стремится к нулю как $R(t_1)$. Вопрос о парадоксе Ольберса возникает лишь в моделях, в которых, как, например, в стационарной космологии, предполагается, что Вселенная существует бесконечно долго. В таких моделях необходимое условие отсутствия парадокса Ольберса состоит в том, что

$$t_1 R^4(t_1)\,\mathscr{L}(t_1) \to 0 \text{ при } t_1 \to -\infty. \tag{16.1.3}$$

Для нейтрино условие несколько более строгое [4]: вместо $R^4(t_1)$ должно быть $R^3(t_1)$, поскольку один из множителей $R(t_1)/R(t_0)$ в (16.1.2) появляется из-за потери энергии индивидуальными «покрасневшими» фотонами, а для нейтрино в принципе наблюдаемы как плотность *энергии*, так и плотность *частиц*. Единственной популярной космологической моделью, в которой условие (16.1.3) не удовлетворяется, является модель осцилляций, обсуждавшаяся в § 11 гл. 15. В этом случае, чтобы не было парадокса Ольберса, необходимо поглощение, но оно происходит в эру очень сильного сжатия, и красное смещение при последующем расширении спасает нас от нестерпимо яркого ночного неба. С этой точки зрения 2,7-градусный микроволновый фон представляется тусклым отблеском того грозного огненного горнила, о котором поведали нам де Шезо и Ольберс.

§ 2. Модели с космологической постоянной

Когда Эйнштейн создавал общую теорию относительности (1916 г.), все считали Вселенную статической. Согласно (15.1.18) и (15.1.19), масштабный фактор $R(t)$ может быть постоянным, только если

$$\rho = -3p = \frac{3k}{8\pi G R^2}$$

Однако это требует, чтобы или плотность энергии ρ или давление p были *отрицательными*. Чтобы избежать такого нефизического результата, Эйнштейн в 1917 г. видоизменил свои уравнения следующим образом [5]:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R_\rho{}^\rho - \lambda g_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu}, \tag{16.2.1}$$

где λ — новая фундаментальная постоянная, называемая *космологической постоянной*.

В конце § 1 гл. 7 мы уже отмечали, что уравнение (16.2.1) является наиболее общей модификацией уравнений Эйнштейна, сохраняющей то свойство, что $T_{\mu\nu}$ приравнивается тензору, построенному из $g_{\mu\nu}$ его первых и вторых производных и линейному по вторым производным $g_{\mu\nu}$. Однако для наших нынешних целей удобнее перенести $\lambda g_{\mu\nu}$ в правую сторону уравнений:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R^\rho{}_\rho = -8\pi G \tilde{T}_{\mu\nu}, \tag{16.2.2}$$

где $\widetilde{T}_{\mu\nu}$ — модифицированный тензор энергии-импульса

$$\widetilde{T}_{\mu\nu} \equiv T_{\mu\nu} - \frac{\lambda}{8\pi G} g_{\mu\nu}. \tag{16.2.3}$$

Если $T_{\mu\nu}$ имеет вид (15.1.12), соответствующий идеальной жидкости, то к такому же виду приводится и $\widetilde{T}_{\mu\nu}$:

$$\widetilde{T}_{\mu\nu} = \widetilde{p} g_{\mu\nu} + (\widetilde{p} + \widetilde{\rho}) U_\mu U_\nu, \tag{16.2.4}$$

где введены модифицированные плотность и давление

$$\widetilde{p} = p - \frac{\lambda}{8\pi G}, \qquad \widetilde{\rho} = \rho + \frac{\lambda}{8\pi G}. \tag{16.2.5}$$

Все результаты, полученные в § 1 гл. 15, по-прежнему применимы и в теориях с космологической постоянной при замене величин p и ρ модифицированными давлением и плотностью (16.2.5).

В частности, условие статичности Вселенной выглядит теперь следующим образом:

$$\widetilde{\rho} = -3\widetilde{p} = \frac{3k}{8\pi G R^2}. \tag{16.2.6}$$

Для Вселенной, заполненной «пылью» (т. е. $p = 0$), отсюда следует

$$\frac{k}{R^2} = \lambda, \tag{16.2.7}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{4\pi G} \tag{16.2.8}$$

Чтобы плотность ρ была положительной, согласно (16.2.8), требуется, чтобы и постоянная λ была положительной. Тогда из (16.2.7) видно, что

$$k = +1 \tag{16.2.9}$$

и

$$R = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}. \tag{16.2.10}$$

Следовательно, статическая вселенная Эйнштейна *конечна* (хотя, разумеется, не ограничена), имеет положительную кривизну и плотность, фиксированную заданием фундаментальных постоянных λ и G.

Открытие в 1920-х гг. систематического соотношения между ррасным смещением и расстоянием привело к утрате всякого интекеса к статической вселенной Эйнштейна как к реалистической космологической модели. Тем не менее существование космологической постоянной остается логической возможностью, и космологи досконально исследовали динамику расширяющейся вселенной с космологической постоянной (см., например, [3], гл. IX). Здесь мы уделим внимание лишь моделям с нулевым давлением, в которых, согласно (15.1.21), величина ρR^3 постоянна. Удобно выразить эту постоянную через значение, которое она имела бы в статической модели Эйнштейна:

$$\rho R^3 = \frac{\alpha}{4\pi G \sqrt{|\lambda|}}. \tag{16.2.11}$$

Динамическое уравнение (15.1.20), в котором плотность ρ заменена на $\tilde{\rho}$ [см. (16.2.5)], имеет вид

$$(\dot{R})^2 = \frac{1}{R}\left\{\frac{\lambda R^3}{3} - kR + \frac{2\alpha}{3\sqrt{|\lambda|}}\right\}. \tag{16.2.12}$$

Характер поведения $R(t)$ зависит от расположения нулей, максимумов и минимумов кубической формы в правой части. Есть три особо интересных случая, которые связаны с именами де Ситтера, Леметра и Эддингтона.

В *модели де Ситтера* [6] пространство существенно пустое и плоское, так что $k = \alpha = 0$, а $\lambda > 0$. Уравнение (16.2.12) здесь имеет простое решение:

$$R \sim e^{Ht}, \tag{16.2.13}$$

$$H = \left(\frac{\lambda}{3}\right)^{1/2}. \tag{16.2.14}$$

Метрика совпадает с метрикой стационарной модели, обсуждавшейся в § 8 гл. 14, с той разницей, что вместо непрерывного рождения материи здесь нет материи вообще! Как было указано в § 3 гл. 13, эта метрика допускает десятипараметрическую группу изометрий, которая есть группа «вращений» в пяти измерениях, оставляющих инвариантной диагональную матрицу с элементами $+1, +1, +1, +1, -1$. Соответственно, эту группу часто называют *группой де Ситтера*. Хотя отсутствие в модели де Ситтера материи исключает отношение к ней как к серьезной космологической модели, следует все же отметить, что любая модель с $\lambda > 0$ переходит в модель де Ситтера при $R \to \infty$.

В так называемой *модели Леметра* [7] пространство имеет положительную кривизну, $\lambda > 0$ и вещества в ней больше, чем в статической модели Эйнштейна, так что $k = +1$ и $\alpha > 1$. Из уравнения (16.2.12) следует, что масштабный фактор R при $t = 0$ начинает расти как $t^{2/3}$, но затем расширение замедляется, скорость расширения доходит до минимума при $R = \alpha^{1/3}/\sqrt{\lambda}$, после чего расширение снова ускоряется, асимптотически приближаясь к деситтеровскому поведению (16.2.13). Наиболее замечательным свойством этой модели является наличие в ней «периода отдыха», в течение которого $R(t)$ остается близким к значению $R = \alpha^{1/3}/\sqrt{\lambda}$, определяющему минимум функции $\dot{R}$. В этот период уравнение (16.2.12) с $k = +1$ можно записать в приближенном виде:

$$(\dot{R})^2 \approx \alpha^{2/3} - 1 + \left(\sqrt{\lambda} R - \alpha^{1/3}\right)^2.$$

Решением этого уравнения является

$$R = \frac{\alpha^{1/3}}{\sqrt{\lambda}} \left[1 + \left(1 - \alpha^{-2/3}\right)^{1/2} \operatorname{sh}\left(\sqrt{\lambda}(t - t_m)\right)\right],$$

где t_m — момент, когда $\dot{R}$ достигает минимума. Если постоянная α очень близка к единице, то R остается близким значению R в статической модели Эйнштейна (16.2.10) в течение длительного времени порядка

$$\Delta t = \lambda^{-1/2} \mid \ln\left(1 - \alpha^{-2/3}\right) \mid. \qquad (16.2.15)$$

Модель Эддингтона — Леметра является предельным случаем модели Леметра; она привлекла к себе особое внимание в связи с работой Эддингтона [8]. Кривизна и масса в ней такие же, как в статической модели Эйнштейна, т. е. $k = +1$ и $\alpha = 1$, а развитие во времени в ней такое же, как в модели Леметра с бесконечно долгим «периодом отдыха». Таким образом, если развитие начинается с $R = 0$ при $t = 0$, то при $t \to \infty$ R асимптотически стремится к эйнштейновскому значению $1/\sqrt{\lambda}$. Напротив, если развитие начинается с $R = 1/\sqrt{\lambda}$ при $t = 0$, то R монотонно растет по экспоненциальному закону (16.2.13), характерному для модели де Ситтера. Отсюда сразу видно, что модель Эйнштейна *неустойчива*, так как если на нее наложить бесконечно медленное расширение или сжатие, то R будет продолжать расти или сжиматься с зависимостью от времени, определяемой моделью Эддингтона — Леметра.

Наблюдаемая концентрация красных смещений квазаров около $z \approx 2$ (§ 6 гл. 11 и § 8 гл. 14) оживила интерес к моделям Леметра [9—11], поскольку возникла мысль, что существует необычайно большое число квазаров при выделенном значении масштабного фактора, $R \approx R_0/3$, чего можно было бы ожидать в модели Леметра, в которой радиус «отдыха» $\alpha^{1/3}/\sqrt{\lambda}$ совпадает с этим выделенным значением R. Подбирая $\alpha \approx 1$, можно получить такой «период отдыха», какой нам нужен, так что преобладание выделенного красного смещения $z \approx 2$ можно сделать столь сильным, сколь это необходимо для объяснения наблюдений квазаров. С этой новой мотивировкой в последнее время были проведены исследования распространения световых сигналов вокруг Вселенной [12], числа радиоисточников [13—15] и образования галактик [16] в моделях Леметра. Хотя нет никаких четких данных против моделей Леметра, но все же представляется довольно искусственным объяснять ими то, что, быть может, является просто деталью эволюции квазаров [1]).

§ 3. Еще раз о стационарной модели

Если Вселенная не только изотропна и однородна в пространстве, но еще и однородна во времени, то, как показано в § 8 гл. 14, она должна иметь метрику Робертсона — Уокера с

$$k = 0, \qquad R(t) \sim e^{Ht}, \tag{16.3.1}$$

где H — постоянная Хаббла, в этом случае настоящая постоянная, данная нам природой. Кроме того, все скаляры, такие, как ρ и p, не должны зависеть от времени так же, как и от положения:

$$\dot{\rho} = \dot{p} = 0. \tag{16.3.2}$$

Уравнения поля, на которых основана стационарная модель в § 8 гл. 14, не уточнялись, но ясно, что в применении к ней уравнения Эйнштейна следует видоизменить. Уравнения Эйнштейна согласуются с тождествами Бианки только при сохраняющемся тензоре энергии-импульса, но постоянство давления не нарушает уравнения сохранения энергии (14.2.19) только при условии $\rho = -p$, которое требует в свою очередь выполнения одного из двух неравенств: $\rho < 0$ или $p < 0$.

Таким образом, необходимо видоизменить уравнения Эйнштейна, добавив поправочный член [17]:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R^{\lambda}{}_{\lambda} + C_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu}. \tag{16.3.3}$$

Непосредственным вычислением с использованием (16.3.1) в уравнениях (15.1.6), (15.1.7) и (15.1.11) получаем

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R^{\lambda}{}_{\lambda} = 3H^2 g_{\mu\nu}.$$

Следовательно, поправочный член, требующийся в стационарной модели, имеет вид

$$C_{\mu\nu} = -(8\pi G p + 3H^2)\, g_{\mu\nu} - 8\pi G\, (\rho + p)\, U_\mu U_\nu, \tag{16.3.4}$$

где U^μ — вектор 4-скорости, причем $U^t = 1$, $U^i = 0$.

Для того чтобы что-то извлечь из формулы (16.3.4), нужно выдвинуть какие-то априорные идеи относительно вида тензора

---

[1]) Надо иметь в виду, что далекие квазары трудно обнаружить из-за бедности спектра, который становится доступным наблюдению при очень больших красных смещениях. По-видимому, резких аномалий в распределении квазаров на самом деле нет.— *Прим. ред.*