu\nu}=-8\pi GS_{\mu\nu}$$

выражений (15.1.6), (15.1.7), (15.1.11) и (15.1.15) — (15.1.17) t-t-компонента дает уравнение

$$3\ddot{R}=-4\pi G\,(\rho+3p)\,R; \qquad (15.1.18)$$

чисто пространственные компоненты сводятся к одному уравнению

$$R\ddot{R}+2\dot{R}^2+2k=4\pi G\,(\rho-p)\,R^2, \qquad (15.1.19)$$

а остальные компоненты являются тождеством $0=0$.

Исключая $\ddot{R}$ из (15.1.18) и (15.1.19), получаем дифференциальное уравнение первого порядка для $R(t)$:

$$\dot{R}^2 + k = \frac{8\pi G}{3}\rho R^2. \tag{15.1.20}$$

Кроме того, имеется еще уравнение сохранения энергии (14.2.19):

$$\dot{p}R^3 = \frac{d}{dt}\{R^3[\rho + p]\},$$

или, что то же самое,

$$\frac{d}{dR}(\rho R^3) = -3pR^2. \tag{15.1.21}$$

Если дано уравнение состояния $p = p(\rho)$, его можно использовать для определения ρ как функции R. Если, например, основной вклад в плотность энергии Вселенной дает нерелятивистское вещество с пренебрежимо малым давлением, из (15.1.21) следует, что

$$\rho \sim R^{-3} \quad \text{при} \quad p \ll \rho. \tag{15.1.22}$$

Если же в плотности энергии преобладает вклад релятивистских частиц, таких, как фотоны, то $p = \rho/3$, и из (15.1.21) получаем

$$\rho \sim R^{-4} \quad \text{при} \quad p = \frac{\rho}{3}. \tag{15.1.23}$$

Если зависимость ρ от R известна, можно, решив уравнение (15.1.20), определить $R(t)$ для всех моментов времени. Таким образом, *фундаментальными уравнениями динамической космологии являются уравнения Эйнштейна* (15.1.20), *уравнение сохранения энергии* (15.1.21) *и уравнение состояния.* Основанные на метрике Робертсона — Уокера космологические модели, в которых $R(t)$ определяется из указанных уравнений, называются моделями Фридмана [1].

[Кстати, полученное таким способом решение $R(t)$ автоматически удовлетворяет уравнениям (15.1.18) и (15.1.19), так как, дифференцируя (15.1.20) по времени и используя (15.1.21), получаем

$$2\dot{R}\ddot{R} = \frac{8\pi G\dot{R}}{3R}\left[-\rho R^2 + \frac{d}{dR}(\rho R^3)\right] = \frac{8\pi G\dot{R}}{3R}(-\rho R^2 - 3pR^2),$$

что эквивалентно уравнению (15.1.18). Уравнение (15.1.19) тривиально следует тогда из (15.1.18) и (15.1.20). Возможность работать с одним уравнением (15.1.20) вместо двух — (15.1.18) и (15.1.19) — является, конечно, следствием того, что эти два уравнения не являются функционально независимыми, а связаны через тождества Бианки с уравнением сохранения энергии (15.1.21).]

Относительно прошлого и будущего расширения Вселенной можно многое узнать уже из простого исследования уравнений (15.1.18) — (15.1.21) без какой-либо конкретизации уравнения состояния. Из (15.1.18) видно, что до тех пор, пока величина $\rho + 3p$ остается положительной, «ускорение» $\ddot{R}/R$ отрицательно. Из того, что в настоящее время $R > 0$ (по определению) и $\dot{R}/R > 0$ (потому что мы наблюдаем красные, а не голубые смещения), следует, что кривая $R(t)$ обращена выпуклостью вверх и *должна проходить через значение* $R(t) = 0$ в *некоторый конечный момент времени в прошлом.* Будем считать, что в этот момент $t = 0$, так что

$$R(0) = 0. \tag{15.1.24}$$

Текущий момент времени t_0 есть в таком случае время, отсчитываемое от этой сингулярности, и будет справедливо называть его возрастом Вселенной. Если бы величина $\ddot{R}(t)$ была равна нулю при $0 < t < t_0$, то функция $R(t)$ в точности равнялась бы $R(t_0)\, t/t_0$ и возраст Вселенной t_0 был бы точно равен времени Хаббла $H_0^{-1} = R(t_0)/\dot{R}(t_0)$. Если $\ddot{R}(t) < 0$ при $0 < t < t_0$, *возраст Вселенной должен быть меньше, чем время Хаббла*:

$$t_0 < H_0^{-1}. \tag{15.1.25}$$

Обращаясь к эволюции Вселенной в будущем, мы видим из уравнения (15.1.21), что, пока давление не становится отрицательным, ρ должно убывать с ростом R по крайней мере как R^{-3} и, следовательно, при $R \to \infty$ правая часть уравнения (15.1.20) убывает по меньшей мере как R^{-1}. При $k = -1$ функция $\dot{R}^2(t)$ остается положительно-определенной все время, поэтому $R(t)$ все время растет:

$$R(t) \to t \quad \text{при} \quad t \to \infty, \quad \text{если } k = -1.$$

То же самое справедливо и при $k = 0$, но рост $R(t)$ медленнее, чем t. Если $k = +1$, $\dot{R}^2(t)$ достигает нуля, когда $\rho R^2 = 3/(8\pi G)$. Тогда, поскольку функция $\ddot{R}$ — отрицательно-определенная, $R(t)$ начнет убывать и в итоге достигнет значения $R = 0$ за некоторый конечный промежуток времени в будущем. Следовательно, ход космической истории качественно определяется знаком пространственной кривизны: *если* $k = -1$ *или* $k = 0$, *Вселенная будет расширяться вечно, если же* $k = +1$, *то расширение со временем прекратится и затем последует сжатие к сингулярному состоянию с* $R = 0$.

Космологический принцип в сочетании с уравнениями Эйнштейна вносит ясность в некоторые из глубоких вопросов, поставленных в свое время Ньютоном и Махом (§ 3 гл. 1).

Допустим, мы хотим изучать некоторую физическую систему S, такую, как Солнечная система или ньютоново вращающееся ведро, размеры которых много меньше космического масштабного фактора R. Можно представить себе S заключенной в сферическую полость, отделяющую S от остальной расширяющейся Вселенной, и, поскольку размеры этой полости много меньше R, можно спокойно считать, что в ней нет ничего, кроме системы S. Если бы не было S, гравитационное поле в полости было бы сферически-симметричным с $R_{\mu\nu} = 0$ и, следовательно, по теореме Биркгофа (§ 7 гл. 11), метрика в полости была бы плоской, эквивалентной метрике Минковского $\eta_{\mu\nu}$. Поскольку система S не слишком велика, мы можем рассматривать ее гравитационное поле как возмущение к $\eta_{\mu\nu}$, игнорируя всю материю вне нашей полости, и изучать поведение S, пользуясь ньютоновской или релятивистской механикой. На вопрос, как выделяются инерциальные системы отсчета, теперь мы можем ответить: единственными системами отсчета, в которых Вселенная в целом выглядит сферически-симметричной и, следовательно, применима теорема Биркгофа, являются системы, имеющие началом центр нашей полости и не вращающиеся по отношению к расширяющемуся облаку «типичных» галактик. Инерциальной системой является любая система, движущаяся с постоянной скоростью и без вращения относительно систем отсчета, в которых Вселенная выглядит сферически-симметричной.

Эти замечания приводят к альтернативному выводу [2, 3] динамических уравнений расширяющейся Вселенной. Если мы мысленно построим где-либо во Вселенной сопутствующую сферическую поверхность, то при ее радиусе, много меньшем, чем $R(t)$, галактики внутри сферы будут двигаться под влиянием лишь своих гравитационных полей, а гравитационным полем остальной Вселенной можно будет пренебречь. Тогда мы можем представлять себе Вселенную как состоящую из всюду однородно расширяющегося ньютоновского газа. Любая частица газа будет иметь траекторию

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t_0)\frac{R(t)}{R(t_0)},$$

где $R(t)$ — масштабный фактор, общий для всего газа. Отметим, что наблюдатель, находящийся на любой из частиц газа, видит этот газ таким же, каким его видит наблюдатель, расположившийся в начале системы отсчета. Кроме того, «сопутствующими» координатами частицы газа являются $r^i \equiv x^i(t_0)$, а вовсе не $x^i(t)$. Гравитационная потенциальная энергия V такой частицы возникает от взаимодействия с материей внутри сферы радиусом $|\mathbf{x}(t)|$ и с центром в начале системы отсчета:

$$V(t) = -\frac{4\pi}{3}|\mathbf{x}(t)|^3\rho(t)\frac{mG}{|\mathbf{x}(t)|} = -\frac{4\pi}{3}mG|\mathbf{x}(t_0)|^2\rho(t)\frac{R^2(t)}{R^2(t_0)},$$

здесь m — масса частицы и $\rho(t)$ — однородная плотность газа. Кинетическая энергия частицы равна

$$T(t)=\frac{1}{2}m|\dot{\mathbf{x}}(t)|^2=\frac{1}{2}m|\mathbf{x}(t_0)|^2\frac{\dot{R}^2(t)}{R^2(t_0)},$$

и, следовательно, ее полная энергия

$$E\equiv T(t)+V(t)=\frac{1}{2}m\frac{|\mathbf{x}(t_0)|^2}{R^2(t_0)}\left[\dot{R}^2(t)-\frac{8\pi G}{3}\rho(t)R^2(t)\right].$$

При постоянном E это равенство совпадает с уравнением (15.1.20), если мы положим, что энергия частицы

$$E=-\frac{1}{2}m\frac{|\mathbf{x}(t_0)|^2}{R^2(t_0)}k. \tag{15.1.26}$$

Если $k=-1$, то $E>0$ и тяготение не может воспрепятствовать рассеянию газа в бесконечность с конечной асимптотической скоростью. При $k=0$ имеем $E=0$, и газ все еще может неограниченно расширяться. Если $k=+1$, то $E<0$ и расширение рано или поздно прекратится и сменится сжатием.

Хотя ньютоновская космология может воспроизвести главные результаты, получаемые из уравнений Эйнштейна, она существенно неполна по нескольким причинам. Мы вынуждены прибегать к общей теории относительности, чтобы оправдать пренебрежение всей материей вне сферы радиусом $|\mathbf{x}(t)|$ при вычислении гравитационного потенциала в точке $\mathbf{x}(t)$. Мы не имеем права пользоваться ньютоновской механикой, когда среда сама состоит из частиц с релятивистскими *локальными* скоростями. Наконец, только в рамках общей теории относительности мы можем правильно интерпретировать наблюдения световых сигналов в терминах космического масштабного фактора $R(t)$.

§ 2. Плотность и давление во Вселенной в настоящее время

Давление и плотность энергии во Вселенной в настоящий момент времени задаются уравнениями (15.1.18) и (15.1.19):

$$\rho_0=\frac{3}{8\pi G}\left(\frac{k}{R_0^2}+H_0^2\right), \tag{15.2.1}$$

$$p_0=-\frac{1}{8\pi G}\left[\frac{k}{R_0^2}+H_0^2(1-2q_0)\right]. \tag{15.2.2}$$

Здесь R_0 — нынешнее значение космического масштабного фактора $R(t)$, H_0 и q_0 — постоянная Хаббла и параметр замедления, определенные в § 3 гл. 14 как современные значения $\dot{R}/R$ и $-R\ddot{R}/\dot{R}^2$. Из (15.2.1) следует, что пространственная кривизна k/R^2 положительна или отрицательна в зависимости от того,