

Г л а в а 2

ОБОБЩЕНИЯ

1. Обобщим теперь результаты предыдущей главы. Первое обобщение совершенно формально; второе же имеет более существенную природу. Для обозначения компонент векторов и элементов матриц мы ставили индексы соответствующих координатных осей. До сих пор координатные оси обозначались номерами 1, 2, 3, ..., n . В дальнейшем мы будем обозначать координатные оси по элементам произвольного множества. Если G есть некоторое множество объектов g, h, l, \dots , то вектор \mathbf{v} в пространстве этого множества G является набором чисел v_g, v_h, v_l, \dots . Разумеется, можно приравнивать (складывать и т. д.) только векторы, определенные в одном и том же пространстве, так как только в этом случае компоненты соответствуют элементам одного и того же множества.

Аналогичная система обозначений будет использована для матриц. Чтобы матрица α могла быть примененной к вектору \mathbf{v} с компонентами v_g, v_h, v_l, \dots , столбцы матрицы α должны быть размечены (пронумерованы) элементами того же множества G , с помощью которого размечены компоненты вектора \mathbf{v} . В простейшем случае строки также именуются элементами g, h, l, \dots этого множества, и α преобразует вектор \mathbf{v} в пространстве G в вектор $\alpha\mathbf{v}$ в том же пространстве. Таким образом,

$$v'_j = \sum_{l \in G} \alpha_{jl} v_l, \quad (2.1)$$

где j — некоторый элемент множества G , и l пробегает все элементы этого множества.

Например, координатные оси могут быть обозначены тремя буквами x, y, z . Тогда величина \mathbf{v} с компонентами $v_x = 1, v_y = 0, v_z = -2$ является вектором и

$$\alpha = \begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ -4 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}$$

есть матрица. (Справа и сверху указаны символы строк и столбцов.) В этом примере $\alpha_{xx} = 1$, $\alpha_{xy} = 2$, $\alpha_{xz} = 3$. Соотношение (2.1) означает, что x -компоненты вектора $v' = \alpha v$ равна

$$v'_x = \alpha_{xx}v_x + \alpha_{xy}v_y + \alpha_{xz}v_z = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 3(-2) = -5.$$

Вышеприведенное простое обобщение является чисто формальным; оно вводит лишь другую систему обозначения координатных осей и компонент векторов и матриц. Две матрицы, действующие на векторы того же пространства, могут быть перемножены, как и матрицы в предыдущей главе. Выражение

$$\gamma = \beta \alpha \quad (2.2)$$

эквивалентно выражению

$$\gamma_{jk} = \sum_{l \in G} \beta_{jl} \alpha_{lk},$$

где j и k являются двумя элементами множества G , а l пробегает все элементы этого множества.

2. Дальнейшее обобщение заключается в том, что строки и столбцы помечаются элементами *различных множеств* F и G . Тогда из (2.1) находим

$$w_j = \sum_{l \in G} \alpha_{jl} v_l, \quad (2.1a)$$

где j — элемент множества F , а l пробегает все элементы множества G . Такая матрица, элементы которой помечены элементами различных множеств, называется *прямоугольной* матрицей, в отличие от квадратных матриц предыдущей главы; она преобразует вектор v в пространстве G в вектор w в пространстве F . В общем случае множество F не обязательно содержит то же число элементов, что и множество G . Если они содержат одно и то же число элементов, матрица имеет равное число строк и столбцов и называется „квадратной“ в более широком смысле слова“.

Пусть множество G содержит символы $*$, Δ , \square , а множество F — числа 1 и 2. Тогда

$$\alpha = \begin{pmatrix} * & \Delta & \square \\ 5 & 7 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$$

есть прямоугольная матрица. (Здесь снова сверху и справа указаны обозначения столбцов и строк.) Она преобразует вектор с компонентами $v_* = 1$, $v_\Delta = 0$, $v_\square = -2$ в вектор

$$w = \alpha v.$$

Компонентами w_1 и w_2 вектора w тогда будут

$$w_1 = \alpha_{1*} v_* + \alpha_{1\Delta} v_\Delta + \alpha_{1\square} v_\square = 5 \cdot 1 + 7 \cdot 0 + 3(-2) = -1,$$

$$w_2 = \alpha_{2*} v_* + \alpha_{2\Delta} v_\Delta + \alpha_{2\square} v_\square = 0 \cdot 1 + (-1)(0) + (-2)(-2) = 4.$$

Две прямоугольные матрицы β и α могут быть перемножены только в том случае, если столбцы первого сомножителя и строки второго размечены элементами одного и того же множества F , т. е. только в том случае, если строки второго сомножителя "подходят" к столбцам первого. С другой стороны, строки первого сомножителя и столбцы второго могут соответствовать совершенно различным множествам E и G . Тогда

$$\gamma = \beta\alpha \quad (2.2a)$$

эквивалентно соотношению

$$\gamma_{jk} = \sum_{l \in F} \beta_{jl} \alpha_{lk},$$

где j — элемент множества E , k — элемент множества G , а l про-
бегает все элементы множества F . Прямоугольная матрица α
преобразует вектор в пространстве G в вектор в пространстве F ;
матрица β тогда преобразует этот вектор в вектор пространства E .
Поэтому матрица γ преобразует вектор пространства G в вектор
пространства E .

Пусть опять множество G есть совокупность символов $*$, Δ , \square , мно-
жество F содержит буквы x и y , а множество E — числа 1 и 2. Тогда, если

$$\beta = \begin{pmatrix} x & y \\ 7 & 8 \\ 9 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \quad \text{и} \quad \alpha = \begin{pmatrix} * & \Delta & \square \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} x \\ y \end{matrix},$$

мы имеем, например,

$$\gamma_{1*} = \beta_{1x}\alpha_{x*} + \beta_{1y}\alpha_{y*} = 7 \cdot 2 + 8 \cdot 5 = 54,$$

$$\gamma_{2\Delta} = \beta_{2x}\alpha_{x\Delta} + \beta_{2y}\alpha_{y\Delta} = 9 \cdot 3 + 3 \cdot 6 = 45$$

и

$$\gamma = \begin{pmatrix} * & \Delta & \square \\ 54 & 69 & 84 \\ 33 & 45 & 57 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}.$$

3. Исследуем теперь вопрос о том, как десять теорем матричного исчисления, выведенные в гл. 1, должны быть видоизменены для прямоугольных матриц. Сразу видно, что они остаются справедливыми для обобщенной квадратной матрицы, обсуждавшейся в начале настоящей главы, поскольку специфическая числовая природа индексов не была нигде использована в гл. 1.

Сложение двух прямоугольных матриц, так же как и двух векторов, предполагает, что они определены в одной и той же координатной системе, т. е. разметка строк обеих матриц и разметка столбцов обеих матриц также совпадают. В соот-
ношении

$$\alpha + \beta = \gamma$$

разметка строк трех матриц α , β , γ должна быть одинаковой, как и разметка их столбцов. С другой стороны, для умножения матриц разметка столбцов первого сомножителя должна совпадать с разметкой строк второго; тогда (и только тогда) может быть составлено произведение матриц. Получающееся при этом произведение имеет разметку строк первого сомножителя и разметку столбцов второго.

Теорема 1. Мы можем говорить об определителе прямоугольной матрицы, если она имеет одинаковое число строк и столбцов, хотя они могут быть пронумерованы различным образом. Для матриц, „квадратных в более широком смысле“, правило, по которому определитель произведения равен произведению определителей, по-прежнему справедливо.

Теоремы 2 и 3. Ассоциативный закон также имеет место для умножения прямоугольных матриц:

$$(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma). \quad (2.3)$$

Ясно, что все умножения в правой части этого равенства могут действительно быть выполнены, если только это может быть сделано в левой части, и наоборот.

Теоремы 4, 5 и 6. Под матрицей 1 всегда будем понимать квадратную матрицу со строками и столбцами, размеченными с помощью элементов одного и того же множества. Умножение на нее всегда может быть опущено.

Матрицы, являющиеся квадратными в более широком смысле имеют обратные только в том случае, если их определитель не обращается в нуль. Для прямоугольных матриц с различным числом строк и столбцов обратная матрица не определена вовсе. Если α есть матрица, являющаяся квадратной лишь в широком смысле, то из равенства

$$\beta\alpha = 1$$

следует, что разметка столбцов β совпадает с разметкой строк матрицы α . Кроме того, разметка строк матрицы 1 должна совпадать с разметкой строк β , а ее столбцов — с разметкой столбцов α . Поскольку 1 является квадратной в собственном смысле слова, разметка столбцов α должна совпадать также с разметкой строк β .

Строки матрицы β , обратной матрице α , размечаются элементами того же множества, что и столбцы α ; ее столбцы — теми же элементами, что и строки α . Для всякой матрицы α , являющейся квадратной в широком смысле и имеющей отличный от нуля определитель, существует такая обратная матрица β , что

$$\beta\alpha = 1. \quad (2.4)$$

Кроме того,

$$\alpha\beta = 1. \quad (2.4a)$$

Следует, однако, заметить, что строки и столбцы матрицы 1 в (2.4) размечены иначе, чем матрицы 1 в (2.4a).

Теорема 7. Что касается сложения и нулевой матрицы, для прямоугольных и квадратных матриц справедливы одни и те же правила. Однако *степени прямоугольных матриц не могут быть построены*, так как умножение α на α предполагает, что разметка столбцов α совпадает с разметкой строк α , т. е. что матрица α является квадратной матрицей в узком смысле.

Теоремы 8, 9 и 10. Для прямоугольных матриц понятия диагональной матрицы и следа не имеют смысла; преобразование подобия также не определено. Рассмотрим соотношение

$$\sigma\alpha\sigma^{-1} = \beta.$$

Из него следует, что матрицы β и σ имеют одну и ту же разметку строк, которая совпадает с разметкой столбцов матрицы σ^{-1} и поэтому также и столбцов матрицы β . Следовательно, матрица β является квадратной в узком смысле; аналогично, матрица α , разметка строк которой должна соответствовать разметке столбцов матрицы σ и разметка столбцов — разметке строк σ^{-1} , должна быть квадратной в узком смысле.

С другой стороны, *сама матрица σ может быть квадратной в широком смысле: разметка строк и столбцов матрицы α отлична от разметки строк и столбцов матрицы β .* Преобразования подобия, которые меняют нумерацию строк и столбцов, особенно важны. Теория преобразований в квантовой механике является примером таких преобразований.

Введение прямоугольных матриц весьма выгодно, несмотря на кажущиеся усложнения, к которым оно приводит, поскольку с их помощью можно достигнуть существенных упрощений. Вышеизложенное не следует рассматривать как жесткую схему; скорее оно приведено для того, чтобы приучить читателя мыслить в терминах этих величин. Использование подобных более сложных матриц будет всегда поясняться специально, за исключением случаев, когда разметка строк и столбцов очевидна из формы и определения элементов матриц, так что дальнейшие пояснения становятся излишними.

4. Довольно часто оказывается, что строки обозначаются не одним числом, а двумя или более числами, например:

$$\gamma = \begin{pmatrix} a_1 b_1 c_1 d_1 & a_1 b_1 c_1 d_2 & a_1 b_1 c_2 d_1 & a_1 b_1 c_2 d_2 \\ a_1 b_2 c_1 d_1 & a_1 b_2 c_1 d_2 & a_1 b_2 c_2 d_1 & a_1 b_2 c_2 d_2 \\ a_2 b_1 c_1 d_1 & a_2 b_1 c_1 d_2 & a_2 b_1 c_2 d_1 & a_2 b_1 c_2 d_2 \\ a_2 b_2 c_1 d_1 & a_2 b_2 c_1 d_2 & a_2 b_2 c_2 d_1 & a_2 b_2 c_2 d_2 \end{pmatrix}. \quad (2.E.1)$$

Первый столбец называется „столбец 1, 1“, второй — „столбец 1, 2“, третий — „столбец 2, 1“, четвертый — „столбец 2, 2“; строки обозначаются аналогичным образом. Элементами матрицы (2.Е.1) являются

$$\gamma_{ij; kl} = a_i b_j c_k d_l.$$

Для ясности записи точки с запятой отделяет индексы строк от индексов столбцов.

Среди таких матриц особенно важное значение имеет прямое произведение γ двух матриц (α_{ik}) и (β_{jl}) :

$$\gamma = \alpha \times \beta. \quad (2.5)$$

Равенство (2.5) равносильно равенству¹⁾

$$\gamma_{ij; kl} = \alpha_{ik} \beta_{jl}. \quad (2.6)$$

Если α имеет n_1 строк и n_2 столбцов, а матрица β — соответственно n'_1 строк и n'_2 столбцов, то матрица γ имеет точно $n_1 n'_1$ строк и $n_2 n'_2$ столбцов. В частности, если α и β обе являются квадратными матрицами, то прямое произведение $\alpha \times \beta$ есть квадратная матрица.

Теорема 1. Если $\alpha \bar{\alpha} = \bar{\alpha}$ и $\beta \bar{\beta} = \bar{\beta}$ и если $\alpha \times \beta = \gamma$ и $\bar{\alpha} \times \bar{\beta} = \bar{\gamma}$, то $\bar{\gamma} = \bar{\alpha} \times \bar{\beta}$ или

$$(\alpha \times \beta)(\bar{\alpha} \times \bar{\beta}) = \alpha \bar{\alpha} \times \beta \bar{\beta}. \quad (2.7)$$

Иначе говоря, матричное произведение двух прямых произведений есть прямое произведение этих двух матричных произведений. Чтобы показать это, рассмотрим

$$(\alpha \times \beta)_{ik; i'k'} = \alpha_{ii'} \beta_{kk'}, \quad (\bar{\alpha} \times \bar{\beta})_{i'k'; i''k''} = \bar{\alpha}_{i'l''} \bar{\beta}_{k'k''}$$

и

$$(\alpha \times \beta)(\bar{\alpha} \times \bar{\beta})_{ik; i''k''} = \sum_{i'k'} \alpha_{ii'} \beta_{kk'} \bar{\alpha}_{i'l''} \bar{\beta}_{k'k''}. \quad (2.8)$$

Но

$$(\alpha \bar{\alpha})_{ii''} = \sum_{i'} \alpha_{ii'} \bar{\alpha}_{i'i''}, \quad (\beta \bar{\beta})_{kk''} = \sum_{k'} \beta_{kk'} \bar{\beta}_{k'k''}$$

и

$$(\alpha \bar{\alpha} \times \beta \bar{\beta})_{ik; i''k''} = \sum_{i'} \alpha_{ii'} \bar{\alpha}_{i'i''} \sum_{k'} \beta_{kk'} \bar{\beta}_{k'k''}. \quad (2.9)$$

Поэтому, из (2.8) и (2.9) следует теорема 1, а именно равенство (2.7).

¹⁾ Множители α и $\bar{\alpha}$ обычного произведения матриц пишутся рядом: $\alpha \bar{\alpha}$. Матрица же (2.Е.1) есть прямое произведение двух матриц:

$$\begin{pmatrix} a_1 c_1 & a_1 c_2 \\ a_2 c_1 & a_2 c_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 d_1 & b_1 d_2 \\ b_2 d_1 & b_2 d_2 \end{pmatrix} = \gamma.$$

Теорема 2. Прямое произведение двух диагональных матриц есть снова диагональная матрица; прямое произведение двух единичных матриц есть единичная матрица. Это легко видеть непосредственно из определения прямых произведений.

В формальных расчетах с матрицами необходимо проверять, действительно ли возможно обозначенное умножение. В гл. 1, где мы всюду имеем дело с квадратными матрицами с n строками и n столбцами, это, разумеется, всегда имело место. Однако в общем случае следует проверить, что разметка строк первого сомножителя в матричном произведении совпадает с разметкой столбцов второго, т. е. что они имеют одинаковые наименования индексов. Прямое произведение двух матриц всегда может быть построено с помощью (2.6).

Матрицы обобщенного типа с несколькими индексами М. Борн и Йордан назвали „суперматрицей“. Они рассматривают матрицу $(a_{ij; kl})$ как матрицу (A_{lk}) , элементы которой A_{lk} сами являются матрицами. При этом A_{lk} есть та матрица, в которой число $a_{ij; kl}$ встречается в j -й строке и l -м столбце:

$$(a_{ij; kl}) = \alpha = (A_{lk}), \quad \text{где } (A_{lk})_{jl} = a_{ij; kl}. \quad (2.10)$$

Теорема 3. Если $\alpha = (A_{ll'})$ и $\beta = (B_{l'l''})$, то $\alpha\beta = \gamma = (C_{ll''})$, где

$$C_{ll''} = \sum_{l'} A_{ll'} B_{l'l''}. \quad (2.11)$$

Правая часть (2.11) состоит из суммы произведений матричных умножений. Мы имеем

$$(\alpha\beta)_{lk; l''k''} = \sum_{l', k'} \alpha_{lk; l'k'} \beta_{l'k'; l''k''}.$$

С другой стороны,

$$\gamma_{lk; l''k''} = (C_{ll''})_{kk''} = \sum_{l'} (A_{ll'} B_{l'l''})_{kk''}$$

и

$$(A_{ll'} B_{l'l''})_{kk''} = \sum_{k'} (A_{ll'})_{kk'} (B_{l'l''})_{k'k''} = \sum_{k'} \alpha_{lk; l'k'} \beta_{l'k'; l''k''}.$$

Поэтому

$$(\alpha\beta)_{lk; l''k''} = \gamma_{lk; l''k''},$$

и теорема 3 доказана. Конечно, в правой части (2.11) следует соблюдать аккуратность в смысле порядка сомножителей, тогда как в соответствующем соотношении для умножения простых матриц в этом не было необходимости. С этим единственным ограничением суперматрицы можно умножать по правилам умножения простых матриц.

В простейшем случае рассмотрим две квадратные матрицы:

$$\left[\begin{array}{cc|cc|c} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \alpha_{15} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \alpha_{25} \\ \hline \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} & \alpha_{35} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} & \alpha_{45} \\ \alpha_{51} & \alpha_{52} & \alpha_{53} & \alpha_{54} & \alpha_{55} \end{array} \right] \text{ и } \left[\begin{array}{cc|cc|c} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} & \beta_{14} & \beta_{15} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} & \beta_{24} & \beta_{25} \\ \hline \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} & \beta_{34} & \beta_{35} \\ \beta_{41} & \beta_{42} & \beta_{43} & \beta_{44} & \beta_{45} \\ \beta_{51} & \beta_{52} & \beta_{53} & \beta_{54} & \beta_{55} \end{array} \right]. \quad (2.12)$$

Их можно разбить на субматрицы, как показано пунктирными линиями, позаботясь о том, чтобы числа столбцов в субматрицах при разбиении первой матрицы (на 2 и 3) совпадали с числами строк в субматрицах при разбиении второй. Тогда обе матрицы (2.12) сокращенно можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}.$$

Произведение двух матриц (2.12) можно записать как

$$\begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + B_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}.$$

С другой стороны, выражение

$$\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11}A_{11} + B_{12}A_{21} & B_{11}A_{12} + B_{12}A_{22} \\ B_{21}A_{11} + B_{22}A_{21} & B_{21}A_{12} + B_{22}A_{22} \end{pmatrix}$$

не имеет смысла, поскольку число столбцов матрицы B_{11} , например, отлично от числа строк A_{11} .