а не просто обычным запаздывающим решением. В 1945 г. Уилер и Фейнман [21] показали, что эта трудность может быть обойдена при учете электромагнитного взаимодействия на расстоянии ускоренного и пробного зарядов со всеми остальными зарядами во Вселенной. Однако они рассматривали статическую космологическую модель и поэтому могли получить электромагнитное взаимодействие, соответствующее или чисто запаздывающему или чисто опережающему решению. Позднее Хогарт [22] указал, что эта неоднозначность могла бы быть устранена при рассмотрении более реалистических моделей, учитывающих расширение Вселенной. Согласно Хойлу и Нарликару [23], в стационарной модели возможно только чисто запаздывающее решение, а в фридмановской модели с $k \leqslant 0$ — чисто опережающее решение. Хойл и Нарликар впоследствии распространили свои результаты на C-поле [24], теорию гравитации [25] (см. также [26]) и квантовую электродинамику [27]. Эта линия развития несомненно является интригующим подходом к старой проблеме связи физики микромира со свойствами Вселенной в целом. К этой проблеме мы еще вернемся в следующем параграфе. Однако на сегодняшний день было бы слишком рано считать, что из микрофизики следует требование стационарности Вселенной, поскольку нет никаких оснований полагать, что электродинамику и другие полевые теории нужно формулировать в терминах дальнодействия.

§ 4. Модели с переменной гравитационной постоянной

Гравитационные силы исключительно слабы по стандартам атомной и ядерной физики. Например, отношение гравитационной и электрической сил, действующих между протоном и электроном, равно

$$Gm_p \frac{m_e}{e^2} = 4{,}4 \ 10^{-40}. \tag{16.4.1}$$

Несмотря на многочисленные попытки (см., например, [28]), не было дано никакого убедительного объяснения причин, по которым такая ничтожная безразмерная величина должна появиться в фундаментальных законах физики. Один из подходов к объяснению этого основан на предположении, что числа, подобные (16.4.1), возникают не только из микрофизики, но в какой-то степени определены влиянием всей Вселенной. В этом подходе используется тот факт, что из величин G, $\hbar$, c и постоянной Хаббла H_0 можно построить массу, которая не слишком отличается от массы типичной элементарной частицы, например пиона:

$$\left(\frac{\hbar^2 H_0}{Gc}\right)^{1/3} \approx m_\pi. \tag{16.4.2}$$

[При $H_0^{-1} = 10^{10}$ лет левая часть равна 60 МэВ/с^2, в то время как масса пиона 140 МэВ/с^2. Если вместо $\hbar$ в левую часть (16.4.2) подставить e^2/c, то получится величина порядка массы электрона.] Конечно, каждый волен рассматривать (16.4.2) как не имеющее особого значения численное совпадение, но следует отметить, что конкретная комбинация $\hbar$, H_0, G и c, появляющаяся в (16.4.2), намного ближе к массе типичной элементарной частицы, чем любая случайная комбинация этих величин; к примеру, только из $\hbar$, G и c можно образовать единственную величину $(\hbar c/G)^{1/2}$ с размерностью массы, но ее значение $1{,}22 \cdot 10^{22}$ МэВ/с^2 на 20 порядков больше, чем типичная масса!

При обсуждении возможных интерпретаций соотношения (16.4.2) следует проявлять осторожность и выделять это соотношение из других численных «совпадений», таких, как, например, приблизительная связь между G, H_0, m_p и современной плотностью барионов n_0:

$$Gn_0m_p \approx H_0^2. \tag{16.4.3}$$

Это — соотношение между двумя космологическими параметрами n_0 и H_0, и его выполнение требуется в различных космологических моделях, например в модели Фридмана (кроме случаев $q_0 \ll 1$ и $q_0 \gg 1$) и в стационарной модели в варианте Хойла [см. (15.2.6) и (16.3.8)]. Напротив, соотношение (16.4.2) связывает единственный космологический параметр H_0 с фундаментальными постоянными $\hbar$, G, c и m_π, и оно пока не объяснено.

Время от времени отмечаются другие численные совпадения, но в большинстве они являются комбинациями (16.4.2) и (16.4.3), иногда с $e^2/c = 137\hbar$ вместо $\hbar$ и с другими массами вместо m_π. Например, часто отмечалось, что отношение единицы атомного времени e^2/m_ec^3 к времени Хаббла H_0^{-1} того же порядка, 10^{-40}, что и отношение гравитационной и электрической сил в атомах (16.4.1), но этот факт эквивалентен соотношению (16.4.2) с e^2/c вместо $\hbar$ и $m_e^{2/3}m_p^{1/3}$ вместо m_π.

Если мы все-таки предпочтем рассматривать численное соотношение (16.4.2) как имеющее реальный, хотя и таинственный смысл, то нужно решить проблему, связанную с тем, что в большинстве космологических моделей H_0 не постоянная, а функция возраста Вселенной. Один из подходов к этой проблеме заключается в замене H_0 постоянной величиной, сравнимой с H_0 по численному значению. Например, в закрытой модели Фридмана можно использовать величину, обратную времени максимального расширения, а в стационарной же модели H_0 постоянна сама по себе. Единственный недостаток такого подхода в том, что он ни к чему не приводит, и, в частности, мы остаемся с необъяснимо малыми безразмерными величинами вроде (16.4.1) или $Gm^2/\hbar c$.

Совершенно иной подход был предложен в 1937 г. Дираком [29]. Он предположил, что соотношения типа (16.4.2) являются фундаментальными, хотя еще необъяснимыми истинами, которые остаются справедливыми с точностью до постоянного коэффициента пропорциональности даже при изменении «постоянной» Хаббла $\dot{R}/R$ с возрастом Вселенной. Из этого следует, что по крайней мере одна из «постоянных» $\hbar$, G, c и m_π должна изменяться в космических масштабах времени. Чтобы избежать переформулировки всей атомной и ядерной физики, в качестве изменяющейся со временем «постоянной» Дирак выбрал G, а чтобы сохранить соотношение (16.4.2), он предположил, что

$$G \sim \frac{\dot{R}}{R}. \tag{16.4.4}$$

Вдобавок к этому Дирак высказал идею, что при расширении Вселенной соотношения типа (16.4.3) тоже остаются в силе с точностью до коэффициента пропорциональности. Поскольку $n \sim \sim R^{-3}$, то отсюда следует, что

$$GR^{-3} \sim \frac{(\dot{R})^2}{R^2}. \tag{16.4.5}$$

Исключая $G(t)$ из (16.4.4) и (16.4.5), получим дифференциальное уравнение для $R(t)$

$$\dot{R} \sim R^{-2}$$

с решением

$$R \sim t^{1/3}. \tag{16.4.6}$$

Тогда из (16.4.4) или (16.4.5) получается зависимость гравитационной постоянной от времени

$$G \sim t^{-1}. \tag{16.4.7}$$

Таким образом, в космологии Дирака малые безразмерные величины вроде 10^{-40} не имеют никакого фундаментального значения; причина такой исключительной малости величины (16.4.1) просто в преклонном возрасте Вселенной.

При $k = \pm 1$ все же имеются характерные космологические параметры, которые постоянны и сильно отличаются от единицы, как, например, число частиц внутри сферы с радиусом порядка кривизны пространства nR^3. Чтобы избежать этого, Дирак сделал также предположение, что пространство плоское, т. е. $k = 0$, а тогда абсолютное значение робертсон-уокеровского масштабного фактора $R(t)$ и величины вроде nR^3 теряют всякий физический смысл.

Если гравитационная постоянная изменяется, то необходимо заменить общую теорию относительности некоторой другой теорией гравитации. Дирак не уточнял, как должна выглядеть такая теория

поля, и его космологическая модель осталась незавершенной[1]) Тем не менее из нее следовали определенные предсказания Во-первых, (16.4.6) дает соотношение между нынешней постоянной Хаббла H_0 и нынешним возрастом Вселенной t_0:

$$t_0 = \frac{1}{3} H_0^{-1}. \tag{16.4.8}$$

Даже для такого большого значения H_0^{-1}, как $13 \cdot 10^9$ лет, отсюда получается $4{,}3 \cdot 10^9$ лет — меньше, чем возраст Земли и Луны, установленный радиоактивными методами (которые не зависят от предположений относительно G). Здесь теория Дирака, по-видимому, уже вступает в конфликт с наблюдениями. Из (16.4.6) для параметра замедления получается $q_0 = 2$, что не исключается современными данными (§ 6 гл. 14). Наконец, (16.4.7) дает следующее современное значение относительной скорости убывания гравитационной «постоянной»

$$\left(\frac{\dot{G}}{G}\right)_0 = -t_0^{-1} = -3H_0. \tag{16.4.9}$$

Наблюдаемые следствия убывания гравитационной постоянной обсуждаются в конце этого параграфа.

Теория Дирака вызвала к жизни ряд попыток сформулировать теорию гравитационного поля, в которой эффективная «постоянная» гравитации является некоторой функцией скалярного поля. Одна из таких теорий была предложена Иорданом [31, 32]; в ней не сохранялся тензор энергии-импульса, и ее в этом и других пунктах неоднократно критиковали Фирц [33] и Бонди ([3], стр. 163). Последующая переформулировка [34] устранила большую часть возражений, но в теории Иордана все же имелись трудности с описанием нерелятивистского вещества. Наиболее интересную и полную скалярно-тензорную теорию предложили Бранс и Дикке [35] в 1961 г.; мы уже обсуждали некоторые ее детали в § 3 гл. 7 и § 9 гл. 9. В этой теории гравитационная постоянная G заменена на обратную величину некоторого скалярного поля ϕ. Чтобы в теории содержались соотношения типа (16.4.3), предполагается, что ϕ подчиняется уравнению поля

$$\Box^2\phi \equiv (\phi;^{\mu})_{;\mu} = \frac{8\pi}{3+2\omega} T^{\mu}{}_{\mu}, \tag{16.4.10}$$

где $T_{\mu\nu}$ — тензор энергии-импульса материи (без ϕ) и ω — безразмерный параметр связи. Чтобы не нарушить принцип эквивалентности, предполагается, что ϕ не входит в уравнения движения обычного вещества и излучения, так что $T^{\mu\nu}$ подчиняется известно-

[1]) Эта модель получила определенное завершение в виде конформно-инвариантной скалярно-тензорной теории Дирака [30*]. — *Прим. перев.*

му закону сохранения:

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu}=0. \tag{16.4.11}$$

Тогда тождества Бианки требуют, чтобы уравнения гравитационного поля имели вид (7.3.14) или, эквивалентно,

$$R_{\mu\nu}=-\frac{8\pi}{\phi}\left[T_{\mu\nu}-\left(\frac{1+\omega}{3+2\omega}\right)g_{\mu\nu}T^{\lambda}{}_{\lambda}\right]-\frac{\omega}{\phi^2}\phi_{;\mu}\phi_{;\nu}-\frac{1}{\phi}\phi_{;\mu;\nu}. \tag{16.4.12}$$

Эта теория становится эквивалентной теории Иордана [34] в специальном случае тензора энергии-импульса с исчезающим следом.

Применяя теорию Бранса — Дикке в космологии, мы снова, как и в гл. 14 и 15, рассматриваем Вселенную сглаженной в однородный изотропный континуум. Тогда метрика имеет робертсон-уолкеровский вид (14.2.1); тензор энергии-импульса имеет вид (14.2.12) для идеальной жидкости, а скалярное поле φ является функцией только времени. Прямое вычисление с использованием (15.1.6), (15.1.7), (15.1.11) и (15.1.13) дает «t — t»-компоненту уравнения (16.4.12) в виде

$$\frac{3\ddot{R}}{R}=-\frac{8\pi}{(3+2\omega)\phi}\{(2+\omega)\rho+3(1+\omega)p\}-\frac{\omega(\dot{\phi})^2}{\phi^2}-\frac{\ddot{\phi}}{\phi}, \tag{16.4.13}$$

тогда как чисто пространственные компоненты (16.4.12) приводят к уравнению

$$-\frac{\ddot{R}}{R}-\frac{2(\dot{R})^2}{R^2}-\frac{2k}{R^2}=-\frac{8\pi}{(3+2\omega)\phi}\{(1+\omega)\rho-\omega p\}+\frac{\dot{\phi}\dot{R}}{\phi R}; \tag{16.4.14}$$

смешанные пространственно-временные компоненты просто обращаются в тождество $0=0$. Уравнение поля (16.4.10) для φ теперь имеет вид

$$\frac{d}{dt}(\dot{\phi}R^3)=\frac{8\pi}{(3+2\omega)}(\rho-3p)R^3, \tag{16.4.15}$$

а из закона сохранения (16.4.11), так же, как в гл. 14, следует

$$\dot{\rho}=-\frac{3\dot{R}}{R}(\rho+p). \tag{16.4.16}$$

Исключая $\ddot{R}$ из (16.4.13) и (16.4.14) и пользуясь уравнением (16.4.15) для исключения $\ddot{\phi}$, можно получить уравнение первого порядка, аналогичное (15.1.20):

$$\frac{(\dot{R})^2}{R^2}+\frac{k}{R^2}=\frac{8\pi\rho}{3\phi}-\frac{\dot{\phi}\dot{R}}{\phi R}+\frac{\omega(\dot{\phi})^2}{6\phi^2}. \tag{16.4.17}$$

Мы можем вернуться к уравнениям (16.4.13) и (16.4.14), дифференцируя (16.4.17), и, следовательно, в качестве фундаментальных

уравнений космологии Бранса — Дикке можно взять уравнения (16.4.15) — (16.4.17) плюс уравнение состояния, определяющее p как функцию ρ. Кроме того, из уравнения (9.9.11) видно, что гравитационная «постоянная», измеренная по наблюдениям медленно движущихся частиц или в экспериментах по замедлению времени, равна

$$G=\left(\frac{2\omega+4}{2\omega+3}\right)\phi^{-1}. \qquad (16.4.18)$$

При любом данном уравнении состояния $p = p(\rho)$ уравнения (16.4.15) — (16.4.17) можно рассматривать как систему из одного дифференциального уравнения второго порядка и двух уравнений первого порядка для трех переменных R, ϕ и ρ. Отсюда следует, что эти уравнения определяют $R(t)$, $\phi(t)$ и $\rho(t)$ при всех t, если нам известны постоянные ω и k и нынешние значения *четырех* переменных, скажем R_0, $\dot{R}_0$, ϕ_0 и ρ_0. Это несколько неожиданно, поскольку в модели Фридмана, чтобы вычислить $R(t)$ и $\rho(t)$ при всех t [см. (15.2.1)], нам нужно было задать начальные данные для двух величин, скажем R_0, $\dot{R}_0$ и, конечно, постоянную G.

Первоначально Бранс и Дикке [35] исключали эту лишнюю степень свободы наложением дополнительного ограничения в окрестности начальной сингулярности, где $R = 0$:

$$\dot{\phi}R^3 \to 0 \text{ при } R \to 0. \qquad (16.4.19)$$

При этом начальном условии и при заданных ω, k и уравнении состояния мы можем получить решение для $R(t)$, $\rho(t)$ и $\phi(t)$, задавая только три параметра настоящего момента времени, например R_0, $\dot{R}_0$ и ϕ_0 или более употребительные H_0, G_0 и q_0 (или ρ_0).

Несколько лет назад Дикке [36] [1]) высказал мысль, что, возможно, нужными решениями в действительности являются как раз те, которые не подчиняются ограничению (16.4.19). Вообще говоря, все решения имеют сингулярность с $R = 0$ в конечный момент времени, который мы, как обычно, принимаем за $t = 0$, тогда решение уравнения (16.4.15) имеет

$$\dot{\phi}(t)R^3(t)=\frac{8\pi}{2\omega+3}\int_0^t[\rho(t')-3p(t')]R^3(t')\,dt'-C, \qquad (16.4.20)$$

где C — постоянная интегрирования, которая может быть положительной, отрицательной или нулем. При $C = 0$ мы имеем трехпараметрическое семейство моделей, удовлетворяющих условию

[1]) В этой работе Дикке использует модификацию теории Бранса — Дикке [37]; подход, более близкий к излагаемому здесь, см. в [38].

(16.4.19). При $C \neq 0$ мы получаем четырехпараметрическое семейство решений: четвертый параметр нужен для фиксирования значения C.

Эти решения обладают довольно тонкими свойствами, и нам будет полезно изучить подробнее тот случай, когда уравнения (16.4.15) — (16.4.17) могут быть решены аналитически, а именно случай нулевого давления и нулевой кривизны

$$p = 0, \qquad k = 0.$$

Тогда из (16.4.16) следует, что

$$\rho \sim R^{-3}, \tag{16.4.21}$$

и из уравнения (16.4.20) немедленно получаем

$$\dot{\phi} = \frac{8\pi\rho}{2\omega+3}(t-t_c), \tag{16.4.22}$$

где

$$t_c \equiv \frac{(2\omega+3)\,C}{2\pi\rho R^3}. \tag{16.4.23}$$

Оказывается весьма удобным ввести новую зависимую переменную

$$u \equiv (t-t_c)\frac{\dot{\phi}}{\phi} = \frac{8\pi\rho\,(t-t_c)^2}{(2\omega+3)\,\phi} > 0. \tag{16.4.24}$$

Выражая в уравнении (16.4.17) ρ и $\dot{\varphi}/\varphi$ через u и положив $k = 0$, можно сразу же получить решение для $\dot{R}/R$:

$$\frac{2\,(t-t_c)\,\dot{R}}{R} = -u \pm \left(\frac{3+2\omega}{3}\right)^{1/2}(u^2+4u)^{1/2}. \tag{16.4.25}$$

Кроме того, из (16.4.21) и логарифмической производной (16.4.22) следует, что

$$\frac{\dot{u}}{u} = -\frac{3\dot{R}}{R} + 2\,(t-t_c)^{-1} - \frac{\dot{\phi}}{\phi}$$

или, после использования (16.4.24) и (16.4.25),

$$(t-t_c)\,\dot{u} = \frac{1}{2}u\left\{u+4 \mp 3\left(\frac{3+2\omega}{3}\right)^{1/2}(u^2+4u)^{1/2}\right\}. \tag{16.4.26}$$

Интегрированием этого уравнения первого порядка находим $u\,(t)$, а затем можно проинтегрировать уравнения (16.4.24), (16.4.25) и определить $\varphi\,(t)$ и $R\,(t)$.

Один очевидный класс решений уравнения (16.4.26) составляют решения с постоянным u, равным одному из нулей выражения в правой части (16.4.26). Чтобы найти такой нуль с $u > 0$, следует взять верхний знак перед квадратным корнем в (16.4.25) и (16.4.26); тогда искомое решение равно

$$u = \frac{2}{3\omega+4}. \tag{16.4.27}$$

Для этого решения следует положить $t_c = 0$, поскольку в противном случае из уравнения (16.4.25) следовало бы, что $R = 0$ только при $t = t_c$, а мы договорились установить часы так, чтобы эта сингулярность имела место при $t = 0$. При $t_c = 0$ получаем следующие решения уравнений (16.4.24) и (16.4.25) [35]:

$$\phi \sim t^{2/(4+3\omega)}, \tag{16.4.28}$$

$$R \sim t^{(2\omega+2)/(3\omega+4)}, \tag{16.4.29}$$

$$\frac{4\pi\rho t^2}{\phi} = \frac{(2\omega+3)}{(3\omega+4)}. \tag{16.4.30}$$

При $t_c \neq 0$ необходимо анализировать, как движется u в уравнении (16.4.26) между сингулярными точками $u = 0$, $u = 2/(3\omega + 4)$ и $u = \infty$. Результаты критическим образом зависят от того, какого знака t_c.

$t_c > 0$. В этом случае u монотонно падает от $u = \infty$ при $t = 0$ до $u = 0$ при $t = t_c$ и затем монотонно растет к значению (16.4.27) при $t \to \infty$. Знак перед квадратным корнем в (16.4.25) и (16.4.26) в точке t_c меняется с нижнего для $t < t_c$ на верхний при $t > t_c$. Решения уравнения (16.4.26) таким образом имеют вид

$$\ln\left(1 - \frac{t}{t_c}\right) = -2\int_0^u \frac{du}{u\,[u+4+3\,(1+2\omega/3)^{1/2}\,(u^2+4u)^{1/2}]}, \quad t < t_c,$$

$$\ln\left(\frac{t}{t_c} - 1\right) = 2\int_0^u \frac{du}{u\,[u+4-3\,(1+2\omega/3)^{1/2}\,(u^2+4u)^{1/2}]}, \quad t > t_c.$$

Эти интегралы можно представить в замкнутой форме, но интереснее рассмотреть поведение этих решений в очень ранние и в очень поздние моменты времени. При $t \ll t_c$ имеем

$$u \to \frac{(3\,[1+2\omega/3]^{1/2}-1)}{(4+3\omega)\,(t/t_c)}$$

и, следовательно, уравнения (16.4.24) и (16.4.25) имеют решения [36]

$$\phi \sim t^{(1-3[1+2\omega/3]^{1/2})/(4+3\omega)}, \tag{16.4.31}$$

$$R \sim t^{(1+\omega+[1+2\omega/3]^{1/2})/(4+3\omega)}. \tag{16.4.32}$$

При $t \gg t_c$ величина u стремится к значению (16.4.27) и решения принимают форму (16.4.28) и (16.4.29).

$t_c < 0$. В этом случае u монотонно падает от $u = \infty$ при $t = 0$ до значения (16.4.27) при $t \to \infty$. Квадратные корни в (16.4.25) и (16.4.26) берутся с верхним знаком, и уравнение (16.4.26) имеет

решение

$$\ln\left(1+\frac{t}{|t_c|}\right)=2\int\limits_u^\infty \frac{du}{u\,\{3\,(1+2\omega/3)^{1/2}\,(u^2+4u)^{1/2}-u-4\}}\,.$$

При $t \ll |t_c|$ находим

$$u \to \frac{(3\,[1+2\omega/3]^{1/2}+1)}{(4+3\omega)\,(t/|t_c|)}$$

и, следовательно, уравнения (16.4.24) и (16.4.25) имеют решения [36]

$$\phi \sim t^{(3[1+2\omega/3]^{1/2}+1)/(4+3\omega)}, \tag{16.4.33}$$

$$R \sim t^{(1+\omega-[1+2\omega/3]^{1/2}/(4+3\omega)}. \tag{16.4.34}$$

При $t \gg |t_c|$ величина u стремится к значению (16.4.27) и решения (16.4.24) и (16.4.25) снова принимают форму (16.4.28) и и (16.4.29).

Итак, есть три типа решений, которые все ведут себя одинаково при $t \gg |t_c|$, но решительно различаются при $t \lesssim |t_c|$. Только простое решение с $t_c = 0$ гладко переходит в фридмановское решение с нулевой кривизной (ϕ const, $R \sim t^{2/3}$) в пределе больших ω; в решениях с $t_c > 0$ или $t_c < 0$ при $t \to 0$ соответственно $\phi \to \infty$ или $\phi \to 0$ для любого конечного ω.

Хотя эти решения были получены в предположении нулевого давления и нулевой кривизны, в них проявляются многие из свойств намного более сложных общих решений. В общем случае решения могут быть классифицированы в соответствии с тем, положительна, отрицательна или равна нулю постоянная интегрирования C в выражении (16.4.20). При достаточно больших t основной вклад в интеграл дает эра преобладания вещества, когда $\rho \sim R^{-3}$, следовательно, интеграл растет как t и постоянная интегрирования постепенно становится пренебрежимо малой. В этом пределе получаем

$$\dot{\phi} = \frac{8\pi\rho t}{2\omega+3}, \tag{16.4.35}$$

и все решения сходятся к решению с $C = 0$, которое, к сожалению, приходится получать численным интегрированием уравнений (16.4.17) и (16.4.35) при $\rho \sim R^{-3}$. С другой стороны, при t, достаточно малых, в (16.4.20) будет доминировать постоянная интегрирования, разумеется, при условии $C \neq 0$. В этом случае в (16.4.17) члены, соответствующие кривизне и плотности, становятся при $t \to 0$ пренебрежимо малыми, и решения принимают установленный ранее вид

$$\phi \sim t^{(1\mp 3[1+2\omega/3]^{1/2})/(4+3\omega)}, \tag{16.4.36}$$

$$R \sim t^{(1+\omega\pm[1+2\omega/3]^{1/2})/(4+3\omega)} \tag{16.4.37}$$

с верхним знаком при $C > 0$ и с нижним — при $C < 0$. Решения с $C = 0$ при больших ω гладко переходят в решения Фридмана, но решения с $C \neq 0$ имеют отличия в поведении при $t = 0$ для любых ω.

Теория Бранса — Дикке не дает удовлетворительного объяснения численных соотношений, о которых говорилось в начале параграфа. Вообще говоря, $\dot{\phi}/\phi$ и t^{-1} могут быть порядка «постоянной Хаббла» H, а ϕ — порядка G^{-1}, и поэтому, если становится возможным пренебречь постоянной интегрирования C, уравнение (16.4.35) оказывается более или менее сходным с соотношением (16.4.3). Однако в ранние периоды, когда нельзя пренебречь C, (16.4.3) не выполняется даже приблизительно. Еще важнее то, что загадочное соотношение (16.4.2) вообще не объясняется теорией Бранса — Дикке. В самом деле, в простейшем случае нулевого давления, нулевой кривизны и нулевой постоянной интегрирования C из (16.4.29) и (16.4.28) следует, что $H \sim 1/t$ и $G \sim t^{-2/(4+3\omega)}$, поэтому масса $(\hbar^2 H/Gc)^{1/3}$ убывает со временем, и соотношение (16.4.2) может выполняться лишь в течение короткого периода истории Вселенной.

Обратимся теперь к наблюдательным следствиям этой теории. Ни гравитационное поле, ни поле Бранса — Дикке не оказывают непосредственного воздействия на те ядерные процессы, в которых, как мы считаем, образуется гелий в ранней Вселенной, но они влияют на скорость расширения Вселенной, которая в свою очередь определяет, сколько гелия сможет образоваться (§ 7 гл. 15). Решения с $C = 0$, полученные численным интегрированием уравнений (16.4.17) и (16.4.20), показывают [36], что в случае $\omega = 5$, $k = 0$, $H_0^{-1} = 9{,}5 \cdot 10^9$ лет, $\rho_0 = 2 \cdot 10^{-29}$ г/см^3 влияние поля Бранса — Дикке проявляется в сокращении на 55% времени, требующегося для падения температуры до 10^9 К, и соответственно в увеличении количества нейтронов, остающихся к началу нуклеосинтеза; вследствие этого содержание космологически образовавшегося гелия получается около 42% вместо 27% (по массе). При $k = -1$ и меньшей современной плотности различие между моделями Фридмана и Бранса — Дикке значительно меньше [39]. С другой стороны, если в (16.4.20) $C \neq 0$, то мы можем получить любую угодную нам скорость расширения ранней Вселенной. Как было отмечено в § 7 гл. 15, при умеренном ускорении расширения выход гелия увеличивается, но если это ускорение слишком большое, то не хватит времени для того, чтобы в реакции $n + p \to d + \gamma$ образовалось такое количество дейтерия, которое достаточно для «запуска» нуклеосинтеза, и тогда образуется очень мало гелия.

В более близкую к нам эпоху, находящуюся в пределах досягаемости оптических телескопов, постоянной интегрирования C, по-видимому, хотя и не наверняка, можно пренебречь, и поэтому

при больших ω соотношения между кривизной, плотностью, возрастом Вселенной, постоянной Хаббла и параметром замедления почти те же самые, что и в моделях Фридмана. Например, в модели без давления и с нулевой кривизной из (16.4.28) — (16.4.30) в пределе $t \gg |t_c|$ получаем соотношения

$$H_0 t_0 = \frac{2+2\omega}{4+3\omega}, \tag{16.4.38}$$

$$q_0 = \frac{\omega+2}{2\omega+2}, \tag{16.4.39}$$

$$\frac{4\pi G\rho_0}{H_0^2} = \frac{(4+3\omega)(4+2\omega)}{(2+2\omega)^2}. \tag{16.4.40}$$

При $\omega = 6$ эти три величины имеют значения 0,64; 0,57; 1,80, в то время как соответствующие значения в модели Фридмана с $k = 0$ равны 0,67; 0,50 и 1,50.

Несомненно, наиболее отличительной чертой теорий Дирака и Бранса — Дикке является убывание гравитационной постоянной G со временем. Из (16.4.35) получается следующее выражение для относительной скорости изменения G в настоящее время:

$$\left(\frac{\dot{G}}{G}\right)_0 = -\left(\frac{\dot{\phi}}{\phi}\right)_0 = -\frac{8\pi\rho_0 t_0}{(2\omega+3)\,\phi_0} = -\frac{8\pi G_0\rho_0 t_0}{(2\omega+4)}. \tag{16.4.41}$$

Вообще говоря, чтобы выразить ρ_0 и t_0 через G_0, H_0 и q_0, пришлось бы прибегать к численному решению дифференциальных уравнений (16.4.35) и (16.4.17). Однако если постоянная ω достаточно велика (скажем, $\omega \geqslant 5$), то скорость убывания G можно вычислить с довольно высокой точностью, используя в (16.4.41) в качестве ρ_0 и t_0 значения, полученные в § 2 и 3 гл. 15 из уравнений Эйнштейна. Общее выражение для ρ_0 в модели Фридмана имеет вид

$$\frac{4\pi G_0\rho_0}{3H_0^2} = q_0. \tag{16.4.42}$$

Значения $H_0 t_0$ и соответствующие значения $(\dot{G}/G)_0$ в (16.4.41) сведены в табл. 16.1.

В особом случае $k = 0$, когда мы имеем аналитическое решение, формулы (16.4.18), (16.4.28) и (16.4.29) приводят к следующему «точному» результату:

$$\left(\frac{\dot{G}}{G}\right)_0 = -\frac{H_0}{1+\omega},$$

и оценки этой величины, приведенные в табл. 16.1, в этом случае на 12% ниже (при $\omega = 6$). Оценки в табл. 16.1 хорошо согласуются с «точными» результатами, вычисленными для $k = -1$ и $\omega = 5$ или $\omega = 10$ [39].

Таблица 16.1

Скорость убывания G в моделях Бранса — Дикке и в модели Дирака *

Модель	q_0	t_0H_0 ($\omega = \infty$)	$(\dot{G}/G)_0$
Бранс — Дикке	$\ll 1$	1	$-\frac{3q_0H_0}{\omega+2}$
Бранс — Дикке	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{H_0}{\omega+2}$
Бранс — Дикке	1	$\frac{\pi}{2}-1$	$-\frac{1{,}71H_0}{\omega+2}$
Бранс — Дикке	$\gg 1$	$\frac{\pi}{2\sqrt{2q_0}}$	$-\frac{3{,}34H_0\sqrt{q_0}}{\omega+2}$
Дирак	2	$\frac{1}{3}$	$-3H_0$

* Оценки для значений $(\dot{G}/G)_0$ получены из уравнения (16.4.41) с использованием в качестве t_0 и ρ_0 результатов для модели Фридмана (т. е. $\omega = \infty$), при этом значение t_0 указано в третьей колонке, а значение ρ_0 берется из (16.4.42).

При $H_0^{-1} = 10^{10}$ лет, $0{,}01 \lesssim q_0 \lesssim 1{,}0$ и $\omega = 6$ табл. 16.1 дает относительную скорость убывания G от $4\cdot10^{-13}$ до $2\cdot10^{-11}$ в год. В противоположность этому модель Дирака предсказывает значительно более быстрое убывание гравитационной «постоянной»: при $H_0^{-1} = 10^{10}$ лет G убывает на $3\cdot10^{-10}$ в год.

Наилучший экспериментальный верхний предел современной скорости изменения G получается из анализа радиолокационных наблюдений Меркурия и Венеры [40]. Для планеты с круговой орбитой радиусом r и со скоростью v имеем $M_\odot G = v^2r$, поэтому, если угловой момент mrv остается фиксированным, а G при этом меняется, то r и v изменяются как

$$r \sim \frac{1}{v} \sim \frac{1}{G}, \tag{16.4.43}$$

а период обращения $2\pi r/v$ — как

$$2\pi\frac{r}{v} \sim \frac{1}{G^2}. \tag{16.4.44}$$

Путем повторных сравнений периода обращения внутренних планет в 1966—1969 гг. с измерением времени по атомным часам (ход которых не зависит от G) Шапиро и др. [40] установили верхний

предел

$$\left|\frac{\dot{G}}{G}\right|_0 \leqslant 4\cdot 10^{-10} \text{ год.}$$

Этого условия почти достаточно, чтобы исключить теорию Дирака, но оно слишком слабое, чтобы как-то ограничивать параметр взаимодействия Бранса — Дикке ω. Однако погрешность этих измерений $(\dot{G}/G)_0$ убывает примерно как длительность наблюдений во времени в степени $^5/_2$, поэтому следующие пять лет наблюдений должны снизить верхнюю границу $\dot{G}/G$ до значения, ожидаемого в модели Бранса — Дикке, с q_0 порядка единицы и $\omega = 6$.

В перспективе есть еще возможность определить верхний предел скорости изменения G из анализа времени прохождения сигнала лазера, посланного от Земли к Луне и отраженного назад уголковыми отражателями, установленными на лунной поверхности экспедициями «Аполло» [41, 42]. Однако анализ этих наблюдений серьезно усложняется приливными явлениями, которые играют главную роль в динамике системы Земля — Луна. (К счастью, приливные эффекты не оказывают заметного воздействия на движения тех планет, которые изучаются Шапиро и др.)

Вариации G в течение последних нескольких тысячелетий, возможно, могут быть установлены при изучении исторических свидетельств о затмениях [43]. Полное солнечное затмение наблюдается в очень малой области земной поверхности, и поэтому данные о том, что определенное полное затмение наблюдалось в некотором конкретном месте, дают точную информацию об отношении длительности суток (которая слабо зависит от G) к длительности года и лунного месяца, меняющихся как G^2. Кюро [44] и Дикке [45, 46] проанализировали пять затмений, имевших место между 1062 г. до н. э. и 71 г. н. э., и получили, что относительное удлинение земных суток при сравнении их с периодами обращения планет равно в среднем $(15{,}9 \pm 0{,}7)\cdot 10^{-11}$ в год. На длительность земных суток оказывает влияние ряд известных факторов [47], в частности, приливное замедление, относительная величина которого составляет $23{,}5\cdot 10^{-11}$—$25{,}6\cdot 10^{-11}$ в год, и ускорение вследствие повышения уровня моря и изостатического восстановления геоида, равное $0{,}5\cdot 10^{-11}$—$3{,}0\cdot 10^{-11}$ в год. После этого остается необъясненное относительное *сокращение* суток от $4\cdot 10^{-11}$ до $10\cdot 10^{-11}$ в год. Поскольку по данным о затмениях измеряется длительность земных суток относительно периодов обращения планет, это кажущееся сокращение суток можно было бы объяснить как замедление движения планет вследствие убывания G с относительной скоростью от $2\cdot 10^{-11}$ до $5\cdot 10^{-11}$ в год [см. (16.4.44)]. Однако данные по затмениям довольно неопределенны. (Где находился Архилох во время затмения в 648 г. до н. э. — на Паросе или на Тасосе?) Еще важнее то, что имеется много неопределенностей

в сложной динамике системы Земля — Луна, за счет которых можно объяснить оставшееся небольшое ускорение вращения Земли, не прибегая к гипотезе об убывании G.

Не исключено, что можно измерить имевшие место за последние 350 миллионов лет изменения числа суток в лунном месяце или в году путем подсчета месячных или годичных колец роста и суточных выступов роста в ископаемых кораллах [48, 49]. Однако пока этот метод не дал результатов, точность которых была бы приемлема для космологов.

Вековое уменьшение гравитационной «постоянной» в течение миллиардов лет могло бы иметь интересные проявления в эволюции Земли и звезд, но, к сожалению, ни одно из них не дало бы однозначного ответа на вопрос, убывает ли в действительности G. При убывании G радиус Земли должен расти приблизительно как $G^{-0,1}$, что вызвало бы сложные разломы земной коры [50]. Если постоянная G в прошлом была больше, то термоядерная эволюция звезд должна была идти быстрее [51]; при относительном убывании G $1 \cdot 10^{-11}$—$2 \cdot 10^{-11}$ в год звезда, истинный возраст которой 6—8 миллиардов лет, должна казаться нам на 9—19 миллиардов лет старше [46, 52]. Наконец, если «постоянная» G в прошлом была больше, то была больше и светимость Солнца $L_\odot$, которая при этом зависела от времени как G^8 [53, 51]. Поскольку температура поверхности Земли $T_\oplus$ меняется со временем примерно как $(L_\odot/r_\oplus^2)^{1/4}$, а радиус орбиты Земли $r_\oplus$ — как G^{-1}, то $T_\oplus \sim G^{2,5}$. Согласно (16.4.28), в модели Бранса — Дикке с $k = 0$ и $\omega = 6$ G убывает как $t^{-0,09}$ и поэтому, если возраст Вселенной $8 \cdot 10^9$ лет, то $2 \cdot 10^9$ лет назад температура поверхности Земли была лишь на 20° С выше, чем сейчас; это обстоятельство вряд ли могло решающим образом сказаться на биологической эволюции. С другой стороны, если «постоянная» G в соответствии с теорией Дирака убывала как t^{-1}, то 10^9 лет назад температура поверхности Земли была выше точки кипения воды, если только альбедо Земли не было тогда много выше, чем сейчас [54] (см. также [34]). Таким образом, слишком большое значение гравитационной постоянной в отдаленном прошлом могло бы воспрепятствовать возникновению таких форм жизни, которые проявляли бы любопытство в вопросе о том, как устроена Вселенная.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

См. литературу к гл. 14 и 15, а также следующие две статьи:

Petrosian V., Salpeter E. E., Lemaître Models and the Cosmological Constant, Comments Astrophys. and Space Phys., 2, 109 (1970).

Dicke R. H., Gravitation an Enigma, 27th Joseph Henry Lecture of the Philosophical Society of Washington, J. Wash. Acad. Sci., 48, 213 (1958).