Глава 1

ВЕКТОРЫ И МАТРИЦЫ

Линейные преобразования

Совокупность n чисел $(v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n)$ называется n-мерным вектором, или вектором n-мерного пространства; сами эти числа являются компонентами этого вектора. Координаты точки в n-мерном пространстве могут быть истолкованы как вектор, соединяющий начало координат с рассматриваемой точкой. Векторы будут обозначаться жирными курсивными латинскими буквами; их компоненты будут иметь латинский индекс, указывающий на соответствующую координатную ось. Таким образом, v_k есть компонента вектора (число), а $\boldsymbol{v}$ — вектор, т. е. совокупность n чисел.

Два вектора называются равными, если их соответствующие компоненты равны. Таким образом, равенство

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w} \tag{1.1}$$

эквивалентно n соотношениям

$$v_1 = w_1, \qquad v_2 = w_2, \ \ldots, \qquad v_n = w_n.$$

Вектор называется нулевым, если все его компоненты обращаются в нуль. Произведение $c\boldsymbol{v}$ числа c на вектор $\boldsymbol{v}$ является вектором, компоненты которого в c раз больше компонент $\boldsymbol{v}$, или $(c\boldsymbol{v})_k = cv_k$. Сложение векторов определяется правилом, согласно которому компоненты суммы векторов равны суммам соответствующих компонент, т. е. формулой

$$(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})_k = v_k + w_k. \tag{1.2}$$

В математических задачах часто бывает целесообразно ввести новые переменные вместо первоначальных. В простейшем случае новые переменные $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ являются линейными функциями старых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Иначе говоря,

$$\begin{aligned} x_1' &= \alpha_{11}x_1 + \ldots + \alpha_{1n}x_n, \\ x_2' &= \alpha_{21}x_1 + \ldots + \alpha_{2n}x_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n' &= \alpha_{n1}x_1 + \ldots + \alpha_{nn}x_n, \end{aligned} \tag{1.3}$$

или

$$x'_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} x_k. \tag{1.3a}$$

Такой способ введения новых переменных называется *линейным преобразованием*. Преобразование полностью определяется коэффициентами $\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{nn}$, и совокупность этих n^2 чисел, расположенных в форме квадратной таблицы, называется *матрицей* линейного преобразования (1.3):

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

Мы будем записывать такую матрицу более кратко в виде (α_{ik}) или просто $\boldsymbol{\alpha}$.

Чтобы равенства (1.3) действительно представляли введение новых переменных, необходимо не только переменные x' выразить через x, но и выразить эти последние через x'. Иначе говоря, если мы рассматриваем x_i как неизвестные в уравнениях (1.3), должно существовать единственное решение этих уравнений, выражающее переменные x через x'. Необходимым и достаточным условием этого является неравенство нулю определителя, составленного из коэффициентов α_{ik}:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \alpha_{n1} & \ldots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{1.4a}$$

Преобразования, матрицы которых имеют отличные от нуля определители, называются *собственными* преобразованиями, однако таблица коэффициентов вида (1.4) всегда называется матрицей, независимо от того, отвечает ли она собственному преобразованию или нет. Матрицы будем обозначать буквами, напечатанными жирным шрифтом, а элементы матриц — светлыми буквами с индексами, указывающими на соответствующие оси. Таким образом, $\boldsymbol{\alpha}$ есть матрица, таблица n^2 чисел; α_{jk} есть элемент матрицы (число).

Две матрицы равны, если все их соответствующие коэффициенты равны. Следовательно, равенство

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta} \tag{1.5}$$

эквивалентно n^2 равенствам

$$\alpha_{jk} = \beta_{jk} \qquad (j,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Уравнениям

$$x'_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} x_k \tag{1.3а}$$

можно придать другое толкование, если рассматривать x'_j не как компоненты исходного вектора в новой системе координат, а как компоненты *нового вектора в исходной системе координат*. Тогда мы говорим, что матрица $\boldsymbol{\alpha}$ преобразует вектор $\boldsymbol{x}$ в вектор $\boldsymbol{x}'$, или что $\boldsymbol{\alpha}$, примененная к вектору $\boldsymbol{x}$, дает вектор $\boldsymbol{x}'$:

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{x}. \tag{1.3б}$$

Это уравнение полностью эквивалентно (1.3а).

Любая n-мерная матрица является *линейным оператором* по отношению к n-мерным векторам. Она представляет собой *оператор*, потому что она преобразует один вектор в другой; этот оператор является линейным, поскольку для произвольных чисел a и b и произвольных векторов $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{v}$ справедливо соотношение

$$\boldsymbol{\alpha}(a\boldsymbol{r} + b\boldsymbol{v}) = a\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{r} + b\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{v}. \tag{1.6}$$

Для доказательства (1.6) достаточно выписать в явном виде правую и левую части равенства; k-я компонента вектора $a\boldsymbol{r} + b\boldsymbol{v}$ равна $ar_k + bv_k$, так что i-я компонента вектора в левой части равна

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}(ar_k + bv_k).$$

Но она совпадает с i-й компонентой вектора в правой части (1.6)

$$a\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} r_k + b\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} v_k.$$

Тем самым линейность матричных операторов установлена.

Отметим, что n-мерная матрица является *наиболее общим* линейным оператором в n-мерном векторном пространстве. Это значит, что всякий линейный оператор в этом пространстве эквивалентен матрице. Чтобы доказать это, рассмотрим произвольный линейный оператор O, преобразующий вектор $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)$ в вектор $\boldsymbol{r}_{.1}$, вектор $\boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$ в вектор $\boldsymbol{r}_{.2}$ и, наконец, вектор $\boldsymbol{e}_n = (0, 0, 0, \ldots, 1)$ в вектор $\boldsymbol{r}_{.n}$, где компоненты вектора $\boldsymbol{r}_{.k}$ равны $r_{1k}, r_{2k}, \ldots, r_{nk}$. Тогда матрица (r_{ik}) преобразует каждый из векторов $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ в те же векторы $\boldsymbol{r}_{.1}, \boldsymbol{r}_{.2}, \ldots, \boldsymbol{r}_{.n}$, что и оператор O. Кроме того, любой n-мерный вектор $\boldsymbol{a}$ является линейной комбинацией векторов $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$. Таким образом, как O, так и (r_{ik}) (поскольку они линейны) преобразуют любой произвольный вектор $\boldsymbol{a}$ в один и тот же вектор $a_1\boldsymbol{r}_{.1} + \ldots + a_n\boldsymbol{r}_{.n}$. Следовательно, матрица (r_{ik}) эквивалентна оператору O.

Наиболее важным свойством линейных преобразований является то, что два линейных преобразования, примененные последовательно, могут быть скомбинированы в одно линейное преобразование. Предположим, например, что мы вводим новые переменные x' вместо первоначальных x посредством линейного преобразования (1.3) и затем вводим переменные x'' путем *второго линейного преобразования*

$$\begin{aligned} x_1'' &= \beta_{11}x_1' + \beta_{12}x_2' + \ldots + \beta_{1n}x_n', \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n'' &= \beta_{n1}x_1' + \beta_{n2}x_2' + \ldots + \beta_{nn}x_n'. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Обе операции могут быть *скомбинированы* в одну, так что переменные x'' вводятся непосредственно вместо x с помощью одного линейного преобразования. Подставляя (1.3) в (1.7), находим

$$\begin{aligned} x_1'' &= \beta_{11}(\alpha_{11}x_1 + \ldots + \alpha_{1n}x_n) + \ldots + \beta_{1n}(\alpha_{n1}x_1 + \ldots + \alpha_{nn}x_n), \\ x_2'' &= \beta_{21}(\alpha_{11}x_1 + \ldots + \alpha_{1n}x_n) + \ldots + \beta_{2n}(\alpha_{n1}x_1 + \ldots + \alpha_{nn}x_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n'' &= \beta_{n1}(\alpha_{11}x_1 + \ldots + \alpha_{1n}x_n) + \ldots + \beta_{nn}(\alpha_{n1}x_1 + \ldots + \alpha_{nn}x_n). \end{aligned} \tag{1.8}$$

Таким образом, переменные x'' являются линейными функциями переменных x. Мы можем записать (1.8) в более компактной форме, используя сокращенную запись равенств (1.3) и (1.7):

$$x_j' = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk}x_k \qquad (j = 1, 2, \ldots, n), \tag{1.3в}$$

$$x_i'' = \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij}x_j' \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{1.7а}$$

Тогда (1.8) принимает вид

$$x_i'' = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \beta_{ij}\alpha_{jk}x_k. \tag{1.8а}$$

Кроме того, вводя матрицу γ и определяя ее элементы с помощью соотношений

$$\gamma_{ik} = \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij}\alpha_{jk}, \tag{1.9}$$

получаем просто

$$x_i'' = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ik}x_k. \tag{1.8б}$$

Это показывает, что комбинация двух линейных преобразований (1.7) и (1.3) с матрицами (β_{ik}) и (α_{ik}) представляет собой линейное преобразование, имеющее матрицу (γ_{ik}).

Матрица (γ_{ik}), определенная через матрицы (α_{ik}) и (β_{ik}) согласно равенству (1.9), называется *произведением* матриц (β_{ik}) и (α_{ik}). Так как (α_{ik}) преобразует вектор $\boldsymbol{r}$ в вектор $\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{\alpha r}$, а (β_{ik}) преобразует вектор $\boldsymbol{r}'$ в вектор $\boldsymbol{r}''=\boldsymbol{\beta r}'$, то матрица (γ_{ik}), представляющая по определению произведение матриц (α_{ik}) и (β_{ik}), преобразует вектор $\boldsymbol{r}$ непосредственно в вектор $\boldsymbol{r}''=\boldsymbol{\gamma r}$. Этот метод сочетания преобразований называется „матричным умножением" и имеет ряд простых свойств, которые мы перечислим ниже в виде теорем.

Прежде всего мы замечаем, что формальное правило умножения матриц совпадает с правилом умножения определителей.

1. *Определитель произведения двух матриц равен произведению определителей каждого из двух сомножителей.*

При перемножении матриц соотношение

$$\boldsymbol{\alpha\beta}=\boldsymbol{\beta\alpha} \tag{1.E.1}$$

не является обязательно справедливым. Например, рассмотрим две матрицы

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix},$$

но

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}.$$

Этим устанавливается второе свойство матричного умножения.

2. *Произведение двух матриц зависит, вообще говоря, от порядка сомножителей.*

В том весьма частном случае, когда равенство (1.E.1) справедливо, матрицы $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$ называются *коммутирующими*.

3. В противоположность перестановочному закону *при перемножении матриц имеет место сочетательный (ассоциативный) закон умножения.*

Иначе говоря,

$$\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\beta\alpha})=(\boldsymbol{\gamma\beta})\boldsymbol{\alpha}. \tag{1.10}$$

Таким образом, несущественно, умножается ли матрица $\boldsymbol{\gamma}$ на произведение матриц $\boldsymbol{\beta}$ и $\boldsymbol{\alpha}$ или произведение матриц $\boldsymbol{\gamma}$ и $\boldsymbol{\beta}$ — на матрицу $\boldsymbol{\alpha}$. Чтобы доказать это, обозначим элемент с индексами i

и k матрицы в левой части (1.10) через ε_{ik}. Тогда

$$\varepsilon_{ik} = \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} (\beta\alpha)_{jk} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \gamma_{ij} \beta_{jl} \alpha_{lk}. \tag{1.10а}$$

Элемент с индексами i и k в правой части (1.10) равен

$$\varepsilon'_{ik} = \sum_{l=1}^{n} (\gamma\beta)_{il} \alpha_{lk} = \sum_{l=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} \beta_{jl} \alpha_{lk}. \tag{1.10б}$$

Мы видим, что $\varepsilon_{ik} = \varepsilon'_{ik}$ и, следовательно, (1.10) доказано. Поэтому в обеих частях (1.10) можно просто писать $\gamma\beta\alpha$.

Справедливость сочетательного закона становится немедленно очевидной, если рассматривать матрицы как линейные операторы. Пусть α преобразует вектор $\boldsymbol{r}$ в вектор $\boldsymbol{r}' = \alpha\boldsymbol{r}$, β — вектор $\boldsymbol{r}'$ в $\boldsymbol{r}'' = \beta\boldsymbol{r}'$ и γ — вектор $\boldsymbol{r}''$ в $\boldsymbol{r}''' = \gamma\boldsymbol{r}''$. Тогда объединение двух матриц в одну путем матричного умножения означает просто комбинацию двух операций. Произведение $\beta\alpha$ преобразует $\boldsymbol{r}$ непосредственно в $\boldsymbol{r}''$, а $\gamma\beta$ преобразует $\boldsymbol{r}'$ прямо в $\boldsymbol{r}'''$. Таким образом, как $(\gamma\beta)\alpha$, так и $\gamma(\beta\alpha)$ преобразуют $\boldsymbol{r}$ в $\boldsymbol{r}'''$, и обе эти операции эквивалентны.

4. *Единичная матрица*

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \tag{1.11}$$

играет особую роль в матричном умножении, такую же как число 1 в обычном умножении. Для любой матрицы α

$$\alpha \cdot \mathbf{1} = \mathbf{1} \cdot \alpha.$$

Тем самым $\mathbf{1}$ коммутирует со всеми матрицами, и ее произведение на любую матрицу равно этой матрице. Элементы единичной матрицы обозначаются символом δ_{ik}, так что

$$\begin{aligned} \delta_{ik} &= 0 \qquad (i \neq k), \\ \delta_{ik} &= 1 \qquad (i = k). \end{aligned} \tag{1.12}$$

Величина δ_{ik}, определенная таким образом, называется дельта-символом Кронекера. Матрица $(\delta_{ik}) = \mathbf{1}$ производит *тождественное* преобразование, оставляющее переменные без изменения.

Если для заданной матрицы α существует такая матрица β, при которой

$$\beta\alpha = \mathbf{1}, \tag{1.13}$$

то β называется матрицей, *обратной* матрице α. Соотношение (1.13) означает, что существует преобразование с матрицей β, которое в сочетании с матрицей α дает тождественное преобразование. Если определитель матрицы α не равен нулю ($|\alpha_{ik}| \neq 0$), то обратное преобразование всегда существует (как уже упоминалось на стр. 10). Чтобы доказать это, выпишем n^2 уравнений (1.13) в явном виде:

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_{ij}\alpha_{jk} = \delta_{ik} \qquad (i,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{1.14}$$

Рассмотрим теперь n уравнений, в которых i имеет одно значение, например l. Эти уравнения составляют n линейных уравнений с n неизвестными $\beta_{l1}, \beta_{l2}, \ldots, \beta_{ln}$. Следовательно, они имеют единственное решение, если только определитель $|\alpha_{jk}|$ не обращается в нуль. То же самое справедливо для остальных $n-1$ систем уравнений. Тем самым устанавливается пятое свойство.

5. *Если определитель $|\alpha_{jk}|$ отличен от нуля, то существует одна и только одна такая матрица β, что $\beta\alpha = \mathbf{1}$.*

Больше того, определитель $|\beta_{jk}|$ является обратным определителю $|\alpha_{jk}|$, поскольку, согласно теореме 1,

$$|\beta_{jk}| \cdot |\alpha_{jk}| = |\delta_{jk}| = 1. \tag{1.15}$$

Отсюда следует, что матрица α *не имеет обратной*, если $|\alpha_{ik}| = 0$, и что матрица β, обратная матрице α, также должна иметь обратную.

Теперь мы покажем, что если имеет место соотношение (1.13), то соотношение

$$\alpha\beta = \mathbf{1} \tag{1.16}$$

также справедливо. Это значит, что если β является матрицей, обратной α, то одновременно α есть матрица, обратная β. Это проще всего показать путем умножения равенства (1.13) справа на матрицу β:

$$\beta\alpha\beta = \beta, \tag{1.17}$$

и умножения полученного равенства слева на матрицу, обратную β, которую мы обозначим через γ. Тогда

$$\gamma\beta\alpha\beta = \gamma\beta,$$

и поскольку, согласно предположению, $\gamma\beta = \mathbf{1}$, последнее равенство совпадает с (1.16). Обратно, нетрудно показать, что (1.13) следует из (1.16). Таким образом, доказана теорема 6 (матрица, обратная α, обозначается через α^{-1}):

6. *Если α^{-1} есть матрица, обратная матрице α, то матрица α также является обратной α^{-1}.* Очевидно, что матрицы, обратные друг другу, коммутируют.

Правило. Матрица, обратная произведению $\alpha\beta\gamma\delta$, получается путем перемножения матриц, обратных отдельным сомножителям, в обратном порядке, т. е.

$$(\delta^{-1}\gamma^{-1}\beta^{-1}\alpha^{-1})\cdot(\alpha\beta\gamma\delta)=\mathbf{1}.$$

Другой важной матрицей является нулевая матрица.

7. *Нулевой матрицей называется матрица, каждый элемент которой равен нулю*:

$$\mathbf{0}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.18}$$

Очевидно, что для любой матрицы α имеет место равенство

$$\alpha\cdot\mathbf{0}=\mathbf{0}\cdot\alpha=\mathbf{0}.$$

Нулевая матрица играет важную роль в другой операции с матрицами, а именно в сложении. Сумма γ двух матриц α и β есть матрица с элементами

$$\gamma_{ik}=\alpha_{ik}+\beta_{ik}. \tag{1.19}$$

При этом n^2 уравнений (1.19) эквивалентны уравнению

$$\gamma=\alpha+\beta \text{ или } \gamma-\alpha-\beta=\mathbf{0}.$$

Сложение матриц, очевидно, перестановочно:

$$\alpha+\beta=\beta+\alpha. \tag{1.20}$$

Кроме того, умножение на сумму подчиняется распределительному закону:

$$\gamma(\alpha+\beta)=\gamma\alpha+\gamma\beta,$$

$$(\alpha+\beta)\gamma=\alpha\gamma+\beta\gamma.$$

Далее, произведение матрицы α на число a определяется как матрица γ, каждый элемент которой равен произведению a на соответствующий элемент α:

$$\gamma_{ik}=a\alpha_{ik}. \tag{1.21}$$

Очевидным следствием являются формулы

$$(ab)\alpha=a(b\alpha),\qquad \alpha a\beta=a\alpha\beta,\qquad a(\alpha+\beta)=a\alpha+a\beta.$$

Так как целые степени матрицы α могут быть легко определены посредством последовательного умножения

$$\left.\begin{aligned} &\alpha^2=\alpha\cdot\alpha, && \alpha^3=\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha,\ \dots, \\ &\alpha^{-2}=\alpha^{-1}\cdot\alpha^{-1}, && \alpha^{-3}=\alpha^{-1}\cdot\alpha^{-1}\cdot\alpha^{-1},\ \dots, \end{aligned}\right\} \tag{1.22}$$

то можно также определить многочлены с положительными и отрицательными целыми степенями

$$\ldots + a_{-n}\boldsymbol{\alpha}^{-n} + \ldots + a_{-1}\boldsymbol{\alpha}^{-1} + a_0\mathbf{1} + a_1\boldsymbol{\alpha} + \ldots + a_n\boldsymbol{\alpha}^n + \ldots. \tag{1.23}$$

Коэффициенты a в приведенном выражении являются числами, а не матрицами. *Функция от $\boldsymbol{\alpha}$ типа (1.23) коммутирует со всякой другой функцией от $\boldsymbol{\alpha}$* (и, в частности, с самой матрицей $\boldsymbol{\alpha}$).

Еще одним часто встречающимся типом матрицы является диагональная матрица.

8. *Диагональная матрица — это матрица, все элементы которой, кроме тех, что лежат на главной диагонали, равны нулю*:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} D_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & D_2 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & D_n \end{pmatrix}. \tag{1.24}$$

Общий элемент этой диагональной матрицы может быть записан в виде

$$D_{ik} = D_i\delta_{ik}. \tag{1.25}$$

Все диагональные матрицы коммутируют, и произведение двух диагональных матриц есть снова диагональная матрица. Это можно видеть непосредственно из определения произведения:

$$(\mathbf{DD}')_{ik} = \sum_j D_{ij}D'_{jk} = \sum_j D_i\delta_{ij}D'_j\delta_{jk} = D_iD'_i\delta_{ik}. \tag{1.26}$$

Обратно, если какая-либо матрица $\boldsymbol{\alpha}$ коммутирует с диагональной матрицей $\mathbf{D}$, все диагональные элементы которой *различны*, сама $\boldsymbol{\alpha}$ должна быть диагональной матрицей. Выписывая произведение

$$\boldsymbol{\alpha}\mathbf{D} = \mathbf{D}\boldsymbol{\alpha},$$

$$(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{D})_{ik} = \alpha_{ik}D_k = (\mathbf{D}\boldsymbol{\alpha})_{ik} = D_i\alpha_{ik}, \tag{1.27}$$

находим

$$(D_i - D_k)\,\alpha_{ik} = 0; \tag{1.27a}$$

для недиагонального элемента ($i \neq k$) из $D_i \neq D_k$ следует, что α_{ik} равен нулю. Таким образом, $\boldsymbol{\alpha}$ диагональна.

Сумма диагональных элементов матрицы называется ее *следом*:

$$\mathrm{Tr}\,\boldsymbol{\alpha} = \sum_j \alpha_{jj} = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \ldots + \alpha_{nn}. \tag{1.28}$$

След произведения матриц $\alpha\beta$ равен

$$\operatorname{Tr}\alpha\beta=\sum_i(\alpha\beta)_{ii}=\sum_{jk}\alpha_{jk}\beta_{kj}=\operatorname{Tr}\beta\alpha. \tag{1.29}$$

Это равенство устанавливает еще одно свойство матриц.

9. *След произведения двух матриц не зависит от порядка перемножения матриц.*

Это правило находит наиболее важное приложение в связи с *преобразованием подобия* матриц. Преобразование подобия — это такое преобразование, при котором преобразуемая матрица α умножается на преобразующую матрицу β справа и на матрицу, обратную β, слева. Матрица α при этом преобразуется в $\beta^{-1}\alpha\beta$. *Преобразование подобия оставляет след матрицы без изменения*, так как установленное выше правило показывает, что $\beta^{-1}\alpha\beta$ имеет тот же след, что и $\alpha\beta\beta^{-1}=\alpha$.

Важность преобразований подобия вытекает из следующего факта.

10. *Матричное уравнение остается в силе, если каждую матрицу, входящую в него, подвергнуть одному и тому же преобразованию подобия.*

Например, преобразование произведения матриц $\alpha\beta=\gamma$ дает

$$\sigma^{-1}\alpha\sigma\sigma^{-1}\beta\sigma=\sigma^{-1}\gamma\sigma,$$

и если

$$\alpha\beta=1,$$

то

$$\sigma^{-1}\alpha\sigma\sigma^{-1}\beta\sigma=\sigma^{-1}1\cdot\sigma=1.$$

Нетрудно видеть, что соотношения между суммами матриц и произведениями матриц и чисел тоже сохраняются при преобразовании подобия. Так, из равенства

$$\gamma=\alpha+\beta$$

следует, что

$$\sigma^{-1}\gamma=\sigma^{-1}(\alpha+\beta)=\sigma^{-1}\alpha+\sigma^{-1}\beta$$

и

$$\sigma^{-1}\gamma\sigma=\sigma^{-1}\alpha\sigma+\sigma^{-1}\beta\sigma.$$

Аналогично, из равенства

$$\beta=a\alpha$$

следует

$$\sigma^{-1}\beta\sigma=a\sigma^{-1}\alpha\sigma.$$

Поэтому теорема 10 применима к любому матричному уравнению, в которое входят произведения матриц на числа или другие матрицы, целые (положительные или отрицательные) степени матриц и суммы матриц.

Эти десять теорем для операций с матрицами содержались уже в первых статьях по квантовой механике Борна и Йордана[1]) и, несомненно, уже известны многим читателям. Они приведены здесь еще раз потому, что уверенное владение этими основными правилами совершенно необходимо для понимания дальнейшего изложения и, в сущности, для всякого квантовомеханического расчета. Кроме того, ими очень часто пользуются в неявном виде, так как иначе даже простейшие доказательства становятся излишне громоздкими[2]).

Линейная независимость векторов

Векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ называются линейно независимыми, если не существует соотношений вида

$$a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots + a_k\boldsymbol{v}_k = 0, \tag{1.30}$$

кроме случая, когда все $a_1, a_2, \ldots, a_k$ равны нулю. Таким образом, ни один из векторов линейно независимой системы не может быть выражен в виде линейной комбинации других векторов системы. В том случае, когда один из векторов, например $\boldsymbol{v}_1$, является нулевым вектором, система не является более линейно независимой, поскольку соотношение

$$1 \cdot \boldsymbol{v}_1 + 0 \cdot \boldsymbol{v}_2 + \ldots + 0 \cdot \boldsymbol{v}_k = 0$$

наверняка удовлетворяется вопреки условию линейной независимости.

В качестве примера линейной зависимости рассмотрим четырехмерные векторы $\boldsymbol{v}_1 = (1, 2, -1, 3)$, $\boldsymbol{v}_2 = (0, -2, 1, -1)$ и $\boldsymbol{v}_3 = (2, 2, -1, 5)$. Они линейно зависимы, так как

$$2\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_3 = 0.$$

С другой стороны, $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ линейно независимы.

Если k векторов $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ линейно зависимы, то среди них могут быть k' векторов ($k' < k$), которые линейно независимы. Более того, все k векторов могут быть выражены в виде линейных комбинаций этих k' векторов.

Отыскивая k' линейно независимых векторов, мы исключаем все нулевые векторы, поскольку, как мы уже видели, нулевой

---

[1]) M. Born, P. Jordan, Zs. f. Phys., 34, 858 (1925).

[2]) Например, ассоциативный закон умножения (теорема 3) используется неявно три раза при выводе коммутативности обратных матриц (теорема 6). Читателю предлагается повторить этот вывод с выписыванием всех скобок.

вектор никогда не может входить в систему линейно независимых векторов. Затем мы перебираем поочередно остальные векторы, отбрасывая все те, которые могут быть выражены в виде линейных комбинаций уже отобранных векторов. Следовательно, выбранные таким путем k' векторов будут линейно независимыми, так как если ни один из них не может быть представлен в виде линейной комбинации остальных, между ними не может существовать соотношение типа (1.30). Кроме того, каждый из отброшенных векторов (и таким образом все k первоначальных векторов) может быть выражен через них, поскольку это и было условием отбрасывания.

Линейная зависимость или независимость k векторов $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ является также свойством векторов $\boldsymbol{\alpha v}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha v}_k$, образуемых из них путем *собственного* преобразования $\boldsymbol{\alpha}$. Это значит, что из

$$a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots + a_k\boldsymbol{v}_k = 0 \tag{1.31}$$

следует, что

$$a_1\boldsymbol{\alpha v}_1 + a_2\boldsymbol{\alpha v}_2 + \ldots + a_k\boldsymbol{\alpha v}_k = 0. \tag{1.31a}$$

Равенство (1.31а) получается применением преобразования $\boldsymbol{\alpha}$ к обеим частям (1.31) и использованием его линейности. Наоборот, из (1.31а) следует (1.31). Очевидно также, что всякое линейное соотношение между $\boldsymbol{v}_i$ имеет место и для $\boldsymbol{\alpha v}_i$, и наоборот.

Никакие более чем n n-мерных векторов не могут быть линейно независимыми. Чтобы показать это, заметим, что соотношение

$$a_1\boldsymbol{v}_1 + \ldots + a_{n+1}\boldsymbol{v}_{n+1} = 0, \tag{1.32}$$

из которого следует линейная зависимость, эквивалентно n линейным однородным уравнениям для компонент этих векторов:

$$\begin{aligned} &a_1(\boldsymbol{v}_1)_1 + \ldots + a_n(\boldsymbol{v}_n)_1 + a_{n+1}(\boldsymbol{v}_{n+1})_1 = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_1(\boldsymbol{v}_1)_n + \ldots + a_n(\boldsymbol{v}_n)_n + a_{n+1}(\boldsymbol{v}_{n+1})_n = 0. \end{aligned} \tag{1.32a}$$

Если коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$ в этих уравнениях рассматриваются как неизвестные, то из того обстоятельства, что n линейных однородных уравнений с $n+1$ неизвестными всегда имеют нетривиальное решение, сразу следует, что соотношение (1.32) всегда выполняется. Таким образом, $n+1$ n-мерных векторов всегда линейно зависимы.

Непосредственным следствием вышеприведенной теоремы является утверждение, что *любые n линейно независимых n-мер-*

ных векторов образуют полную систему векторов; иначе говоря, произвольный n-мерный вектор $\boldsymbol{w}$ может быть выражен в виде их линейной комбинации. В самом деле, теорема утверждает, что между n векторами и произвольным вектором имеет место некоторое соотношение

$$a_1\boldsymbol{v}_1 + \ldots + a_n\boldsymbol{v}_n + b\boldsymbol{w} = 0.$$

Кроме того, если $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ линейно независимы, коэффициент b не может быть равен нулю. Таким образом, всякий вектор $\boldsymbol{w}$ может быть записан в виде линейной комбинации векторов, и, следовательно, последние образуют полную систему векторов.

Строка или столбец n-мерной матрицы могут рассматриваться как вектор. Например, компонентами вектора $\boldsymbol{\alpha}_{\cdot k}$, образующего k-й столбец, являются $\alpha_{1k}, \alpha_{2k}, \ldots, \alpha_{nk}$, а компонентами вектора, образующего i-ю строку, будут $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{in}$. Нетривиальное линейное соотношение между векторами $\boldsymbol{\alpha}_{\cdot 1}, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_{\cdot n}$, образующими столбцы,

$$a_1\boldsymbol{\alpha}_{\cdot 1} + \ldots + a_n\boldsymbol{\alpha}_{\cdot n} = 0$$

дается просто ненулевым решением системы линейных однородных уравнений для $a_1, a_2, \ldots, a_n$:

$$\begin{gathered} a_1\alpha_{11} + \ldots + a_n\alpha_{1n} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_1\alpha_{n1} + \ldots + a_n\alpha_{nn} = 0. \end{gathered}$$

Обращение в нуль определителя $|\alpha_{ik}|$ является необходимым и достаточным условием существования такого решения. Поэтому, если этот определитель не обращается в нуль ($|\alpha_{ik}| \neq 0$), векторы $\boldsymbol{\alpha}_{\cdot 1}, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_{\cdot n}$ линейно независимы и образуют полную систему векторов. Наоборот, если векторы $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ линейно независимы, матрица, образуемая при использовании их в качестве столбцов, имеет отличный от нуля определитель. Разумеется, это рассуждение применимо в равной степени к векторам, образующим строки матрицы.