Глава 8

ИНВАРИАНТНЫЕ ПОДГРУППЫ

Подгруппа, состоящая исключительно из целых классов первоначальной группы, называется *инвариантной подгруппой*. Пусть $\mathcal{R} = E, N_2, \ldots, N_n$ есть инвариантная подгруппа. Будучи группой, она должна содержать наряду с N_i и N_j также их произведение N_iN_j. Кроме того, она содержит XN_iX^{-1}, где X является *любым элементом полной группы*, поскольку инвариантная подгруппа содержит все элементы XN_iX^{-1} некоторого класса, если она содержит один элемент N_i этого класса. Обычная подгруппа содержала бы XN_iX^{-1} только в том случае, если бы наряду с N_i она содержала и X.

В обычной подгруппе, как во всякой группе, элементы

$$N_jE = N_j, \qquad N_jN_2, \ldots, N_jN_n \tag{8.E.1}$$

совпадают с элементами подгруппы с точностью до порядка. То же самое имеет место для последовательности

$$EN_j^{-1} = N_j^{-1}, \qquad N_2N_j^{-1}, \ldots, N_nN_j^{-1} \tag{8.E.2}$$

и последовательности

$$N_jEN_j^{-1} = E, \qquad N_jN_2N_j^{-1}, \ldots, N_jN_nN_j^{-1}, \tag{8.E.3}$$

образуемой из (8.E.2) при подстановке последовательности (8.E.1) вместо первого множителя в каждом члене (это лишь меняет порядок членов). Все N_i являются здесь элементами подгруппы.

С другой стороны, когда элементы $E, N_2, \ldots, N_n$ образуют инвариантную подруппу, последовательность

$$XEX^{-1} = E, \qquad XN_2X^{-1}, \ldots, XN_nX^{-1}, \tag{8.E.4}$$

где X — некоторый *произвольный* элемент *полной* группы, с точностью до порядка совпадает с элементами инвариантной подгруппы. Все элементы (8.E.4) встречаются в инвариантной подгруппе, так как они сопряжены с элементами подгруппы; как мы

сейчас покажем, все элементы инвариантной подгруппы встречаются в (8.E.4). Чтобы найти некоторый элемент N_k в (8.E.4), нужно лишь построить $X^{-1}N_kX$. Этот элемент должен быть среди элементов $E, N_2, \ldots, N_n$. Пусть им будет N_l. Тогда $N_k = XN_lX^{-1}$ и N_k встречается в (8.E.4) на l-м месте.

Каждая подгруппа абелевой группы является инвариантной подгруппой. Каждый элемент образует класс сам по себе; поэтому каждая подгруппа должна состоять целиком из полных классов. Симметрические группы имеют одну, и вообще только одну инвариантную подгруппу, состоящую из всех четных перестановок. Четные перестановки образуют подгруппу, так как произведение двух четных перестановок есть снова четная перестановка. Кроме того, элемент, сопряженный с четной перестановкой, должен быть четной перестановкой и поэтому также встречается в подгруппе (см. также гл. 13).

В примере (7.E.1) элементы E, D и F составляют инвариантную подгруппу. Читателю предлагается проверить другие теоремы для специального случая этой группы.

Определение инвариантных подгрупп очень важно для изучения строения группы. Группы, не имеющие инвариантных подгрупп, называются *простыми* группами.

Фактор-группа

Рассмотрим теперь смежные классы по инвариантной подгруппе $\mathcal{R}$. Элементы $EU = U$, $N_2U, \ldots, N_nU$ образуют правый смежный класс по $\mathcal{R}$. Они образуют также левый смежный класс, так как $U = UU^{-1}EU$, $N_2U = UU^{-1}N_2U, \ldots, N_nU = UU^{-1}N_nU$ совпадают с элементами $U = UE$, $UN_2, \ldots, UN_n$ с точностью до порядка. Иначе говоря, комплекс $\mathcal{R}U$ совпадает с комплексом $U\mathcal{R}$. Поэтому можно говорить просто о смежных классах по инвариантной подгруппе, не уточняя, являются ли эти смежные классы правыми или левыми[1]).

Перемножим все элементы одного смежного класса $\mathcal{R}U$ со всеми элементами другого смежного класса $\mathcal{R}V$. Тогда $N_jUN_lV = N_jUN_lU^{-1}UV = N_kUV$, так как и N_j и UN_lU^{-1}, а поэтому и их произведение N_k содержатся в $\mathcal{R}$. Процесс перемножения дает таким образом элементы единственного смежного класса $\mathcal{R}UV$.

---

[1]) В этом можно убедиться также другим способом. Чтобы U и V были в одном и том же правом смежном классе (см. стр. 76), надо, чтобы UV^{-1} входило в $\mathcal{R}$. Чтобы они были в одном и том же левом смежном классе, надо чтобы $V^{-1}U$ входило в $\mathcal{R}$. Но если $\mathcal{R}$ является инвариантной подгруппой и содержит UV^{-1}, то она должна также содержать и $V^{-1}\cdot UV^{-1}\cdot V = V^{-1}U$. Поэтому два элемента встречаются в одном и том же левом смежном классе, если только они имеются в одном и том же правом смежном классе, и наоборот.

Если рассматривать смежные классы по инвариантной подгруппе как новые объекты и определить произведение двух смежных классов как смежный класс с элементами, получаемыми в результате перемножения элементов двух смежных классов, то *сами смежные классы образуют группу*. Эта группа называется *фактор-группой* инвариантной подгруппы. Единичным элементом фактор-группы является сама инвариантная подгруппа. Каждый элемент N_jU смежного класса $\mathcal{R}U$ дает опять элемент смежного класса $\mathcal{R}U$ при умножении (справа или слева) на элемент N_l из $\mathcal{R}$. В явном виде это запишется так:

$$N_l \cdot N_jU = N_lN_j \cdot U = N_k \cdot U \text{ и } N_j \cdot UN_l = N_j \cdot UN_lU^{-1}U = N_kU.$$

Во-вторых, каждый смежный класс $\mathcal{R}U$ имеет обратный смежный класс $\mathcal{R}U^{-1}$. Это значит, что

$$N_jU \cdot N_lU^{-1} = N_j \cdot UN_lU^{-1} = N_k,$$

что дает нам элемент самой инвариантной подгруппы. Произведение $\mathcal{R}U$ и $\mathcal{R}U^{-1}$ сводится, таким образом, к $\mathcal{R}$, единичному элементу фактор-группы.

Порядок фактор-группы подгруппы $\mathcal{R}$ равен числу смежных классов по $\mathcal{R}$, т. е. ее индексу. Не следует смешивать фактор-группу с подгруппой; элементы подгруппы являются элементами группы, тогда как *элементами фактор-группы являются смежные классы*.

Теоремы, доказанные выше, можно также получить еще проще с помощью символического метода, в котором совокупность элементов, их комплекс, обозначается одной буквой, скажем, $\mathcal{C}$. Произведение комплекса $\mathcal{C}$ на элемент A опять является комплексом $\mathcal{C}A$, элементы которого получаются при умножении всех элементов комплекса $\mathcal{C}$ на A справа (или слева, чтобы получить $A\mathcal{C}$). Произведение двух комплексов $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ есть комплекс $\mathcal{C}\mathcal{D}$, элементы которого получаются, когда все элементы $\mathcal{C}$ умножаются справа на элементы $\mathcal{D}$. Легко видеть, что *ассоциативный* закон для такого вида умножения имеет место.

Если $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ содержат по n и n' элементов соответственно, то $\mathcal{C}\mathcal{D}$ содержит самое большое nn' элементов. Однако обычно оно содержит меньшее число различных элементов, так как некоторые элементы могут встретиться более чем один раз среди nn' произведений.

Условием того, чтобы $\mathcal{C}$ было подгруппой, будет $\mathcal{C} \cdot \mathcal{C} = \mathcal{C}^2 = \mathcal{C}$. Эта подгруппа является инвариантной подгруппой, если для каждого элемента U имеет место равенство $U^{-1}\mathcal{C}U = \mathcal{C}$. Правые смежные классы по $\mathcal{C}$ являются все различными комплексами $\mathcal{C}U$. Если $\mathcal{C}$ — инвариантная подгруппа, то $U^{-1}\mathcal{C}U = \mathcal{C}$,

так что $\mathscr{C}U = U\mathscr{C}$; правые смежные классы являются одновременно и левыми. Элементами фактор-группы будут различные комплексы $\mathscr{C}U$. Произведение двух комплексов $\mathscr{C}U$ и $\mathscr{C}V$, взятое в смысле перемножения в фактор-группе, совпадает с произведением, взятым в смысле умножения комплексов:

$$\mathscr{C}U \cdot \mathscr{C}V = \mathscr{C} \cdot U\mathscr{C} \cdot V = \mathscr{C} \cdot \mathscr{C}U \cdot V = \mathscr{C}^2 UV = \mathscr{C}UV.$$

Изоморфизм и гомоморфизм

В предыдущей главе мы познакомились с понятием *изоморфизма* двух групп. Две группы изоморфны, если между их элементами имеется *взаимнооднозначное* соответствие, притом такое, что произведения соответствуют произведениям. Элементам A или B одной группы соответствуют элементы $\overline{A}$ или $\overline{B}$ изоморфной группы, и произведению AB соответствует произведение $\overline{A} \cdot \overline{B} = \overline{AB}$. Ясно, что изоморфные группы должны быть одного и того же порядка.

Менее точное соответствие между двумя группами будет при простом *гомоморфизме*, который напоминает изоморфизм за тем исключением, что от соответствия не требуется, чтобы оно было взаимнооднозначным. Группа $\mathscr{G}$ гомоморфна на другую группу $\mathscr{H}$, если один и только один элемент группы $\mathscr{H}$ соответствует каждому элементу группы $\mathscr{G}$ и если по крайней мере один элемент группы $\mathscr{G}$ соответствует каждому элементу группы $\mathscr{H}$, а также если соответствие таково, что произведение A и B из группы $\mathscr{G}$ соответствует произведению $\overline{A} \cdot \overline{B} = \overline{AB}$ соответствующих элементов $\overline{A}$ и $\overline{B}$ группы $\mathscr{H}$ [1]). При гомоморфизме один элемент $\overline{A}$ группы $\mathscr{H}$ может соответствовать нескольким различным элементам, скажем, A и A' группы $\mathscr{G}$. В соответствии с этим гомоморфизм не является взаимным свойством. Если $\mathscr{G}$ гомоморфна $\mathscr{H}$, то $\mathscr{H}$ не обязательно гомоморфна на $\mathscr{G}$. Число элементов группы $\mathscr{G}$ должно быть *равно или больше*, чем число элементов группы $\mathscr{H}$; если число элементов равно, то гомоморфизм становится изоморфизмом, который уже является взаимным.

Тождественный элемент E группы $\mathscr{G}$ соответствует тождественному элементу $\overline{E}$ группы $\mathscr{H}$, так как из $E \cdot E = E$ следует

---

[1]) Соответствие, которое называется здесь гомоморфизмом группы $\mathscr{G}$ *на* группу $\mathscr{H}$, у большинства немецких авторов обозначается как гомоморфизм группы $\mathscr{H}$ группе $\mathscr{G}$. Заметим также, что выражения „голоморфизм“ и „изоморфизм“ используются как синонимы в некоторых текстах. (В русской литературе говорят также о гомоморфном отображении группы $\mathscr{G}$ на группу $\mathscr{H}$. Мы оставляем более краткую терминологию автора. — *Прим. ред.*)

$\overline{E}\cdot\overline{E}=\overline{E}$, причем это имеет место только для тождественного элемента группы. Аналогично, обратные элементы группы $\mathscr{G}$ соответствуют обратным элементам группы $\mathscr{H}$.

Рассмотрим все элементы $E, E_2, \ldots, E_n$ группы $\mathscr{G}$, соответствующие тождественному элементу $\overline{E}$ группы $\mathscr{H}$, и обозначим этот комплекс через $\mathscr{C}$. Так как $E_k\cdot E_l$ соответствует произведению $\overline{E}\cdot\overline{E}=\overline{E}$, комплекс $\mathscr{C}$ также содержит $E_k\cdot E_l$, так что $\mathscr{C}$ является группой. Кроме того, всякий элемент $U^{-1}E_kU$, сопряженный с E_k, соответствует элементу $\overline{E}$, поскольку $\overline{U^{-1}}\cdot\overline{E}\cdot\overline{U}=\overline{U}^{-1}\overline{E}\overline{U}=\overline{E}$; поэтому группа $\mathscr{C}$ является *инвариантной подгруппой* группы $\mathscr{G}$. Аналогичным образом, элементы комплекса $\mathscr{A}$, которым соответствует один и тот же элемент $\overline{A}$ группы $\mathscr{H}$, образуют смежный класс по подгруппе $\mathscr{C}$. Пусть A_j и A_l — два элемента комплекса $\mathscr{A}$; тогда $\overline{A}_j=\overline{A}_l=\overline{A}$. Всякому элементу $A_jA_l^{-1}$ соответствует элемент $\overline{A}_j\overline{A}_l^{-1}=\overline{A}_j\overline{A_l^{-1}}=\overline{A}\,\overline{A}^{-1}=\overline{E}$; иначе говоря, $A_jA_l^{-1}$ содержится в $\mathscr{C}$, что является условием того, что A_j и A_l принадлежат одному и тому же смежному классу по подгруппе $\mathscr{C}$.

Смежные классы по подгруппе $\mathscr{C}$ находятся во взаимнооднозначном соответствии с элементами группы $\mathscr{H}$; поэтому произведение двух смежных классов $\mathscr{C}U$ и $\mathscr{C}V$ соответствует прозведению $\overline{U}\overline{V}=\overline{UV}$ соответствующих двух элементов $\overline{U}$ и $\overline{V}$. Так как смежные классы являются элементами фактор-группы подгруппы $\mathscr{C}$, *эта фактор-группа изоморфна группе* $\mathscr{H}$.

Если $\mathscr{G}$ гомоморфна на $\mathscr{H}$, то фактор-группа группы $\mathscr{G}$ изоморфна группе $\mathscr{H}$. Порядок группы $\mathscr{G}$ является целым кратным порядка группы $\mathscr{H}$. Если гомоморфизм является в действительности изоморфизмом, то рассматриваемая инвариантная подгруппа $\mathscr{C}$ вырождается в единственный тождественный элемент E.

С помощью надлежащей перенумерации элементов групп можно построить следующее соответствие между элементами групп $\mathscr{G}$ и $\mathscr{H}$.

$$\underbrace{E,\ G_2,\ \ldots,\ G_n}_{\overline{E}},\ \underbrace{G_{n+1},\ G_{n+2},\ \ldots,\ G_{2n}}_{H_2},\ \ldots,\ \underbrace{G_{(h-1)n+1},\ \ldots,\ G_{hn}}_{H_h}.$$

Мы видим, что единственный элемент группы $\mathscr{H}$ соответствует каждому элементу группы $\mathscr{G}$. Наоборот, определенные элементы группы $\mathscr{G}$ соответствуют каждому элементу группы $\mathscr{H}$; это соответствие не является, однако, одно-однозначным, а n-однозначным, так как каждый элемент $\mathscr{H}$ соответствует точно n элементам $\mathscr{G}$. Элементы $E, G_2, \ldots, G_n$ образуют инвариантную подгруппу $\mathscr{C}$ (ранее они были обозначены через $E, E_2, E_3, \ldots, E_n$); каждый из других комплексов, обозначенных скобкой, образует один из

смежных классов по этой подгруппе, соответствующей каждый одному элементу группы $\mathscr{H}$.

Умножение некоторого элемента группы $\mathscr{G}$, соответствующего H_i, на элемент, соответствующий H_j, дает элемент, который соответствует $H_i \cdot H_j$. Перемножение всех n элементов, соответствующих H_i, со всеми n элементами, соответствующими H_j, дает n элементов, которые соответствуют $H_i \cdot H_j$, каждый n раз. Группа $\mathscr{H}$ в сущности совпадает с фактор-группой инвариантной подгруппы $E, G_2, \ldots, G_n$. Она изоморфна этой фактор-группе.

Всякая группа, очевидно, изоморфна сама себе. Всякая группа также гомоморфна на группу, состоящую из одного лишь тождественного элемента $\bar{E}$. Элементу A соответствует тождественный элемент $\bar{E}$, а элементу B — также тождественный элемент $\bar{E}$. Таким образом, произведение AB соответствует также произведению $\bar{E}\bar{E} = \bar{E}$. В этом случае инвариантная подгруппа охватывает всю группу.

Всякая группа подстановок гомоморфна некоторой абелевой группе. Этот гомоморфизм может быть построен, если каждой подстановке поставить в соответствие ее определитель. Что это дает в случае группы (7.E.1) предыдущей главы?

На этом мы заканчиваем изложение абстрактной теории конечных групп; затем мы перейдем к теории представлений групп. Далее мы обсудим непрерывные группы. Наше рассмотрение было ограничено началами абстрактной теории групп, которая необычайно проста в своей аргументации. Подробное изложение можно найти в „Теории конечных групп“ Спайзера и в „Алгебре“ Вебера. Здесь мы рассмотрели только те вопросы, которые существенны для дальнейшего изложения и для приобретения навыков при использовании теории групп [1]), и не будем далее обсуждать эти вопросы.

---

[1]) Из более поздних руководств по теории групп можно указать книгу: H. Zassenhaus, Theory of Groups, New York, 1958.