Уравнение (15.9.44) имеет очень простые решения:

$$\delta_\pm \sim t^\alpha, \qquad \alpha = -\frac{1}{6} \pm \left(\frac{25}{36} - \Lambda^2\right)^{1/2}. \tag{15.9.46}$$

Оба решения описывают медленно затухающие колебания при $\Lambda > 5/6$ и убывают при $5/6 > \Lambda > 2/3$, тогда как при $\Lambda < 2/3$ δ_+ растет, а δ_- убывает. Условием роста δ_+ является, следовательно, неравенство

$$\frac{v_s^2 \mathbf{q}^2}{6\pi G\rho R^2} < \frac{2}{3},$$

которое в точности совпадает с условием Джинса $v_s^2 \mathbf{k}^2 < 4\pi G\rho$.

В этом формализме нетрудно учесть диссипативные явления. Здесь наиболее интересным является затухание из-за конечного среднего свободного пробега фотонов в течение той части фазы Б, когда преобладает вещество, т. е. в период, предшествующий рекомбинации, когда плотность энергии излучения aT^4 много меньше плотности вещества nm_{H}, а масса Джинса много больше галактической массы. Согласно (15.8.27) — (15.8.30), влияние вязкости в это время пренебрежимо мало по сравнению с теплопроводностью. Поэтому диссипативные явления можно учесть [281a], используя уравнение состояния для того, чтобы выразить возмущение давления p_1 в (15.9.7) через возмущения температуры T_1 и плотности ρ_1, и добавляя к уравнениям (15.9.6) — (15.9.9) обычное нерелятивистское уравнение теплопроводности. Нет необходимости рассматривать все это здесь, поскольку и теплопроводность, и вязкость будут включены в общерелятивистскую теорию, изложенную в следующем параграфе.

§ 10. Общерелятивистская теория малых флуктуаций

Нерелятивистский анализ, проведенный в предыдущем параграфе, вполне годится для изучения возмущений сжатия и вращательных возмущений в эру преобладания вещества, когда $p \ll \rho$. Однако если интересоваться эрой преобладания излучения, или эрой преобладания лептонов, когда p того же порядка, что и ρ, то необходима релятивистская теория. Она нужна также при изучении распространения гравитационного излучения в любую эру.

Релятивистская теория малых возмущений в расширяющейся Вселенной довольно сложна, поэтому здесь мы будем иметь дело только с простейшим случаем, когда кривизна невозмущенной метрики Робертсона — Уокера равна нулю ($k = 0$). Это ограничение не слишком жесткое, поскольку результаты для $k = +1$ или $k = -1$, по существу, те же, если рассматривать только раннюю Вселенную, в которой $R^2 \gg |k|$, и только такие возмущения, длины волн которых много меньше R. Так или иначе, этот случай наиболее интересен, поскольку рост сгущений в недавнем прошлом может быть описан при любом значении k нерелятивистской теории предыдущего параграфа.

Здесь оказывается удобным учитывать диссипативные явления с самого начала. Среда характеризуется коэффициентом вязкости сдвига η и коэффициентом теплопроводности χ; объемной вязкостью, как было отмечено в § 8 этой главы, можно пренебречь, поскольку вклад вещества в давление и плотность кинетической энергии много меньше вклада излучения.

Диссипативные явления можно учесть, добавляя соответствующие члены к тензору энергии-импульса. Для неидеальной релятивистской жидкости в отсутствие гравитации эти члены были найдены в § 11 гл. 2. Правильное выражение для тензора энергии-импульса в гравитационном поле получается немедленно, если переписать (2.11.21) в общековариантном виде:

$$T^{\mu\nu} = pg^{\mu\nu} + (p+\rho)\, U^\mu U^\nu - \eta H^{\mu\rho} H^{\nu\sigma} W_{\rho\sigma} - \\ - \chi\,(H^{\mu\rho} U^\nu + H^{\nu\rho} U^\mu)\, Q_\rho, \qquad (15.10.1)$$

где

$$W_{\mu\nu} \equiv U_{\mu;\,\nu} + U_{\nu;\,\mu} - \frac{2}{3} g_{\mu\nu} U^\gamma{}_{;\,\gamma}, \qquad (5.10.2)$$

$$Q_\mu \equiv T_{;\,\mu} + TU_{\mu;\,\nu} U^\nu, \qquad (15.10.3)$$

$$H_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu} + U_\mu U_\nu \qquad (15.10.4)$$

Легко убедиться, что диссипативные члены в $T^{\mu\nu}$ исчезают для метрики Робертсона — Уокера с любым k и поэтому фридмановские решения по-прежнему будут нашим исходным пунктом. В частности, при $k = 0$ имеем обычные невозмущенные решения уравнений Эйнштейна:

$$g_{tt} = -1, \qquad g_{ti} = 0, \qquad g_{ij} = R^2(t)\,\delta_{ij}, \qquad (15.10.5)$$

$$U^t = 1, \qquad U^i = 0, \qquad (15.10.6)$$

где x^i $(i = 1, 2, 3)$ — квазиевклидовы сопутствующие координаты и

$$(\dot{R})^2 = \frac{8\pi\rho G R^2}{3} \qquad (15.10.7)$$

Единственными неисчезающими независимыми компонентами невозмущенной аффинной связности являются в данном случае [см. (15.1.3) — (15.1.5)]

$$\Gamma^t_{ij} = R\dot{R}\,\delta_{ij}, \qquad \Gamma^i_{tj} = \frac{\dot{R}}{R}\,\delta_{ij} \qquad (15.10.8)$$

Рассмотрим возмущение, при котором метрика равна $g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ с малым $h_{\mu\nu}$. Прежде чем выписать уравнения поля для $h_{\mu\nu}$, полезно вспомнить замечание в § 9 гл. 10 о том, что координатным преобразованием (10.9.6) можно из решения $h_{\mu\nu}$ получить эквивалентное ему решение

$$h^*_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \varepsilon_{\mu;\,\nu} + \varepsilon_{\nu;\,\mu},$$

где ε_μ — произвольное малое векторное поле. С помощью (15.10.8) это новое решение приводится к виду

$$h^*_{ij} = h_{ij} + \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial x^j} + \frac{\partial \varepsilon_j}{\partial x^i} - 2R\dot{R}\delta_{ij}\varepsilon_i, \tag{15.10.9}$$

$$h^*_{it} = h_{it} + \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_t}{\partial x^i} - 2\frac{\dot{R}}{R}\varepsilon_i, \tag{15.10.10}$$

$$h^*_{tt} = h_{tt} + 2\frac{\partial \varepsilon_t}{\partial t}. \tag{15.10.11}$$

Весьма удобно выбрать ε_μ так, чтобы

$$h^*_{it} = h^*_{tt} = 0,$$

сохраняя таким образом в максимально возможной степени вид невозмущенной метрики. Это можно осуществить, определив ε_μ следующим образом:

$$\varepsilon_t = -\frac{1}{2}\int h_{tt}\,dt,$$

$$\varepsilon_i = -R^2\int\left[h_{it} + \frac{\partial \varepsilon_t}{\partial x^i}\right]R^{-2}\,dt.$$

Опуская звездочку в $h^*_{\mu\nu}$, будем считать всюду, что координатная система выбрана так, что

$$h_{it} = h_{tt} = 0. \tag{15.10.12}$$

Возмущение $g_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$ приводит к возмущению в аффинной связности (10.9.1), имеющему компоненты

$$\delta\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2R^2}(h_{ij;\,k} + h_{ik;\,j} - h_{jk;\,i}) = \frac{1}{2R^2}\left(\frac{\partial h_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial h_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial h_{jk}}{\partial x^i}\right), \tag{15.10.13}$$

$$\delta\Gamma^t_{jk} = -\frac{1}{2}(h_{tj;\,k} + h_{tk;\,j} - h_{ik;\,t}) = \frac{1}{2}\frac{\partial h_{ik}}{\partial t}, \tag{15.10.14}$$

$$\delta\Gamma^i_{tj} = \frac{1}{2R^2}(h_{it;\,j} + h_{ij;\,t} - h_{tj;\,i}) = \frac{1}{2R^2}\left(\frac{\partial h_{ij}}{\partial t} - \frac{2\dot{R}}{R}h_{ij}\right), \tag{15.10.15}$$

$$\delta\Gamma^t_{ti} = \delta\Gamma^i_{tt} = \delta\Gamma^t_{tt} = 0. \tag{15.10.16}$$

Свертывая, получаем

$$\delta\Gamma_\mu \equiv \delta\Gamma^\nu_{\nu\mu} = \delta\Gamma^i_{i\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{h_{kk}}{2R^2}\right), \tag{15.10.17}$$

причем по повторяющимся латинским индексам подразумевается суммирование от 1 до 3. Возмущение тензора Риччи определяется тогда выражениями

$$\delta R_{ij} = (\delta\Gamma_i)_{;\,j} - (\delta\Gamma^{\mu}_{ij})_{;\,\mu} = \frac{\partial\delta\Gamma_i}{\partial x^j} - \frac{\partial\delta\Gamma^k_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial\delta\Gamma^t_{ij}}{\partial t} -$$

$$- R\dot{R}\delta_{ij}\delta\Gamma_t - \frac{\dot{R}}{R}\delta\Gamma^t_{ij} + R\dot{R}\,(\delta\Gamma^i_{tj} + \delta\Gamma^j_{ti}),$$

$$\delta R_{ti} = (\delta\Gamma_t)_{;\,i} - (\delta\Gamma^{\mu}_{ti})_{;\,\mu} = \frac{\partial\delta\Gamma_t}{\partial x^i} - \frac{\partial\delta\Gamma^i_{ti}}{\partial x^j} - \frac{\dot{R}}{R}\delta\Gamma_i + \frac{\dot{R}}{R}\delta\Gamma^j_{ji},$$

$$\delta R_{tt} = (\delta\Gamma_t)_{;\,t} - (\delta\Gamma^{\mu}_{tt})_{;\,\mu} = \frac{\partial\delta\Gamma_t}{\partial t} + \frac{2\dot{R}}{R}\delta\Gamma^i_{it},$$

или, в более явном виде,

$$\delta R_{ij} = \frac{1}{2R^2}\left(\nabla^2 h_{ij} - \frac{\partial^2 h_{ik}}{\partial x^j\,\partial x^k} - \frac{\partial^2 h_{jk}}{\partial x^i\,\partial x^k} + \frac{\partial^2 h_{kk}}{\partial x^i\,\partial x^j}\right) -$$

$$- \frac{1}{2}\frac{\partial^2 h_{ij}}{\partial t^2} + \frac{\dot{R}}{2R}\,(\dot{h}_{ij} - \delta_{ij}\dot{h}_{kk}) + \frac{(\dot{R})^2}{R^2}\,(-2h_{ij} + \delta_{ij}h_{kk}), \quad (15.10.18)$$

$$\delta R_{ti} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left[R^{-2}\left(\frac{\partial h_{kk}}{\partial x^i} - \frac{\partial h_{ki}}{\partial x^k}\right)\right], \quad (15.10.19)$$

$$\delta R_{tt} = \frac{1}{2R^2}\left[\ddot{h}_{kk} - 2\frac{\dot{R}}{R}\dot{h}_{kk} + 2\left(\frac{\dot{R}^2}{R^2} - \frac{\ddot{R}}{R}\right)h_{kk}\right]. \quad (15.10.20)$$

Согласно формуле (15.10.1), член в правой части уравнений Эйнштейна, описывающий источник, равен

$$S_{\mu\nu} \equiv T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T^{\lambda}{}_{\lambda} = \frac{1}{2}(\rho - p)\,g_{\mu\nu} + (\rho + p)\,U_\mu U_\nu -$$

$$- \eta H_{\mu\rho}H_{\nu\sigma}W^{\rho\sigma} - \chi\,(H_{\mu\rho}U_\nu + H_{\nu\rho}U_\mu)\,Q^{\rho}. \quad (15.10.21)$$

Чтобы сохранялась нормировка скорости U, должно выполняться равенство

$$0 = \delta\,(g_{\mu\nu}U^{\mu}U^{\nu}) = -2U_1{}^t.$$

Возмущения h_{ij}, U_{1i}, ρ_1, p_1, T_1 вызывают следующие изменения в $S_{\mu\nu}$:

$$\delta S_{ij} = \frac{1}{2}(\rho - p)\,h_{ij} + \frac{R^2}{2}\delta_{ij}\,(\rho_1 - p_1) - \eta R^4\delta W^{ij}, \quad (15.10.22)$$

$$\delta S_{it} = -R^2(\rho + p)\,U_1{}^i - \chi\dot{T}\delta H_{it} + \chi R^2\delta Q^i, \quad (15.10.23)$$

$$\delta S_{tt} = \frac{1}{2}(\rho_1 + 3p_1) - 2\chi\dot{T}\delta H_{tt}, \quad (15.10.24)$$

где

$$\delta H_{it} = -R^2 U_1{}^i, \quad \delta H_{tt} = 0, \tag{15.10.25}$$

$$\delta W^{ij} = R^{-2}\left[\frac{\partial U_1^i}{\partial x^j} + \frac{\partial U_1{}^j}{\partial x^i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\nabla\cdot\mathbf{U}_1\right] + \\ + R^{-2}\frac{\partial}{\partial t}\left[R^{-2}\left(h_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}h_{kk}\right)\right], \tag{15.10.26}$$

$$\delta Q^i = R^{-2}\left[\frac{\partial T_1}{\partial x^i} + T\frac{\partial}{\partial t}(R^2 U_1{}^i)\right]. \tag{15.10.27}$$

Окончательно из уравнений Эйнштейна следует, что

$$\delta R_{\mu\nu} = -8\pi G\delta S_{\mu\nu}. \tag{15.10.28}$$

Равенства (15.10.18) — (15.10.20) и (15.10.22) — (15.10.28) приводят к уравнениям

$$\nabla^2 h_{ij} = \frac{\partial^2 h_{ik}}{\partial x^i\,\partial x^k} - \frac{\partial^2 h_{jk}}{\partial x^i\,\partial x^k} + \frac{\partial^2 h_{kk}}{\partial x^i\,\partial x^j} - R^2\ddot{h}_{ij} + \\ + R\dot{R}(\dot{h}_{ij} - \delta_{ij}\dot{h}_{kk}) + 2(\dot{R})^2(-2h_{ij} + \delta_{ij}h_{kk}) = \\ = -8\pi G(\rho - p)R^2 h_{ij} - 8\pi G R^4\delta_{ij}(\rho_1 - p_1) + \\ + 16\pi G\eta R^4\left(\frac{\partial U_1^j}{\partial x^j} + \frac{\partial U_1^j}{\partial x^i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\nabla\cdot\mathbf{U}_1\right) + \\ + 16\pi G\eta R^4\frac{\partial}{\partial t}\left[R^{-2}\left(h_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}h_{kk}\right)\right], \tag{15.10.29}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[R^{-2}\left(\frac{\partial h_{kk}}{\partial x^i} - \frac{\partial h_{ki}}{\partial x^k}\right)\right] = 16\pi G R^2(\rho + p)U_1{}^i - \\ - 16\pi G\chi\dot{T}R^2 U_1{}^i - 16\pi G\chi\left[\frac{\partial T_1}{\partial x^i} + T\frac{\partial}{\partial t}(R^2 U_1^i)\right]. \tag{15.10.30}$$

$$\ddot{h}_{kk} - \frac{2\dot{R}}{R}\dot{h}_{kk} + 2\left(\frac{(\dot{R}^2)}{R^2} - \frac{\ddot{R}}{R}\right)h_{kk} = -8\pi G(\rho_1 + 3p_1)R^2. \tag{15.10.31}$$

Уравнения движения жидкости можно получить или из закона сохранения $T^{\mu\nu}{}_{;\,\mu} = 0$, или непосредственно из уравнений поля. Действуя операторами $\partial/\partial x^i$ и $\partial/\partial t + 3\dot{R}/R$ на уравнения (15.10.29) и (15.10.30), а затем упрощая полученное равенство с помощью уравнений (15.10.30), (15.10.31) и следа уравнения (15.10.29), мы найдем уравнение сохранения импульса

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + 16\pi G\eta\right)\left\{R^5 U_1{}^i(\rho + p - \chi\dot{T}) - \chi R^3\left[\frac{\partial T_1}{\partial x^i} + T\frac{\partial}{\partial t}(R^2 U_1{}^i)\right]\right\} = \\ = -R^3\frac{\partial p_1}{\partial x^i} + \eta R^3\left[\nabla^2 U_1{}^i + \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x^i}\nabla\cdot\mathbf{U}_1 + \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial t}\left(R^{-2}\frac{\partial h_{kk}}{\partial x^i}\right)\right]. \tag{15.10.32}$$

(Вектор $\mathbf{U}_1$ имеет компоненты $U_1{}^i$, а не U_{1i}.) Из дивергенции уравнения (15.10.30) с помощью (15.10.31) и следа уравнения (15.10.29) получим уравнение сохранения энергии

$$\dot{\rho}_1+\frac{3\dot{R}}{R}(\rho_1+p_1)=-(\rho+p)\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{h_{kk}}{2R^2}\right)+\nabla\cdot\mathbf{U}_1\right]+$$
$$+\chi\left[\dot{T}\nabla\cdot\mathbf{U}_1+\frac{1}{R^2}\nabla^2T_1+\frac{T}{R^2}\frac{\partial}{\partial t}(R^2\nabla\cdot\mathbf{U}_1)\right]. \quad (15.10.33)$$

Как обычно, при рассмотрении диссипативных процессов мы должны использовать также и уравнение сохранения тока частиц nU^μ:

$$0=(nU^\mu)_{;\,\mu}=U^\mu\frac{\partial n}{\partial x^\mu}+nU^\mu{}_{;\,\mu}.$$

(Строго говоря, в качестве n следует брать плотность барионов или лептонов.) Для невозмущенного решения имеем уже знакомый результат:

$$n\sim R^{-3},$$

и с точностью до первого порядка по возмущениям n_1, $\mathbf{U}_1$, h_{ij} получим

$$0=\frac{\partial n_1}{\partial t}+\frac{3\dot{R}}{R}n_1+n\left[\nabla\cdot\mathbf{U}_1+\delta\Gamma^\nu_{t\nu}\right]$$

или, используя (15.10.17),

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{n_1}{n}\right)=-\nabla\cdot\mathbf{U}_1-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{h_{kk}}{2R^2}\right). \quad (15.10.34)$$

Уравнения (15.10.29) — (15.10.34) образуют удобную систему фундаментальных уравнений, но следует иметь в виду, что они не все независимы; это видно из самого способа их получения.

Одно решение этих уравнений можно найти сразу:

$$h_{ij}(\mathbf{x},t)=R^2(t)\left[\frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x^j}+\frac{\partial f_j(\mathbf{x})}{\partial x^i}\right],$$
$$\rho_1=p_1=\mathbf{U}_1=n_1=T_1=0, \quad (15.10.35)$$

где $\mathbf{f}$ — произвольная функция положения. [При подстановке для проверки в (15.10.29) следует воспользоваться уравнением (15.1.20).] Однако если обратиться к выражениям (15.10.9) — (15.10.11), то становится ясным, что это возмущение не имеет физического содержания, а представляет собой эффект бесконечно малого преобразования координат вида (10.9.6):

$$x^\mu\to x^\mu-\varepsilon^\mu(x),$$
$$\varepsilon^t=0,\quad \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x},t)=R^2(t)\,\mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (15.10.36)$$

структура которого сохраняет равенства $h_{it}=0$, $h_{tt}=0$. Нас же интересуют физические возмущения, вид которых по необходимости должен отличаться от (15.10.35).

Явная пространственная однородность уравнений (15.10.29)—(15.10.34) позволяет искать решения с пространственной зависимостью вида

$$h_{ij},\ \rho_1,\ p_1,\ U_1,\ n_1,\ T_1 \sim \exp(i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}) \qquad (15.10.37)$$

с постоянным волновым числом $\mathbf{q}$. Так же как и в нерелятивистском случае, удобно разложить общее решение на нормальные моды. Теперь мы имеем моды трех различных типов.

Излучательные моды

Имеется простой класс решений, таких, что

$$0 = h_{kk} = q_i h_{ij} = \rho_1 = p_1 = U_{1i} = n_1 = T_1. \qquad (15.10.38)$$

Уравнения (15.10.30) — (15.10.34) при этом удовлетворяются тривиально, а уравнение (15.10.29) вместе с (15.1.20) дает

$$\ddot{h}_{ij} + \left(-\frac{\dot{R}}{R} + 16\pi G\eta\right)\dot{h}_{ij} + \left(\frac{\mathbf{q}^2}{R^2} - \frac{2\ddot{R}}{R} - \frac{32\pi G\eta\dot{R}}{R}\right)h_{ij} = 0. \qquad (15.10.39)$$

Для очень больших волновых чисел можно найти общее ВКБ-решение второго порядка

$$h_{ij} \sim R\exp\left[\int\left(\frac{\pm i\,|\mathbf{q}|}{R} - 8\pi G\eta\right)dt\right]. \qquad (15.10.40)$$

При медленно меняющихся R и η этот результат, справедливый в сопутствующей системе, можно переписать для почти евклидовой системы, умножив h_{ij} на масштабный множитель R^{-2}. Таким образом, выражение (15.10.40) соответствует плоской гравитационной волне вида (10.2.1), причем

$$e_{\mu\nu} \sim \frac{1}{R}\exp\left(-8\pi G\int\eta\,dt\right),$$

$$\mathbf{k} = \frac{\mathbf{q}}{R}.$$

Согласно (10.3.7), плотность энергии τ_g^{00} этих гравитационных волн убывает как

$$\tau_g^{00} \sim R^{-4}\exp\left(-16\pi G\int\eta\,dt\right). \qquad (15.10.41)$$

Множитель R^{-4} как раз такой, какого следует ожидать для свободного расширения любой волны, соответствующей безмассовой частице [ср. (15.1.23)]. Второй множитель в (15.10.41) говорит о поглощении гравитационных волн в *вязкой* среде со скоростью [287]

$$\Gamma_g = 16\pi G\eta. \qquad (15.10.42)$$

Обычно коэффициент η по порядку величины равен произведению плотности тепловой энергии на некоторое среднее время свободного пробега τ, так что Γ_g самое большее порядка $(\dot{R})^2\tau/R^2$. Отсюда, коль скоро частота столкновений τ^{-1} много больше относительной скорости расширения $\dot{R}/R$, то коэффициент затухания Γ_g много меньше, чем $\dot{R}/R$, и поэтому вязкость мало влияет на распространение гравитационной волны. Пренебрегая вязкостью и предполагая степенную зависимость $R\ (t)$ от времени:

$$R\ (t) \sim t^n, \tag{15.10.43}$$

мы можем найти решение уравнения (15.10.39), справедливое для всех длин волн:

$$h_{ij} \sim t^{(n+1)/2} J_{\pm\nu}\left[\frac{|\mathbf{q}|\,t}{(1-n)\,R}\right], \tag{15.10.44}$$

где $J_{\pm\nu}$ — обычная функция Бесселя порядка $\pm\nu$ и

$$\nu = \frac{3n-1}{2-2n}. \tag{15.10.45}$$

[В эру преобладания вещества (15.10.43) выполняется при $n = 2/3$, а в эру преобладания излучения — при $n = 1/2$.] В отличие от распространения электромагнитных волн в плазме теперь нет четкого нижнего предела частот, при которых может распространяться гравитационная волна; вместо этого при $|\mathbf{q}|\,t \ll R$ решения ведут себя как

$$n_{ij} \sim t^{2n} \text{ или } t^{1-n} \tag{15.10.46}$$

и постепенно перерастают при $|\mathbf{q}|\,t \gg R$ в волноподобные решения (15.10.40).

Вращательные моды

Есть также другой простой класс решений, в котором

$$0 = h_{kk} = \mathbf{q}\cdot\mathbf{U}_1 = \rho_1 = p_1 = n_1 = T_1. \tag{15.10.47}$$

Теперь тривиально удовлетворяются уравнения (15.10.31), (15.10.33) и (15.10.34), а (15.10.32) становится уравнением для поперечной части $\mathbf{U}_1$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + 16\pi G\eta\right)[R^5(\rho + p - \chi\dot{T})\,\mathbf{U}_1] = -\eta R^3 \mathbf{q}^2 \mathbf{U}_1. \tag{15.10.48}$$

Тогда уравнения (15.10.29) и (15.10.30) определяют гравитационное поле, созданное вращениями, которые определяются вектором $\mathbf{U}_1$. Эти уравнения поля автоматически согласуются с (15.10.48), так как уравнения движения, из которых выведено уравнение (15.10.48), сами получены из уравнений поля. При пренебрежении давлением уравнение (15.10.48) дает зависимость $\mathbf{U}_1$ от времени:

$$\mathbf{U}_1 \sim \frac{1}{R^5(\rho+p)}, \qquad (15.10.49)$$

которую можно рассматривать как релятивистское обобщение (в сопутствующих координатах) ньютоновского результата (15.9.22)

Моды сжатия

И на этот раз наиболее яркая зависимость от времени наблюдается у тех мод сжатия, которые не ограничены условием равенства нулю величин h_{kk}, $\mathbf{q}\cdot\mathbf{U}_1$, ρ_1, p_1, T_1, n_1. Уравнения (15.10.31), (15.10.33) и (15.10.34) и дивергенция уравнения (15.10.32) приводят в этом случае к системе уравнений для этих величин:

$$\ddot{h}_{kk} - \frac{2\dot{R}}{R}\dot{h}_{kk} + 2\left(\frac{(\dot{R})^2}{R^2} - \frac{\ddot{R}}{R}\right)h_{kk} = -8\pi G R^2(\rho_1 + 3p_1), \qquad (15.10.50)$$

$$\dot{\rho}_1 + \frac{3\dot{R}}{R}(\rho_1 + p_1) = -(\rho+p)\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{h_{kk}}{2R^2}\right) + i\mathbf{q}\cdot\mathbf{U}_1\right] +$$
$$+ \chi\left[i\dot{T}\mathbf{q}\cdot\mathbf{U}_1 + \frac{iT}{R^2}\frac{\partial}{\partial t}(R^2\mathbf{q}\cdot\mathbf{U}_1) - \frac{\mathbf{q}^2}{R^2}T_1\right], \qquad (15.10.51)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{n_1}{n}\right) = -i\mathbf{q}\cdot\mathbf{U}_1 - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{h_{kk}}{2R^2}\right), \qquad (15.10.52)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + 16\pi G\eta\right)\left[i\mathbf{q}\cdot\mathbf{U}_1 R^5(\rho + p - \chi\dot{T}) + \chi R^3\left[\mathbf{q}^2 T_1 - i\frac{\partial}{\partial t}(R^2\mathbf{q}\cdot\mathbf{U}_1)\right]\right] =$$
$$= R^3\mathbf{q}^2 p_1 - \eta R^3\mathbf{q}^2\left[\frac{4i}{3}\mathbf{q}\cdot\mathbf{U}_1 + \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{h_{kk}}{R^2}\right)\right]. \qquad (15.10.53)$$

Если мы воспользуемся уравнением состояния для того, чтобы выразить p_1 и ρ_1 через n_1 и T_1, то (15.10.50) — (15.10.53) можно рассматривать как четыре уравнения для четырех неизвестных h_{kk}, $\mathbf{q}\cdot\mathbf{U}_1$, n_1 и T_1. Читатель может сам убедиться, что из этих уравнений получается скорость затухания (15.8.30) для тех волновых чисел флуктуаций, которые много больше, чем предел Джинса, и при которых гравитацией и расширением Вселенной можно пренебречь. Кроме того, в нерелятивистском пределе без учета затухания эти уравнения сводятся к выведенным выше ньютоновским уравнениям (15.9.20) и (15.9.21), если положить

$$\delta \equiv \frac{\rho_1}{p}, \qquad \varepsilon \equiv -\frac{R}{\mathbf{q}^2}\left\{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{U}_1 + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{h_{kk}}{R^2}\right)\right\}.$$

Строгое обсуждение нормальных мод, описываемых уравнениями (15.10.50) — (15.10.53), читатель может найти в обзоре Филда [286]. Сейчас для наших целей достаточно рассмотреть лишь предельный случай весьма малых волновых чисел. В пределе $\mathbf{q} \to 0$ все диссипативные эффекты исчезают; в самом деле, исключив h_{kk} из (15.10.51) и (15.10.52), можно показать, что энтропия при этих возмущениях остается постоянной и, следовательно,

$$p_1 = v_s^2 \rho_1. \tag{15.10.54}$$

Кроме того, удобно использовать (15.1.21) для того, чтобы представить уравнение (15.10.51) в виде

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{h_{kk}}{R^2}\right) = \frac{1}{\rho+p}\left[\dot{\rho}_1 - \frac{\dot{\rho}\,(1+v_s^2)}{\rho+p}\rho_1\right] =$$
$$= \frac{1}{\rho+p}\left[\dot{\rho}_1 - \frac{(\dot{\rho}+\dot{p})}{\rho+p}\rho_1\right] = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho_1}{\rho+p}\right).$$

Добавление не зависящего от времени члена к h_{kk}/R^2 соответствовало бы простому координатному преобразованию вида (15.10.36), и, следовательно, решение существенно единственное:

$$h_{kk} = -2R^2\delta, \tag{15.10.55}$$

где δ определяется теперь равенством

$$\rho_1 = (\rho + p)\,\delta. \tag{15.10.56}$$

Используя равенства (15.10.54) — (15.10.56) в уравнении (15.10.56), получим дифференциальное уравнение второго порядка

$$\ddot{\delta} + \frac{2\dot{R}}{R}\dot{\delta} - 4\pi G\,(\rho+p)\,(1+3v_s^2)\,\delta = 0. \tag{15.10.57}$$

Теперь мы наконец можем вычислить скорость роста в фазе A, т. е. в тот ранний период, когда масса Джинса очень мала и в плотности энергии доминирует излучение и нейтрино. В этом случае мы имеем

$$R \sim t^{1/2}, \quad \rho = \frac{3}{32\pi G t^2}, \quad p = \frac{\rho}{3}, \quad v_s = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

и уравнение (15.10.57) принимает вид

$$\ddot{\delta} + \frac{1}{t}\dot{\delta} - \frac{1}{t^2}\delta = 0 \tag{15.10.58}$$

Снова имеем растущее решение δ_+ и убывающее δ_-:

$$\delta_+ \sim t, \qquad \delta_- \sim t^{-1}, \tag{15.10.59}$$

но экспоненциального роста нет.

§ 11. Очень ранняя Вселенная

В § 6 этой главы температурная история Вселенной прослежена в прошлое вплоть до эры, когда температура была около 10^{12} К. В этот ранний период Вселенная была заполнена частицами — фотонами, лептонами и антилептонами, взаимодействующими,