

Г л а в а 7

АБСТРАКТНАЯ ТЕОРИЯ ГРУПП

Возьмем шесть матриц¹⁾

$$\begin{array}{c}
 \left(\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right), \quad \left(\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{matrix} \right), \quad \left(\begin{matrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{matrix} \right), \quad \left(\begin{matrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{matrix} \right), \\
 E \qquad A \qquad B \qquad C \\
 \left(\begin{matrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{matrix} \right), \quad \left(\begin{matrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{matrix} \right) \\
 D \qquad F
 \end{array} \tag{7.E.1}$$

и образуем таблицу умножения из 36 произведений, получающихся путем умножения каждой матрицы из (7.E.1) на каждую матрицу из (7.E.1.) согласно правилам матричного умножения. При этом каждая из 36 получающихся матриц совпадает с одной из матриц (7.E.1). Такая совокупность матриц называется *группой*. Эти свойства указанных матриц можно представить в виде таблицы, *групповой таблицы*:

| | <i>E</i> | <i>A</i> | <i>B</i> | <i>C</i> | <i>D</i> | <i>F</i> |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| <i>E</i> | <i>E</i> | <i>A</i> | <i>B</i> | <i>C</i> | <i>D</i> | <i>F</i> |
| <i>A</i> | <i>A</i> | <i>E</i> | <i>D</i> | <i>F</i> | <i>B</i> | <i>C</i> |
| <i>B</i> | <i>B</i> | <i>F</i> | <i>E</i> | <i>D</i> | <i>C</i> | <i>A</i> |
| <i>C</i> | <i>C</i> | <i>D</i> | <i>F</i> | <i>E</i> | <i>A</i> | <i>B</i> |
| <i>D</i> | <i>D</i> | <i>C</i> | <i>A</i> | <i>B</i> | <i>F</i> | <i>E</i> |
| <i>F</i> | <i>F</i> | <i>B</i> | <i>C</i> | <i>A</i> | <i>E</i> | <i>D</i> |

¹⁾ Мы пользуемся символом *E* (единица) для представления единичного элемента группы.

Первый множитель берется в первом столбце, второй — в первой строке, а произведение появляется на пересечении соответствующих столбца и строки в таблице. Эта таблица объединяет все правила умножения матриц (7.Е.1).

Дадим строгое определение *группы*. *Группа* есть некоторая совокупность объектов (*элементов группы*), в которой определен один вид операции, называемый *умножением*. Это умножение указывает для всяких двух элементов группы (множителей) *третий элемент группы*, произведение¹⁾. Это *групповое умножение*, которое является свойством, присущим элементам группы, должно также обладать следующими свойствами.

1. *Должен иметь место сочетательный закон*. Если $AB = F$ и $BC = G$, то $FC = AG$. Если элементы группы являются матрицами и если под групповым умножением мы понимаем матричное умножение, то сочетательный закон всегда имеет место (согласно теореме 3 гл. 1). Группы, в которых выполняется также перестановочный закон умножения, т. е. в которых $AB = BA$, называются *абелевыми группами*.

2. Среди элементов есть один (и только один), который называется *тождественным или единичным элементом* E и который обладает тем свойством, что его произведение на любой другой элемент дает именно тот другой элемент, т. е. $EA = AE = A$.

3. Каждый элемент имеет *обратный*. Это значит, что для каждого элемента A существует такой элемент B , что $BA = E$. Тогда можно также показать (как в теореме 5 гл. 1), что $AB = E$. Действительно, из $BA = E$ следует $BAB = B$; тогда, если C есть элемент, обратный B , получаем, что $CBAB = CB$, т. е. $AB = E$. Элемент, обратный A , обозначается через A^{-1} .

Эти три свойства элементов группы и группового умножения являются определением группы. При формулировке их в этом (или каком-либо ином) виде о них говорят как о *групповых аксиомах* или *групповых постуатах*.

Правило. Элемент, обратный произведению $ABCD\dots$, образуется путем перемножения обратных отдельным множителям в *обратном порядке* (как это имеет место для матриц). Таким образом,

$$(ABCD\dots)^{-1} = \dots D^{-1} C^{-1} B^{-1} A^{-1}.$$

Это равенство может быть доказано сразу, так как

$$(\dots D^{-1} C^{-1} B^{-1} A^{-1})(ABCD\dots) = E.$$

Следует заметить, что из $AX = B$ и $AY = B$ вытекает, что $X = Y$, поскольку как X , так и Y , очевидно, равны $A^{-1}B$. Так же

¹⁾ В дальнейшем будем иметь в виду систему матриц с n строками.

из $XA = B$ и $YA = B$ следует $X = Y = BA^{-1}$. Если группа содержит лишь конечное число h элементов, она называется конечной группой, причем h называют *порядком* группы.

Теоремы для конечных групп¹⁾

Рассмотрим некоторый элемент X . Тогда можно образовать последовательность элементов

$$E, X, X^2, X^3, X^4, X^5, \dots \quad (7.E.2)$$

и т. д. Так как все элементы (7.E.2) являются элементами группы и полное число всех элементов конечно, то один из членов последовательности должен появиться второй раз после определенного числа степеней. Пусть первый повторяющийся элемент есть $X^n = X^k$ (с $k < n$). Тогда мы должны иметь $k = 0$ и $X^n = E$; в противном случае $X^{n-1} = X^{k-1}$ уже появилось бы ранее в последовательности (7.E.2) и X не было бы первым повторяющимся элементом. Если n есть наименьшее число, для которого $X^n = E$, то n называется *порядком* элемента X . Последовательность

$$E, X, X^2, X^3, \dots, X^{n-1} \quad (7.E.3)$$

называется *периодом* элемента X . Например, период элемента D в группе (7.E.1) есть $E, D, D^2 = F (D^3 = FD = E)$ и порядок D таким образом есть 3. Период элемента F есть $E, F, F^2 = D (F^3 = DF = E)$ и порядок F также равен 3. С другой стороны, порядок элемента A есть 2, поскольку сразу $A^2 = E$.

Период элемента X образует группу сам по себе (причем *абелеву* группу). Некоторая совокупность элементов группы, сама по себе составляющая группу, называется *подгруппой*. Например, (7.E.3) является абелевой подгруппой.

Теорема 1. *Если \mathcal{G} есть группа порядка h с элементами E, A_2, A_3, \dots, A_h и если A_k — произвольный элемент этой группы, то каждый элемент встречается один и только один раз в последовательности $EA_k = A_k, A_2A_k, A_3A_k, \dots, A_hA_k$. Пусть X — любой элемент и пусть $XA_k^{-1} = A_r$; тогда $A_rA_k = X$ и X встречается в последовательности. С другой стороны, X не может встретиться дважды, потому что из $A_rA_k = X$ и $A_sA_k = X$ следует $A_r = A_s$.*

Разумеется, то же имеет место для последовательности $A_kE, A_kA_2, A_kA_3, \dots, A_kA_h$. Теорема 1 выражает тот факт, что

¹⁾ Все теоремы для конечных групп рекомендуется проверить на группе (7.E.1). С этой целью следует воспользоваться групповой таблицей.

в каждом столбце групповой таблицы (так же как и в каждой строке) каждый элемент встречается один и только один раз. Эта теорема имеет следующее простейшее и наиболее важное приложение. Если $J_E, J_{A_2}, J_{A_3}, \dots, J_{A_h}$ — такие числа, что каждому элементу группы X соответствует число J („ J есть функция в пространстве группы“), то

$$\sum_{v=1}^h J_{A_v} = \sum_{v=1}^h J_{A_v X} = \sum_{v=1}^h J_{X A_v}. \quad (7.1)$$

Каждая сумма, очевидно, содержит одни и те же числа, но в различном порядке.

Пусть \mathcal{B} есть подгруппа группы \mathcal{H} , включающая элементы E, B_2, B_3, \dots, B_g . Совокупность g элементов $EX, B_2X, B_3X, \dots, B_gX$ называется *правым смежным классом* $\mathcal{B}X$, если только X не встречается в подгруппе¹⁾ (поскольку, если бы X принадлежало \mathcal{B} , элементы $\mathcal{B}X$ были бы элементами \mathcal{B} , как показывает теорема 1). *Смежный класс, конечно, не является группой*, так как он не может содержать ни единичного (тождественного) элемента E , ни какого-либо другого элемента подгруппы \mathcal{B} . Предположим, например, что $B_kX = B_l$; тогда $X = B_k^{-1}B_l$, т. е. X содержалось бы в подгруппе \mathcal{B} , и $\mathcal{B}X$ совпадало бы с \mathcal{B} . Аналогичным образом, элементы $XE = X, XB_2, XB_3, \dots, XB_g$ образуют левый смежный класс по подгруппе \mathcal{B} .

Теорема 2. Два правых смежных класса по подгруппе \mathcal{B} либо содержат одни и те же элементы, либо не имеют общих элементов вовсе. Пусть один смежный класс будет $\mathcal{B}X$, а другой — $\mathcal{B}Y$. Тогда из $B_kX = B_lY$ следует $YX^{-1} = B_l^{-1}B_k$, т. е. YX^{-1} содержится в \mathcal{B} . В таком случае по теореме 1, примененной к подгруппе \mathcal{B} , последовательность $EYX^{-1}, B_2YX^{-1}, \dots, B_gYX^{-1}$ совпадает с E, B_2, B_3, \dots, B_g с точностью до порядка. Таким образом, $EYX^{-1}X, B_2YX^{-1}X, B_3YX^{-1}X, \dots, B_gYX^{-1}X$ также совпало бы с $EX, B_2X, B_3X, \dots, B_gX$ с точностью до порядка. Но первые элементы являются членами смежного класса $\mathcal{B}Y = EY, B_2Y, B_3Y, \dots, B_gY$. Таким образом, элементы $\mathcal{B}Y$ совпадают с элементами $\mathcal{B}X$, если только совпадает один элемент. *Критерием совпадения является то, чтобы YX^{-1} содержался в \mathcal{B} .*

Например, одной из подгрупп группы (7.E.1) является период элемента A , т. е. два элемента E и A . Правый смежный класс по этой группе получается при умножении каждого элемента на какой-либо другой элемент, например B , справа. Таким образом, мы получаем смежный

¹⁾ Разумеется, X должно быть элементом группы \mathcal{B} .

класс $EB = B$, $AB = D$. Смежные классы также получаются умножением элементов E, A на каждый из остальных элементов C, D, F . Смежный класс, получаемый при умножении E, A

- на B , есть B, D ,
- на C , есть C, F ,
- на D , есть D, B ,
- на F , есть F, C .

Так, в этом случае смежные классы, полученные путем умножения на B и D (или C и F), совпадают. Заметим также, что $BD^{-1} = BF = A$ (или $CF^{-1} = GD = A$) содержится в подгруппе E, A .

Рассмотрим теперь все *различные* смежные классы по подгруппе \mathcal{B} . Пусть ими будут $\mathcal{B}X_2, \mathcal{B}X_3, \dots, \mathcal{B}X_l$. Каждый элемент группы \mathcal{H} встречается либо в \mathcal{B} , либо в одном из $l - 1$ смежных классов. Так мы получаем все lg элементов. Поскольку каждый элемент встречается по крайней мере один раз и ни один из них не встречается дважды, lg должно равняться h . Это приводит к теореме 3.

Теорема 3. *Порядок g подгруппы является целочисленным делителем порядка h полной группы. Отношение $h/g = l$ называется индексом подгруппы \mathcal{B} относительно группы \mathcal{H} .*

Так как период каждого элемента есть подгруппа с числом элементов, равным его порядку, то, следовательно, *порядок каждого элемента есть делитель порядка группы*.

Признак подгрупп. Если некоторая совокупность элементов группы содержит все произведения AB всех элементов A и B , содержащихся в ней, то она образует группу, и, следовательно, подгруппу исходной группы. *Сочетательный закон умножения* имеет место для всех элементов группы, а тем самым и для рассматриваемой совокупности элементов. Вместе с каждым элементом A совокупность содержит также все его степени, и, следовательно, в ней встречается и *единичный элемент* E . Наконец, если n есть порядок элемента A , то $A^n = E$ и $A^{n-1} = A^{-1}$. *Обратная величина* каждого элемента также встречается в данной совокупности. Таким образом, все три групповых постулата выполнены.

Примеры групп

1. Группа, содержащая лишь один элемент, состоит из одного только элемента E .

2. Группа порядка 2 имеет следующую групповую таблицу умножения:

| | | E | A |
|-----|-----|-----|-----|
| E | E | A | |
| A | A | E | |

Эта группа является *абелевой*. Мы назовем ее группой отражения, так как она составлена из тождественного преобразования и преобразования отражения $x' = -x$.

3. Группа порядка 3 может содержать наряду с единичным элементом только элемент порядка 3, так как ее порядок должен быть целым делителем трех (отличным от 1). Она состоит из одного периода. Ее элементами являются

$$E, A, A^2 (A^3 = E).$$

Таким образом, эта группа абелева.

То же самое имеет место для всякой группы, порядок которой является простым числом p . Элементы таких групп имеют вид

$$E, A, A^2, A^3, \dots, A^{p-1}.$$

Группы такого вида называются также *циклическими группами*, даже если p не является простым числом. Если ω является n -м простым корнем из единицы, (т. е. ω^n есть наименьшая степень ω , которая равна 1, как, например, для $\omega = \cos 2\pi/n + i \sin 2\pi/n$), то числа

$$1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1} \quad (7.E.4)$$

образуют циклическую группу порядка n , если под групповым умножением понимать обычное числовое умножение. Все циклические группы *абелевы*. „Та же“ группа, что и (7.E.4), образуется числами

$$0, 1, 2, \dots, n-1, \quad (7.E.5)$$

если групповое умножение определено как *сложение по модулю n* (если, например, $n = 7$, то $5 \cdot 4 \doteq 2$, так как $5+4=9=7+2=n+2$). Элементы группы (7.E.5) можно сопоставить элементам (7.E.4) взаимно однозначным образом путем установления соответствия между k и ω^k . Это соответствие имеет то свойство, что с его помощью „*произведения преобразуются в произведения*“, т. е. из $k_1 \cdot k_2 = k_3$ следует $\omega^{k_1} \cdot \omega^{k_2} = \omega^{k_3}$. Такие две группы называются *изоморфными*¹⁾.

¹⁾ Чтобы показать, что не все из доказанных выше теорем тривиальны, упомянем их следствие для теории чисел. Если $n+1$ есть простое число, то числа $1, 2, 3, \dots, n$ образуют группу еще одним способом, если понимать под групповым умножением числовое умножение по модулю $n+1$. Если, скажем, $n+1=7$, то $3 \cdot 5 = 1$, так как $3 \cdot 5 = 15 = 2 \cdot 7 + 1$; при этом тождественным элементом будет 1. Тогда период каждого элемента является делителем n , порядка группы. Таким образом, мы обязательно имеем $A^n = 1$, если A есть элемент этой группы. Но это равносильно утверждению, что $a^n \equiv 1 \pmod{n+1}$, если a есть одно из чисел $1, 2, 3, \dots, n$. Это частный случай теоремы Ферма, которая, как следует признать, нетривиальна.

Две группы *изоморфны*, если элементам A одной из них можно сопоставить элементы \bar{A} другой, притом взаимно однозначно и так, что из $AB = C$ следует, что $\bar{A}\bar{B} = \bar{C}$, т. е. что $\bar{A}\bar{B} = \overline{AB}$. Изоморфные группы в сущности совпадают; лишь индивидуальные элементы пронумерованы по-разному.

4. Имеются две группы порядка 4, т. е. две группы, не изоморфные одна другой. Все остальные изоморфны одной из этих двух. Первая группа — это циклическая группа, например $1, i, -1, -i$ с групповым умножением, определенным как числовое умножение. Вторая группа — это так называемая *четыре-группа*. Ее групповая таблица такова:

| | E | A | B | C |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| E | E | A | B | C |
| A | A | E | C | B |
| B | B | C | E | A |
| C | C | B | A | E |

Все элементы этой группы (кроме E) порядка 2: она также абелева.

5. Четыре-группа является первым примером весьма обширного множества групп, а именно симметрических групп. Рассмотрим правильный n -угольник на плоскости XY . Пусть координаты n вершин равны $x_k = r \cos 2\pi k/n$, $y_k = r \sin 2\pi k/n$ ($k = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1$), и рассмотрим все линейные подстановки

$$x' = ax + \beta y, \quad y' = \gamma x + \delta y,$$

которые преобразуют правильный n -угольник „в самого себя“, т. е. для которого новые координаты вершин x'_k, y'_k могут быть снова записаны в виде

$$x'_k = r \cos \frac{2\pi k}{n}, \quad y'_k = r \sin \frac{2\pi k}{n}$$

($k = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1$). Матрицы этих линейных подстановок *образуют группу*, так как произведение любых двух подстановок, подстановка, обратная любой из подстановок, а также единичный элемент E — все удовлетворяют условиям для элементов группы.

Подстановками, преобразующими n -угольник в самого себя, являются следующие. а) Вращения плоскости на углы $2\pi k/n$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$); соответствующие матрицы имеют вид

$$\begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi k}{n}, & \sin \frac{2\pi k}{n} \\ -\sin \frac{2\pi k}{n}, & \cos \frac{2\pi k}{n} \end{pmatrix} = D_k. \quad (7.E.6)$$

Они образуют циклическую группу. б) Отражение плоскости в прямой и последующее вращение на угол $2\pi k/n$. Соответствующие матрицы равны

$$\begin{pmatrix} -\cos \frac{2\pi k}{n}, & \sin \frac{2\pi k}{n} \\ \sin \frac{2\pi k}{n}, & \cos \frac{2\pi k}{n} \end{pmatrix} = U_k. \quad (7.E.7)$$

Эти $2n$ матриц образуют группу порядка $2n$, известную как группу диэдра. Матрицы (7.E.6) образуют подгруппу этой группы, а матрицы (7.E.7) — смежный класс по этой подгруппе. 4-группа с $n=2$ является простейшим примером группы диэдра; n -угольник вырождается в две вершины, т. е. в отрезок прямой. В то время как 4-группа все еще является абелевой, другие диэдрические группы уже не являются абелевыми. Группа (7.E.1) есть диэдрическая группа правильного треугольника и является первой неабелевой группой; элементы E, F, D относятся к подгруппе, а A, B, C — к смежному классу.

Подстановки, преобразующие правильные многогранники в самих себя, являются важными и интересными группами, и известны как группы симметрии. Они обычно определяются с помощью правильных многогранников, которые они преобразуют в самих себя. Таким образом существует группа тетраэдра, группа октаэдра, группа икосаэдра и т. д. Они играют важную роль в кристаллофизике.

6. Весьма важны также группы перестановок. Рассмотрим числа от 1 до n : 1, 2, 3, ..., n . Всякий порядок $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ этих n чисел образует перестановку. Таким образом, всего существует $n!$ перестановок n предметов, обычно обозначаемых символом

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & \dots, & n \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3, & \dots, & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Объекты, которые должны быть переставлены, записываются в их естественном порядке в верхней строчке, а во второй строчке — в порядке, возникающем в результате рассматриваемой перестановки. Перемножение двух перестановок P_1 и P_2 производится таким образом, что те изменения, которые P_2 должна вызывать в естественном порядке, происходят с предметами в порядке P_1 . Так, если

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ и } P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

то

$$P_1 P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Это значит, что, поскольку P_2 преобразует 1 в 3, 3 появляется в $P_1 P_2$ там, где 1 находится в P_1 . Аналогичным образом, так как P_2 преобразует 2 в 1, 1 появляется в $P_1 P_2$ там, где 2 находится в P_1 , и т. д.

Если P_1 переводит k в α_k , P_2 — α_k в β_k и P_3 — β_k в γ_k , то P_1P_2 переводит k в β_k , а P_2P_3 — α_k в γ_k . Таким образом, как $(P_1P_2) \cdot P_3$, так и $P_1 \cdot (P_2P_3)$ преобразуют α_k в γ_k ; следовательно, перемножение перестановок *ассоциативно*.

Совокупность всех $n!$ перестановок n объектов образует группу с тождественной перестановкой

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & \dots, & n \\ 1, & 2, & 3, & \dots, & n \end{pmatrix}$$

в качестве единичного элемента. Эта группа называется *симметрической группой*¹⁾ степени n . Симметрическая группа третьей степени имеет порядок 6; она изоморфна группе (7.Е.1) и, следовательно, группе диэдра с $n = 3$. Соответствие между ними следующее:

$$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \\ E & A & B \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\ C & D & F \end{array}$$

Симметрические группы также играют существенную роль в квантовой механике.

Сопряженные элементы и классы

Элемент XAX^{-1} называется элементом, *сопряженным* с A . Если два элемента A и B сопряжены с третьим элементом C , то они также сопряжены друг с другом: из $A = XCX^{-1}$ и $B = YCY^{-1}$ следует, что $X^{-1}AX = C$ и $B = YX^{-1}AXY^{-1} = (YX^{-1})A(YX^{-1})^{-1}$. Те элементы группы, которые сопряжены друг с другом, образуют *класс*. Класс определяется заданием одного из его элементов A ; весь класс может быть тогда получен путем построения последовательности

$$EAE^{-1} = A, \quad A_2AA_2^{-1}, \quad A_3AA_3^{-1}, \dots, A_hAA_h^{-1}.$$

Все элементы этой последовательности сопряжены с A и друг с другом; кроме того, каждый элемент, сопряженный с A (и, таким образом, каждый, сопряженный с любым элементом этой последовательности) встречается (и притом более, чем один раз) в этой

¹⁾ Ее часто также называют группой перестановок, но никогда не называют группой симметрии.

последовательности. Поэтому элементы группы могут быть разбиты на классы; каждый элемент встречается в одном и только в одном классе.

Тождественный элемент группы образует класс сам по себе, так как он не сопряжен ни с каким другим элементом: $XEX^{-1} = E$ для всех X . За исключением этого класса, состоящего только из одного элемента E , никакой класс не является подгруппой, потому что ни один из них не может содержать единицу E . В абелевых группах каждый класс состоит в точности из одного элемента, поскольку $XAX^{-1} = A$ для всех X .

Все элементы класса имеют один и тот же порядок. Если $A^n = E$, то $(XAX^{-1})^n$ также равно E , как это видно непосредственно:

$$(XAX^{-1})^n = (XAX^{-1}) \cdot (XAX^{-1}) \dots (XAX^{-1}) = \\ = XA^nX^{-1} = XEX^{-1} = E.$$

В группе подстановок (группе матриц) все матрицы, принадлежащие одному и тому же классу, имеют одинаковый след. Чтобы показать это, рассмотрим α и β , принадлежащие одному классу. Тогда существует такой элемент группы, т. е. матрица γ , что

$$\beta = \gamma\alpha\gamma^{-1}.$$

Следовательно, $\text{Tr } \beta = \text{Tr } \gamma\alpha\gamma^{-1} = \text{Tr } \alpha$.

Например, образуем класс C в группе (7.Е.1). Он состоит из элементов

$$ECE^{-1} = C, \quad ACA^{-1} = B, \quad BCB^{-1} = A, \quad CCC^{-1} = C, \\ DCD^{-1} = A, \quad FCF^{-1} = B.$$

Класс C , таким образом, состоит из элементов A, B, C ; он также является классом A или B . Все три элемента A, B, C имеют порядок 2, и след матричного представления (7.Е.1) этой группы равен 0 для всех трех элементов. Класс D содержит элементы

$$EDE^{-1} = D, \quad ADA^{-1} = F, \quad BDB^{-1} = F, \quad CDC^{-1} = F, \\ DDD^{-1} = D, \quad FDF^{-1} = D.$$

Таким образом, класс D (или F) состоит из двух элементов D, F .