Глава 13

СИММЕТРИЧЕСКАЯ ГРУППА

1. Элементами симметрической группы n-й степени являются перестановки n объектов. Порядок этой группы равен $n!$ Перестановка, заменяющая 1 на α_1, 2 на α_2, ..., и, наконец, n на α_n, обозначается через $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$. Это та же перестановка, что и $\begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \dots & k_n \\ \alpha_{k_1} & \alpha_{k_2} & \dots & \alpha_{k_n} \end{pmatrix}$, так как обе преобразуют каждое k в α_k. Здесь $k_1, k_2, \dots, k_n$ является произвольным размещением чисел $1, 2, 3, \dots, n$. Под произведением двух перестановок $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n \end{pmatrix}$ мы понимаем их последовательное применение. Перестановка A преобразует k в α_k, а B преобразует это число в β_{α_k}, так что AB преобразует k в β_{α_k}. Преобразования (11.E.1) образуют группу, изоморфную симметрической группе n-й степени; эти преобразования переводят точку $x_1, x_2, \dots, x_n$ в точку $x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \dots, x_{\alpha_n}$; поэтому они соответствуют упомянутой выше перестановке A.

Существует другое обозначение перестановок. При этом перестановки „разделяются на циклы". Цикл $(r_1 r_2 \dots r_\lambda)$ является перестановкой, которая заменяет элемент r_k следующим за ним элементом r_{k+1}, за исключением того, что последний элемент цикла r_λ заменяется первым элементом r_1. Цикл $(r_1 r_2 \dots r_\lambda)$ тождествен перестановке и $\begin{pmatrix} r_1 & r_2 & \dots & r_\lambda \\ r_2 & r_3 & \dots & r_1 \end{pmatrix}$. Он также эквивалентен циклу $(r_2 r_3 \dots r_\lambda r_1)$ или $(r_3 r_4 \dots r_\lambda r_1 r_2)$.

Циклы, не имеющие общих элементов, коммутируют. Например,

$$(1\ 3\ 5)\ (2\ 4\ 6\ 7) = (2\ 4\ 6\ 7)\ (1\ 3\ 5) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 & 4 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 6 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

Разложение перестановки на циклы является его разложением на произведение коммутирующих циклов; порядок отдельных циклов, а также начальный элемент каждого цикла, остаются пока произвольными. Разложение на циклы может быть достигнуто, если начать, скажем, с элемента 1 и поместить после него элемент, в который преобразуется 1, а затем — тот, в который преобразуется предыдущий, и т. д. Наконец, появляется элемент, преобразуемый в 1; это последний элемент первого цикла. После этого выбирается произвольно иной элемент, еще не включенный в первый цикл, и повторяется тот же процесс. Эта процедура продолжается до тех пор, пока не будет исчерпана вся перестановка.

Например, перестановка

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 6 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

разделяется на циклы в виде (1 3 6) (2 4) (5), и это равно (3 6 1) (2 4) (5), а также (2 4) (5) (1 3 6), так как порядок циклов не имеет никакого значения.

Две перестановки, имеющие одинаковые числа циклов и циклы которых имеют равную длину, содержатся в одном и том же классе. Две перестановки

$$R = (r_1 r_2 \ldots r_{\mu_1})(r_{\mu_1+1} r_{\mu_1+2} \ldots r_{\mu_2}) \ldots (r_{\mu_{\rho-1}+1}, \ldots, r_{\mu_\rho})$$

и

$$S = (s_1 s_2 \ldots s_{\mu_1})(s_{\mu_1+1} s_{\mu_1+2} \ldots s_{\mu_2}) \ldots (s_{\mu_{\rho-1}+1}, \ldots, s_{\mu_\rho})$$

могут быть преобразованы одна в другую с помощью

$$T = \begin{pmatrix} s_1 s_2 \ldots & s_{\mu_1} s_{\mu_1+1} s_{\mu_1+2} \ldots & s_{\mu_2} \ldots & s_{\mu_{\rho-1}+1} \ldots & s_{\mu_\rho} \\ r_1 r_2 \ldots & r_{\mu_1} r_{\mu_1+1} r_{\mu_1+2} \ldots & r_{\mu_2} \ldots & r_{\mu_{\rho-1}+1} \ldots & r_{\mu_\rho} \end{pmatrix}$$

и

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} r_1 r_2 \ldots & r_{\mu_1} r_{\mu_1+1} r_{\mu_1+2} \ldots & r_{\mu_2} \ldots & r_{\mu_{\rho-1}+1} \ldots & r_{\mu_\rho} \\ s_1 s_2 \ldots & s_{\mu_1} s_{\mu_1+1} s_{\mu_1+2} \ldots & s_{\mu_2} \ldots & s_{\mu_{\rho-1}+1} \ldots & s_{\mu_\rho} \end{pmatrix}.$$

Это значит, что $S = TRT^{-1}$. Наоборот, длины циклов любой перестановки, получающейся из R путем преобразования с помощью T, снова равны μ_1, $\mu_2 - \mu_1$, $\ldots$, $\mu_\rho - \mu_{\rho-1}$.

Поэтому, если мы хотим решить вопрос, входят ли две перестановки в один и тот же класс, можно поместить наиболее длинный цикл в каждой из них впереди, далее следующий по длине и т. д., пока наиболее короткий цикл не окажется на последнем месте. Если в двух рассматриваемых перестановках длины всех

циклов $\lambda_1 = \mu_1$, $\lambda_2 = \mu_2 - \mu_1$, ..., $\lambda_\rho = \mu_\rho - \mu_{\rho-1}$ (при $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \ldots \geqslant \lambda_\rho$ и $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_\rho = \mu_\rho = n$) одинаковы, то эти перестановки принадлежат одному и тому же классу; в противном случае это не так. Поэтому число классов равно числу различных возможных длин циклов, числу последовательностей чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\rho$, удовлетворяющих условиям $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_\rho$ и $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_\rho = n$. Это число, число возможных разбиений числа n на целые положительные слагаемые независимо от порядка[1]), называется „числом подразделений" числа n. Согласно гл. 9, число различных неприводимых представлений равно числу классов и, следовательно, числу подразделений числа n.

Например, симметрическая группа четвертой степени (порядка 24) имеет пять различных классов. Каждый из следующих элементов представляет один класс: $E = (1)(2)(3)(4)$; $(1\ 2)(3)(4)$; $(1\ 2)(3\ 4)$; $(1\ 2\ 3)(4)$; $(1\ 2\ 3\ 4)$. Поэтому эта группа должна иметь пять неприводимых представлений. Симметрическая группа третьей степени имеет три класса: $E = (1)(2)(3)$; $(1\ 2)(3)$; $(1\ 2\ 3)$, соответствующих трем неприводимым представлениям, уже обсуждавшимся в гл. 9.

Единичные циклы часто опускаются. Например, $(1\ 2)(3)(4)$ записывается в виде $(1\ 2)$.

2. Простейшими перестановками, если не считать тождества, являются те, которые просто меняют местами два элемента. Такая перестановка называется *транспозицией*; с помощью циклов ее можно записать в виде (kl). Каждую перестановку можно записать в виде произведения некоторого числа транспозиций. Например, перестановку, состоящую только из одного цикла, можно записать в виде

$$(\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_\lambda) = (\alpha_1\alpha_2)(\alpha_1\alpha_3) \ldots (\alpha_1\alpha_\lambda).$$

Ясно, что то же самое верно для произведения нескольких циклов и, следовательно, для всякой перестановки.

Понятие о *четных и нечетных перестановках* играет важную роль в теории определителей. Значение определителя

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

равно сумме $n!$ произведений:

$$|a_{ik}| = \sum \varepsilon_{(\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n\alpha_n},$$

[1]) Ясно, что для числа систем чисел λ безразлично, игнорируется ли порядок или рассматривается только один порядок.

где $\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n$ пробегают все $n!$ перестановок чисел $1, 2, \ldots, n$ и $\varepsilon_{(\alpha_1 \ldots \alpha_n)}$ равно $+1$ или -1 в зависимости от того, является ли перестановка $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix}$ четной или нечетной, т. е. в зависимости от того, может ли она быть записана в виде четного или нечетного числа транспозиций. (Перестановку можно разложить на транспозиции различными способами, но разложение определенной перестановки приводит либо всегда к четному числу, либо всегда к нечетному числу транспозиций.)

Произведение двух четных перестановок есть снова четная перестановка, так как ясно, что она может быть записана в виде произведения такого числа транспозиций, какое содержат обе перестановки вместе. Четные перестановки образуют подгруппу, *знакопеременную группу*. Индекс знакопеременной группы равен 2, поскольку между четными или нечетными перестановками можно установить взаимнооднозначное соответствие, например, путем умножения на транспозицию (1 2). Знакопеременная группа является инвариантной подгруппой симметрической группы; элементы, сопряженные четным перестановкам P, снова представляют собой четные перестановки $S^{-1}PS$, так как они могут быть записаны как произведение удвоенного числа транспозиций, входящих в S, и числа транспозиций, равного их числу в P.

Цикл $(\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_\lambda) = (\alpha_1\alpha_2)(\alpha_1\alpha_3) \ldots (\alpha_1\alpha_\lambda)$ может быть записан как произведение $\lambda - 1$ транспозиций. Поэтому перестановка с длинами циклов

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\rho \qquad (\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_\rho = n)$$

может быть записана в виде произведения $\lambda_1 - 1 + \lambda_2 - 1 + \ldots$ $\ldots + \lambda_\rho - 1$ транспозиций. Для всех элементов знакопеременной группы среди чисел $\lambda_\mu - 1$ должно встречаться четное число нечетных чисел, а, следовательно, среди чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\rho$ должно быть четное число четных чисел. Перестановки знакопеременной группы содержат четное число циклов четной длины (циклов с двумя, четырьмя и т. д. элементами).

Фактор-группа знакопеременной группы имеет порядок 2. Исходя из ее двух неприводимых представлений, можно получить два представления полной симметрической группы путем сопоставления матрицы (1) как элементам знакопеременной группы, так и элементам ее смежного класса (нечетным перестановкам) или путем сопоставления матрицы (1) элементам знакопеременной группы и матрицы (-1) элементам ее смежного класса. Первое соответствие дает *тождественное представление* $\mathbf{D}^{(0)}(R) = (1)$, второе — представление $\mathbf{D}(E) = (1)$, $\mathbf{D}(S) = (-1)$, называемое

антисимметричным представлением $\overline{\mathbf{D}}^{(0)}(R) = (\varepsilon_P)$. Как тождественное, так и антисимметричное представления одномерны.

3. Все остальные представления симметрической группы имеют размерность больше единицы. В одномерном представлении транспозиция (1 2) должна соответствовать либо матрице (1), либо (—1), так как квадрат этой матрицы должен быть единичной матрицей (1). Однако в первом случае каждая транспозиция в представлении соответствует (1), а во втором — каждая соответствует (—1), так как все транспозиции находятся в одном и том же классе и должны поэтому иметь один и тот же характер во всяком представлении. Но матрицы, соответствующие транспозициям, определяют все представление, так как все элементы группы можно записать в виде произведения транспозиций. Таким образом, в первом случае должно быть получено тождественное представление, а во втором — антисимметричное.

Абелева фактор-группа знакопеременной группы позволяет установить весьма важное соответствие между парами неприводимых представлений. Если мы рассмотрим неприводимое представление $\mathbf{D}^{(k)}(R)$, то из него можно построить иное представление — присоединенное представление $\overline{\mathbf{D}}^{(k)}(R)$, если оставить все матрицы, соответствующие знакопеременной группе, без изменения, а все остальные умножить на —1. Полученные таким образом матрицы образуют представление группы, так как $\overline{\mathbf{D}}^{(k)}(R)$ есть прямое произведение $\mathbf{D}^{(k)}(R)$ и антисимметричного представления $\overline{\mathbf{D}}^{(0)}(R)$ (которое является одномерным, так что его матрицы представляют собой просто числа):

$$\overline{\mathbf{D}}^{(k)}(R) = \mathbf{D}^{(k)}(R) \times \overline{\mathbf{D}}^{(0)}(R) = \varepsilon_R \mathbf{D}^{(k)}(R).$$

Присоединенные представления играют важную роль как в квантовой механике, так и в теории неприводимых представлений, и мы воспользуемся ими для вывода интересующих нас представлений.

Число различных неприводимых представлений симметрической группы равно числу подразделений числа n. Таково также число существенно различных собственных значений. Однако оказывается, что только собственные значения определенных представлений соответствуют реальным энергетическим уровням в атоме. Собственные значения других представлений не соответствуют существующим в действительности стационарным состояниям, а запрещены принципом, не зависящим от уравнения для собственных значений, принципом Паули. Хотя все неприводимые представления симметрической группы могут быть получены исполь-

зованным здесь методом, проведем вычисления только для тех представлений, собственные значения которых не запрещены принципом Паули. Мы не будем давать здесь точной формулировки этого принципа, но метод, с помощью которого будут определены интересующие нас представления, включает точно те же соображения, которые потребуются позднее для применения принципа Паули.

4. Если мы имеем систему переменных, которые могут принимать лишь одно значение, скажем, 1, то область их изменения содержит лишь одну точку, и каждая функция полностью определяется, когда ее значение в этой точке задано. В этом пространстве никакие две функции не могут быть линейно независимыми; всякая функция постоянна во „всей области изменения" и, следовательно, она кратна любой другой функции. Всякая функция в этом пространстве остается неизменной, если значения координат меняются местами, так как это означает просто замену 1 на 1. Все функции в этом пространстве принадлежат тождественному представлению.

Если мы рассмотрим n переменных $s_1, s_2, \ldots, s_n$, каждая из которых может принимать *два значения*, например $+1$ и -1, то все пространство состоит из 2^n точек, и мы можем иметь 2^n линейно независимых функций, т. е. таких, которые имеют значение 1 в одной из этих 2^n точек и нулевое значение во всех остальных точках. Скалярное произведение двух функций φ и g в этом пространстве равно

$$\sum_{s_1=\pm 1}\sum_{s_2=\pm 1}\ldots\sum_{s_n=\pm 1}\varphi(s_1, \ldots, s_n)^* g(s_1, \ldots, s_n)=(\varphi, g).$$

В пространстве одного s_k (оно состоит только из двух точек $s=+1$ и $s=-1$) две функции $\delta_{s_k,-1}$ и $\delta_{s_k,+1}$ образуют „полную ортогональную систему"; 2^n произведений этих функций $\delta_{s_1\sigma_1}\delta_{s_2\sigma_2}\ldots\delta_{s_n\sigma_n}$ (с $\sigma_1=\pm 1, \sigma_2=\pm 1, \ldots, \sigma_n=\pm 1$) образуют полную ортогональную систему в n-мерном пространстве переменных $s_1, s_2, \ldots, s_n$. Нижеследующие формулы можно записать в более удобном виде, если использовать вместо функций $\delta_{s_k,+1}$ и $\delta_{s_k,-1}$ две функции 1 и s_k, которые ортогональны:

$$(1, s_k)=\sum_{s_k=\pm 1} 1\cdot s_k=1\cdot -1+1\cdot 1=0.$$

Тогда полная система функций в пространстве $s_1, s_2, \ldots, s_n$ состоит из 2^n функций $s_1^{\gamma_1}s_2^{\gamma_2}\ldots s_n^{\gamma_n}$ (причем γ_k равны 0 или 1);

они могут быть расположены следующим образом:

$$
\begin{array}{l}
1, \\
s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_n, \\
s_1s_2,\ s_1s_3,\ \ldots,\ s_1s_n,\ \ s_2s_3,\ s_2s_4,\ \ldots,\ s_2s_n,\ \ldots,\ s_{n-1}s_n, \\
s_1s_2s_3,\ \ldots,\ s_{n-2}s_{n-1}s_n, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
s_1s_2s_3\ \ldots\ s_n.
\end{array}
\tag{13.1}
$$

Имеется[1] $1+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n$ функций. Если оператор $\mathbf{P}_R$, соответствующий перестановке R, применяется к одной из этих функций, то он порождает новую функцию от $s_1, s_2, \ldots, s_n$, которая может быть выражена в виде линейной комбинации этих 2^n функций (как это может быть сделано для любой функции этих переменных). Коэффициенты этого разложения дадут 2^n-мерное представление симметрической группы. Это представление $\Delta(R)$ не является неприводимым, но содержит несколько неприводимых компонент. Поскольку рассматриваемые функции определены в такой узко ограниченной области, можно ожидать, что $\Delta(R)$ не включает все неприводимые представления симметрической группы и что поэтому оно может быть приведено более просто, чем совершенно произвольное представление. Тем не менее *только его неприводимые компоненты и их присоединенные представления являются представлениями, которые нужны* в физических задачах, связанных с *электронами*.

Если оператор $\mathbf{P}_R$ применяется к одной из функций (13.1), например $s_as_bs_c$, где R — произвольная перестановка, т. е. если производится „перестановка переменных", то результат является снова произведением трех s, скажем $s_{a'}s_{b'}s_{c'}$, и, следовательно, функцией, входящей в ту же (третью)[2] строку таблицы (13.1), что и функция $s_as_bs_c$. Если желательно выразить $\binom{n}{k}$ функций, получающихся при применении оператора $\mathbf{P}_R$ ко всем функциям k-й строки (13.1), то потребуются только функции k-й строки. Поэтому эти функции образуют представление $\Delta^{(k)}(R)$ симметрической группы с размерностью $\binom{n}{k}$. Так как каждая функция

---

[1]) Символом $\binom{n}{k}$ мы, как обычно, обозначаем биномиальный коэффициент $\binom{n}{k}=\dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$, который дает число сочетаний из n элементов по k.

[2]) Мы начинаем нумерацию строк (13.1) с нуля; последняя строка является n-й.

k-й строки преобразуется при перестановке в одну из других функций k-й строки, $\Delta^{(k)}(R)$ имеет один элемент в каждой строке, равный 1, и все остальные элементы, равные 0. Поэтому представление $\Delta(R)$ распадается на представления $\Delta^{(0)}(R)$, $\Delta^{(1)}(R), \ldots$ $\ldots, \Delta^{n}(R)$, матрицы которых имеют только что упомянутое свойство. Используя это обстоятельство, мы вычислим теперь след $\Delta^{(k)}(R)$.

След матрицы $\Delta^{(k)}(R)$ равен числу функций k-й строки (13.1), которые остаются неизменными при применении $\mathbf{P}_R$. В столбцах матрицы $\Delta^{(k)}(R)$, соответствующих этим функциям, единицы появляются на главной диагонали; во всех остальных строках они появляются в иных местах, так что на главной диагонали стоят нули. Вычислим теперь это число.

Пусть R является перестановкой с длинами циклов $\lambda_1 = \mu_1$, $\lambda_2 = \mu_2 - \mu_1, \ldots, \lambda_\rho = \mu_\rho - \mu_{\rho-1}$ $(\mu_\rho = n)$, например перестановкой $(1, 2, \ldots, \mu_1)(\mu_1 + 1, \ldots, \mu_2) \ldots (\mu_{\rho-1} + 1, \mu_{\rho-1} + 2, \ldots, \mu_\rho)$. Если она должна оставлять функции $s_1^{\alpha_1} \cdot s_2^{\alpha_2} \ldots s_n^{\alpha_n}$ без изменения, то показатели переменных $s_1, s_2, \ldots, s_{\mu_1}$ должны быть все равны, так же как и показатели переменных $s_{\mu_1+1}, s_{\mu_1+2}, \ldots, s_{\mu_2}$ и т. д., и наконец показатели переменных $s_{\mu_{\rho-1}+1}, s_{\mu_{\rho-1}+2}, \ldots, s_{\mu_\rho} = s_n$ должны быть все равны. Поэтому из всех возможных функций при применении $\mathbf{P}_R$ не будут меняться те, которые можно записать в виде

$$(s_1 s_2 \ldots s_{\mu_1})^{\gamma_1} (s_{\mu_1+1} s_{\mu_1+2} \ldots s_{\mu_2})^{\gamma_2} \ldots (s_{\mu_{\rho-1}+1} \ldots s_{\mu_\rho})^{\gamma_\rho} \quad (13.2)$$

(все γ_k равны 0 или 1). Нас интересует число функций k-й строки таблицы (13.1), имеющих вид (13.2). Так как эти функции находятся к k-й строке, должно иметь место соотношение

$$\mu_1\gamma_1 + (\mu_2 - \mu_1)\gamma_2 + \ldots + (\mu_\rho - \mu_{\rho-1})\gamma_\rho = \\ = \lambda_1\gamma_1 + \lambda_2\gamma_2 + \ldots + \lambda_\rho\gamma_\rho = k. \quad (13.3)$$

Следовательно, имеется столько таких функций, сколько уравнение (13.3) имеет решений, в которых неизвестные $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\rho$ принимают только значения 0 и 1. Это след R в $\Delta^k(R)$, а также след всякой другой перестановки, имеющей длины циклов $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\rho$, поскольку они все входят в один класс и поэтому имеют одинаковые следы. Полное число решений (13.3) при заданном k равно коэффициенту при x^k в полиноме

$$(1 + x^{\lambda_1})(1 + x^{\lambda_2}) \ldots (1 + x^{\lambda_\rho}), \qquad (\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_\rho = n), \quad (13.4)$$

так как этот коэффициент есть как раз полное число способов, которыми можно получить k, складывая показатели степени x

отдельных множителей (с коэффициентами 1 или 0). Следовательно, *коэффициент при k-й степени x в многочлене (13.4) является следом матрицы $\Delta^{(k)}(R)$.*

След $\Delta^{(k)}(E)$ должен быть равен размерности $\binom{n}{k}$ этого представления. Так как для E все длины циклов равны 1, $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots$ $\ldots = \lambda_\rho = 1$, то выражение (13.4) равно $(1+x)^n$ и тогда коэффициент при x^k действительно равен $\binom{n}{k}$. След матрицы, соответствующей транспозиции $(1\ 2)\cdot(3)\cdot(4)\ldots(n)$ является коэффициентом при x^k в выражении

$$(1+x^2)(1+x)\ldots(1+x) = (1+x^2)(1+x)^{n-2}.$$

Произведя вычисления, находим, что он равен

$$\sum_{\varkappa} \Delta^{(k)}(R)_{\varkappa\varkappa} = \binom{n-2}{k} + \binom{n-2}{k-2}.$$

Ясно, что $\Delta^{(k)}(R)$ не является неприводимым представлением, так как линейные комбинации, преобразующиеся при применении оператора P_R в соответствии с $\Delta^{(k-1)}(R)$, могут быть образованы из $\binom{n}{k}$ функций k-й строки таблицы (13.1), что было бы невозможно в неприводимом представлении.

Особенно простой пример линейной комбинации функций k-й строки можно использовать для доказательства приводимости матриц $\Delta^{(k)}(R)$. Этим примером является сумма всех функций k-й строки. Ясно, что эта сумма преобразуется сама в себя при всякой перестановке. Поэтому линейная комбинация функций k-й строки, приводящая к $\binom{n}{k}$ новым функциям, из которых эта сумма является первой, вызовет такое преобразование подобия матриц $\Delta^{(k)}(R)$, что они все должны иметь вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{A} \end{pmatrix}.$$

Но представление, которое можно привести к этому виду с помощью преобразования подобия, по определению является приводимым.

Линейными комбинациями функций k-й строки (13.1), которые преобразуются как функции $s_{a_1}, s_{a_2}, \ldots, s_{a_{k-1}}$ $(k-1)$-й строки, будут

$$F_{a_1 a_2 \ldots a_{k-1}} = s_{a_1 a_2 \ldots a_{k-1}} s_{a_1} s_{a_2} \ldots s_{a_{k-1}}, \tag{13.5}$$

где $s_{a_1 a_2 \ldots a_{k-1}}$ означает сумму всех $n-k+1$ переменных, которые не встречаются среди $s_{a_1}, s_{a_2}, \ldots, s_{a_{k-1}}$. При применении P_R к функции s_{a_i} она преобразуется в s_{b_i}. Таким образом, $s_{a_1}, s_{a_2}, \ldots, s_{a_{k-1}}$ преобразуется в $s_{b_1}, s_{b_2}, \ldots, s_{b_{k-1}}$. Величина s_c *не* являющаяся одной из переменных $s_{a_1}, s_{a_2}, \ldots, s_{a_{k-1}}$, преобра-

зуется в одну из переменных s_d, отличную от всех s_b, в которые преобразуются s_a. Поэтому *сумма* всех $n-k+1$ переменных s, не встречающихся среди $s_{a_1}, s_{a_2}, \ldots, s_{a_{k-1}}$, преобразуется в сумму всех $n-k+1$ переменных, которые не встречаются среди переменных s_b. Это значит, что $s_{a_1 a_2 \ldots a_{k-1}}$ преобразуется в $s_{b_1 b_2 \ldots b_{k-1}}$. Поэтому и величины $F_{a_1 a_2 \ldots a_{k-1}}$ действительно преобразуются точно так же, как произведение $s_{a_1}, s_{a_2}, \ldots, s_{a_{k-1}}$ $(k-1)$-й строки.

В приложении к настоящей главе мы покажем, что при $k \leqslant \frac{1}{2} n$ $\binom{n}{k-1}$ функций $F_{a_1 a_2 \ldots a_{k-1}}$ образуют линейно независимую систему. Поэтому можно выбрать такие линейные комбинации этих функций $F_1, F_2, \ldots, F_{\binom{n}{k-1}}$, которые ортогональны, а также линейно независимы. Чтобы завершить построение полной системы $\binom{n}{k}$ функций, из $\binom{n}{k}$ функций $s_{a_1}, s_{a_2}, \ldots, s_{a_k}$ $\left(\text{когда } k \leqslant \frac{1}{2} n\right)$ можно образовать

$$l_k = \binom{n}{k} - \binom{n}{k-1} \tag{13.6}$$

линейных комбинаций [1]) $g_1, g_2, \ldots, g_{l_k}$, которые вместе с функциями $F_\varkappa$ образуют полную ортогональную систему. Тогда все функции $s_{a_1} s_{a_2} s_{a_3} \ldots s_{a_k}$ можно выразить через функции этой системы и, наоборот. Поэтому представление $\Delta^{(k)}(R)$ будет рассматриваться в виде $\overline{\Delta}^{(k)}(R)$, который оно принимает после введения этой полной системы $F_1, F_2, \ldots, F_{\binom{n}{k-1}}, g_1, g_2, \ldots, g_{l_k}$ вместо системы $s_{a_1}, s_{a_2}, s_{a_3}, \ldots, s_{a_k}$; эта подстановка осуществляет лишь преобразование подобия матриц $\Delta^{(k)}(R)$.

Поскольку каждая функция $F_\varkappa$ является линейной комбинацией функций $F_{a_1 a_2 \ldots a_{k-1}}$, функции $\mathsf{P}_R F_\varkappa$ являются линейными комбинациями функций $\mathsf{P}_R F_{a_1 a_2 \ldots a_{k-1}}$ и, следовательно, функций $F_{a_1 a_2 \ldots a_{k-1}}$ или функций $F_\varkappa$, т. е.

$$\mathsf{P}_R F_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{\binom{n}{k-1}} \overline{\Delta}^{(k-1)}(R)_{\lambda\varkappa} F_\lambda. \tag{13.7}$$

Мы обозначили здесь коэффициенты через $\overline{\Delta}^{(k-1)}(R)$, так как они образуют представление, эквивалентное представлению $\Delta^{(k-1)}(R)$.

---

[1]) Одним из примеров такой функции является $(s_1 - s_2)(s_3 - s_4) \ldots \ldots (s_{2k-1} - s_{2k})$.

Функции $g_\varkappa$ в (13.7) все имеют нулевые коэффициенты; следовательно, $\bar{\Delta}^{(k)}(R)$ имеет вид

$$\bar{\Delta}^{(k)}(R)=\begin{pmatrix} \bar{\Delta}^{(k-1)}(R) & \mathbf{A}(R) \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}^{(k)}(R) \end{pmatrix}.$$

Кроме того, полная система $F_1, F_2, \ldots, F_{\binom{n}{k-1}}, g_1, g_2, \ldots, g_{l_k}$ ортогональна; поэтому матрицы $\bar{\Delta}^{(k)}(R)$ унитарны:

$$\bar{\Delta}^{(k)}(R)=\bar{\Delta}^{(k)}(R^{-1})^{\dagger}.$$

Это значит, что

$$\begin{pmatrix} \bar{\Delta}^{(k-1)}(R) & \mathbf{A}(R) \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}^{(k)}(R) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \bar{\Delta}^{(k-1)}(R^{-1}) & \mathbf{A}(R^{-1}) \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}^{(k)}(R^{-1}) \end{pmatrix}^{\dagger}=$$

$$=\begin{pmatrix} \bar{\Delta}^{(k-1)}(R^{-1})^{\dagger} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}(R^{-1})^{\dagger} & \mathbf{D}^{(k)}(R^{-1})^{\dagger} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $\mathbf{A}(R)=\mathbf{0}$, и

$$\bar{\Delta}^{(k)}(R)=\begin{pmatrix} \bar{\Delta}^{(k-1)}(R) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}^{(k)}(R) \end{pmatrix}. \tag{13.8}$$

Следовательно, при $k\leqslant\frac{1}{2}n$ представление $\Delta^{(k)}(R)$ распадается на два представления, $\bar{\Delta}^{(k-1)}(R)$ и $\mathbf{D}^{(k)}(R)$, с размерностями $\binom{n}{k-1}$ и $l_k=\binom{n}{k}-\binom{n}{k-1}$, причем первое из них эквивалентно представлению $\Delta^{(k-1)}(R)$. Далее, $\bar{\Delta}^{(k-1)}(R)$ может быть разбито на два представления, $\bar{\Delta}^{(k-2)}(R)$ и $\mathbf{D}^{(k-1)}(R)$; затем $\bar{\Delta}^{(k-2)}$ может быть снова разбито на два и т. д. В конечном счете $\bar{\Delta}^{(k)}$ разлагается на $\mathbf{D}^{(0)}+\mathbf{D}^{(1)}+\ldots+\mathbf{D}^{(k)}$. Функция k-й строки таблицы (13.1), которая преобразуется с помощью $\mathbf{D}^{(0)}$ (т. е. инвариантна), являлась ранее суммой всех функций k-й строки.

Это имеет место при $k\leqslant\frac{1}{2}n$. При $k>\frac{1}{2}n$ все $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$ функций, в которых $n-k$ переменных встречаются в первой степени, а k переменных — в нулевой, преобразуются точно так же, как рассмотренные выше функции (в которых те же $n-k$ переменных оказывались в нулевой степени и те же k переменных — в первой). Конкретный выбор ортогональной системы функций s не играет никакой роли. Вместо 1, s можно было бы использовать s, 1. Поэтому $\Delta^{(k)}$ эквивалентно представлению $\Delta^{(n-k)}$ и

может быть разложено на те же самые компоненты. Таким образом, разложение матриц $\Delta(R)$ принимает при четных n следующий вид (при $n=4$):

$$\Delta(R)=\begin{cases}\Delta^{(0)}(R)=\mathbf{D}^{(0)} & =\mathbf{D}^{(0)},\\ \Delta^{(1)}(R)=\Delta^{(0)}+\mathbf{D}^{(1)} & =\mathbf{D}^{(0)}+\mathbf{D}^{(1)},\\ \Delta^{(2)}(R)=\Delta^{(1)}+\mathbf{D}^{(2)} & =\mathbf{D}^{(0)}+\mathbf{D}^{(1)}+\mathbf{D}^{(2)},\\ \Delta^{(3)}(R)\sim\Delta^{(1)} & =\mathbf{D}^{(0)}+\mathbf{D}^{(1)},\\ \Delta^{(4)}(R)\sim\Delta^{(0)} & =\mathbf{D}^{(0)},\end{cases}$$

а при нечетных n (например, при $n=5$)

$$\Delta(R)=\begin{cases}\Delta^{(0)}(R)=\mathbf{D}^{(0)} & =\mathbf{D}^{(0)},\\ \Delta^{(1)}(R)=\Delta^{(0)}+\mathbf{D}^{(1)} & =\mathbf{D}^{(0)}+\mathbf{D}^{(1)},\\ \Delta^{(2)}(R)=\Delta^{(1)}+\mathbf{D}^{(2)} & =\mathbf{D}^{(0)}+\mathbf{D}^{(1)}+\mathbf{D}^{(2)},\\ \Delta^{(3)}(R)\sim\Delta^{(2)} & =\mathbf{D}^{(0)}+\mathbf{D}^{(1)}+\mathbf{D}^{(2)},\\ \Delta^{(4)}(R)\sim\Delta^{(1)} & =\mathbf{D}^{(0)}+\mathbf{D}^{(1)},\\ \Delta^{(5)}(R)\sim\Delta^{(0)} & =\mathbf{D}^{(0)}.\end{cases}$$

Покажем, что полученные выше представления $\mathbf{D}^{(0)}$, $\mathbf{D}^{(1)}$, ..., $\mathbf{D}^{\left(\frac{1}{2}n\right)}$ $\left(\text{или } \mathbf{D}^{\left(\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}\right)}\right)$ неприводимы и различны. Доказательство будем проводить методом индукции. Предположим, что представления, полученные тем же путем для симметрической группы $(n-1)$-й степени, ${}'\mathbf{D}^{(0)}(R')$, ..., ${}'\mathbf{D}^{(k)}(R')$ $\left[k\leqslant\frac{1}{2}(n-1)\right]$ неприводимы и различны, и примем, что их размерности [1]) равны $l'_k=\binom{n-1}{k}-\binom{n-1}{k-1}$.

Главный момент доказательства состоит в том, что $\mathbf{D}^{(k)}$, рассматриваемое только для тех R', которые не затрагивают s_n, является представлением симметрической группы $(n-1)$-й степени и что его неприводимыми частями являются ${}'\mathbf{D}^{(k-1)}$ и ${}'\mathbf{D}^{(k)}$. Отсюда и следует неприводимость и различие представлений $\mathbf{D}^{(k)}$.

5. Функции g_1, ..., g_{l_k}, будучи линейными относительно переменных s_n, могут быть представлены в виде сумм

$$g_\varkappa=g'_\varkappa s_n+h'_\varkappa \tag{13.9}$$

[1]) Штрихованные переменные всегда относятся к симметрической группе $(n-1)$-й степени или к функциям $n-1$ переменных $s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}$.

таким образом, что s_n встречается в нулевой степени как в $g'_\varkappa$, так и в $h'_\varkappa$; тогда $g'_\varkappa$ и $h'_\varkappa$ могут рассматриваться как функции только переменных $s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}$; $g'_\varkappa$ имеет $(k-1)$-ю степень, а $h'_\varkappa$ — k-ю степень.

Может оказаться возможным образовать линейные комбинации функций $g_\varkappa$, не содержащих членов, пропорциональных s_n. Если имеются l'' таких линейно независимых линейных комбинаций, они могут быть ортогонализованы методом Шмидта; обозначим их через $\bar{g}_{0\varkappa}$:

$$\bar{g}_{0\varkappa} = \bar{h}'_{0\varkappa} \qquad (\text{при } \varkappa = 1, 2, \ldots, l''). \tag{13.9а}$$

Все штрихованные функции не будут зависеть от s_n. Естественно, что l'' могло бы оказаться нулем, но в дальнейшем выяснится, что в общем случае это не так. Остальные $g_\varkappa$ могут быть затем сделаны ортогональными $\bar{g}_{0\varkappa}$ и между собой, так что

$$\bar{g}_{1\varkappa} = \bar{g}'_{1\varkappa} s_n + \bar{h}'_{1\varkappa} \qquad (\text{при } \varkappa = 1, 2, \ldots, l_k - l''). \tag{13.9б}$$

Полученные таким способом функции $\bar{g}'_{1\varkappa}$ линейно независимы. В противном случае можно было бы получить иные функции $\bar{g}$, не содержащие s_n. Представление симметрической группы, применимое к $\bar{g}$, будет эквивалентным представлению $\mathbf{D}^{(k)}$, так как все $\bar{g}$ являются линейными комбинациями функций g. Оно будет унитарным, так как $\bar{g}$ ортогональны. Исследуем поведение функций $\bar{g}_{0\varkappa}$, $\bar{g}_{1\varkappa}$ при перестановках $\mathbf{P}_{R'}$, оставляющих s_n неизменной. Эти перестановки образуют группу, изоморфную симметрической группе степени $n-1$. При этом оказывается, что $\bar{g}_{0\varkappa}$ принадлежат представлению $'\mathbf{D}^{(k)}$ этой группы, а $\bar{g}_{1\varkappa}$ — представлению $'\mathbf{D}^{(k-1)}$. Заметим, что сумма размерностей этих двух представлений равна l_k:

$$l'_k + l'_{k-1} = \binom{n-1}{k} - \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k-1} - \binom{n-1}{k-2} =$$
$$= \binom{n}{k} - \binom{n}{k-1} = l_k. \tag{13.10}$$

Как только это установлено, неприводимость $\mathbf{D}^{(k)}$ будет простым следствием этого.

Рассмотрим сначала функции $\bar{g}_{1\varkappa}$. Каждая $\bar{g}_{1\varkappa}$ ортогональна всем функциям $F_{a_1 a_2 \ldots a_{k-1}}$, и в частности функции

$$F_{a_1 a_2 \ldots a_{k-2} n} = s_{a_1} s_{a_2} \ldots s_{a_{k-2}} s_n s_{a_1 a_2 \ldots a_{k-2} n}.$$

Так как $\bar{h}'_{1\varkappa}$ содержит s_n в нулевой степени, эта функция ортогональна также $F_{a_1a_2\ldots a_{k-2}n}$; следовательно, тем же свойством обладает и $\bar{g}'_{1\varkappa}s_n$. Поэтому $\bar{g}'_{1\varkappa}$ ортогональна всякой функции $s_{a_1}s_{a_2}\ldots s_{a_{k-2}}s_{a_1a_2\ldots a_{k-2}n}$. Но эта ортогональность является определением l'_{k-1} функций $s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}$ степени $k-1$, преобразующихся при перестановке этих переменных в соответствии с представлением $'\mathbf{D}^{(k-1)}$, которое неприводимо по предположению. Так как имеется только l'_{k-1} функций $s_1, s_2, \ldots, s_{a-1}$ степени $k-1$, обладающих этим свойством (или ортогональных $s_{a_1}s_{a_2}\ldots s_{a_{k-2}}s_{a_1a_2\ldots a_{k-2}n}$), не может существовать более l'_{k-1} функций $\bar{g}_{1\varkappa}$. Действительно, имеется в точности l'_{k-1} таких функций, и они преобразуются при тех перестановках R', которые оставляют s_n неизменным, в соответствии с $'\mathbf{D}^{(k-1)}$. Чтобы убедиться в этом, применим $\mathbf{P}_{R'}$ к (13.9б) и, так как эта перестановка не затрагивает s_n, получим

$$\mathbf{P}_{R'}\bar{g}_{1\varkappa}=s_n\mathbf{P}_{R'}\bar{g}'_{1\varkappa}+\mathbf{P}_{R'}\bar{h}'_{1\varkappa}. \tag{13.11}$$

Когда эти функции выражены в виде линейных комбинаций функций $\bar{g}_{0\varkappa}$ и $\bar{g}_{1\varkappa}$, сравнение коэффициентов при s_n показывает, что $\mathbf{P}_{R'}\bar{g}_{1\varkappa}$ являются линейными комбинациями самих $\bar{g}'_{1\varkappa}$. Поскольку функции $\bar{g}'_{1\varkappa}$ принадлежат неприводимому представлению $'\mathbf{D}^{(k-1)}$, это возможно только в том случае, если имеется либо l'_{k-1} линейно независимых функций $\bar{g}'_{1\varkappa}$, либо ни одной. Последняя возможность может быть исключена, так как в этом случае все $\bar{g}$, а следовательно, и все g, не зависели бы от s_n. Так как n не играет какой-либо особой роли по сравнению с другими индексами при выборе g, это невозможно. Поэтому мы имеем

$$\mathbf{P}_{R'}\bar{g}'_{1\varkappa}=\sum_{\lambda=1}^{l'_{k-1}}{}'D^{(k-1)}(R')_{\lambda\varkappa}\bar{g}'_{1\lambda} \qquad (\varkappa=1,\ 2,\ \ldots,\ l'_{k-1}) \tag{13.11а}$$

и $l_k-l''=l'_{k-1}$. Если $l_k=l'_{k-1}$, то не существует функций типа (13.9а), т. е. в этом случае все $g'_\varkappa$ в (13.9) линейно независимы. Однако, как это будет показано позднее, $l_k=l'_{k-1}$ только при $k=\frac{1}{2}n$.

Если $l_k>l'_k$, рассмотрим функции (13.9а). Любая перестановка R' первых $n-1$ переменных в $\bar{g}_{0\varkappa}=\bar{h}'_{0\varkappa}$ из (13.9а) снова приводит к функции, не зависящей от s_n. Следовательно, если

функции $\mathsf{P}_{R'}\bar{g}_{0\varkappa}$ выражены через $\bar{g}$, коэффициент при $\bar{g}_{1\lambda}$ должен обращаться в нуль. Поскольку функции $\bar{g}'_{1\lambda}$ линейно независимы, линейная комбинация функций $\bar{g}_{1\lambda}$ из (13.9б) может быть независимой от s_n только в том случае, если коэффициенты каждой из этих функций обращаются в нуль. Значит $\mathsf{P}_{R'}\bar{g}_{0\varkappa}$ являются линейными комбинациями одних только $\bar{g}_{0\varkappa}$; эти функции принадлежат представлению симметрической группы степени $n-1$, состоящей из операторов перестановок $\mathsf{P}_{R'}$, оставляющих s_n неизменной. Чтобы найти это представление, заметим, что функции $g_\varkappa$, а следовательно, и $\bar{g}_{0\varkappa}$, ортогональны всем $F_{a_1a_2\ldots a_{k-1}}$. Рассмотрим в этом случае те F, индексы которых не содержат n. Они могут быть записаны в виде

$$F_{a_1a_2\ldots a_{k-1}} = s_{a_1}s_{a_2}\ldots s_{a_{k-1}}\left(s_{a_1a_2\ldots a_{k-1}n}+s_n\right).$$

В $\bar{g}_{0\varkappa}$ функция s_n входит в нулевой степени. Поэтому она ортогональна $s_{a_1}s_{a_2}\ldots s_{a_{k-1}}s_n$ и должна быть также ортогональна $s_{a_1}s_{a_2}\ldots s_{a_{k-1}}s_{a_1a_2\ldots a_{k-1}n}$. Она имеет степень k. Но это является как раз определением функций от $s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}$, принадлежащих представлению $'\mathbf{D}^{(k)}$ (это представление также неприводимо по предположению). Поэтому функции $\bar{g}_{0\varkappa}$ должны принадлежать представлению группы операторов $\mathsf{P}_{R'}$, и для $\varkappa = 1, 2, \ldots, l'' = l'_k$ имеем

$$\mathsf{P}_{R'}\bar{g}_{0\varkappa} = \sum_{\lambda=1}^{l'_k} {}'D^{(k)}(R')_{\lambda\varkappa}\,\bar{g}_{0\lambda}. \tag{13.11б}$$

Соотношения (13.11а) и (13.11б) позволяют найти матрицы представления $\mathbf{D}^{(k)}(R)$, по крайней мере, для тех $R = R'$, которые оставляют s_n неизменной. Искомые выражения упрощаются, если нумерация строк и столбцов матриц $\mathbf{D}^{(k)}$ соответствует нумерации функций $\bar{g}$ из (13.9а) и (13.9б):

$$\mathsf{P}_R\bar{g}_{0\varkappa} = \sum_{\lambda=1}^{l'_k} D^{(k)}(R)_{0\lambda;\,0\varkappa}\,\bar{g}_{0\lambda} + \sum_{\lambda=1}^{l'_{k-1}} D^{(k)}(R)_{1\lambda;\,0\varkappa}\,\bar{g}_{1\lambda}, \tag{13.12а}$$

$$\mathsf{P}_R\bar{g}_{1\varkappa} = \sum_{\lambda=1}^{l'_k} D^{(k)}(R)_{0\lambda;\,1\varkappa}\,\bar{g}_{0\lambda} + \sum_{\lambda=1}^{l'_{k-1}} D^{(k)}(R)_{1\lambda;\,1\varkappa}\left(\bar{g}'_{1\lambda}s_n + \bar{h}'_{1\lambda}\right). \tag{13.12б}$$

Тогда $\mathbf{D}^{(k)}$ является суперматрицей

$$\mathbf{D}^{(k)}(R) = \begin{pmatrix} \mathbf{D}^{(k)}_{00}(R) & \mathbf{D}^{(k)}_{01}(R) \\ \mathbf{D}^{(k)}_{10}(R) & \mathbf{D}^{(k)}_{11}(R) \end{pmatrix}. \tag{13.12}$$

При тех $R=R'$, которые оставляют s_n неизменной, сравнение (13.12а) с (13.11б) в силу линейной независимости всех $\bar{g}$ дает

$$D^{(k)}(R')_{0\lambda;\,0\varkappa}={}'D^{(k)}(R')_{\lambda\varkappa},\quad D^{(k)}(R')_{1\lambda;\,0\varkappa}=0. \qquad (13.13а)$$

Так как $\mathsf{P}_{R'}$ не затрагивает s_n, то для сравнения (13.11а) с (13.12б) первое из этих выражений можно подставить в выражение для $\mathsf{P}_{R'}\bar{g}_{1\varkappa}$, получающееся из (13.9б):

$$\mathsf{P}_{R'}\bar{g}_{1\varkappa}=s_n\mathsf{P}_{R'}\bar{g}'_{1\varkappa}+\mathsf{P}_{R'}\bar{h}'_{1\varkappa}=\sum_{\lambda=1}^{l'_{k-1}}{}'D^{(k-1)}(R')_{\lambda\varkappa}\,\bar{g}'_{1\lambda}s_n+\mathsf{P}_{R'}\bar{h}'_{1\varkappa}.$$

Так как все $\bar{g}'_{1\lambda}s_n$ линейно независимы и ортогональны всем $\bar{g}_{0\lambda}$, $\bar{h}'_{1\lambda}$ и $\mathsf{P}_{R'}\bar{h}'_{1\varkappa}$ (содержащим s_n в нулевой степени), сравнение последнего соотношения с (13.12б) дает

$$D^{(k)}(R')_{1\lambda;\,1\varkappa}={}'D^{(k-1)}(R')_{\lambda\varkappa}. \qquad (13.13б)$$

Поэтому для тех R', которые не затрагивают s_n,

$$\mathbf{D}^{(k)}(R')=\begin{pmatrix}{}'\mathbf{D}^{(k)}(R') & \mathbf{0}\\ \mathbf{B}(R') & {}'\mathbf{D}^{(k-1)}(R')\end{pmatrix},$$

где $\mathbf{B}(R')$ пока что неизвестно. Однако матрицы $\mathbf{D}^{(k)}$ унитарны, поскольку $\bar{g}$ ортогональны, так что $\mathbf{B}(R')$ должно обращаться в нуль. Отсюда вытекает, что представление $\mathbf{D}^{(k)}(R)$, рассматриваемое как представление симметрической группы $(n-1)$-й степени, распадается на две различные неприводимые компоненты (кроме случая, когда $l_k=l'_{k-1}$). Матрицы, соответствующие перестановкам R', оставляющим s_n без изменения, имеют вид

$$\mathbf{D}^{(k)}(R')=\begin{pmatrix}{}'\mathbf{D}^{(k)}(R') & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & {}'\mathrm{D}^{(k-1)}(R')\end{pmatrix}. \qquad (13.13)$$

Теперь мы можем рассмотреть и случай $l_k=l'_{k-1}$. Это может иметь место только при $k=\frac{1}{2}n$. Это следует проще всего из тождества (13.10), согласно которому

$$l_k-l'_{k-1}=\binom{n-1}{k}-\binom{n-1}{k-1};$$

но это выражение может быть равно нулю только при $k+(k-1)=n-1$. Исключительность этого случая можно было бы предвидеть, так как ${}'\mathbf{D}^{(k)}$ определено только при $k\leqslant\frac{1}{2}(n-1)$, а это

неравенство не выполняется при $k=\frac{1}{2}n$. Однако неприводимость матриц $\mathbf{D}^{(k)}$ в этом случае следует сразу; вместо (13.13) при этом можно написать равенство $\mathbf{D}^{(k)}(R')={}'\mathbf{D}^{(k-1)}(R')$. Таким образом, $\mathbf{D}^{\left(\frac{1}{2}n\right)}(R)$ неприводимо в силу того обстоятельства, что матрицы, соответствующие подгруппе, оставляющей s_n неизменной, уже являются неприводимыми.

В общем случае рассмотрим матрицу

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{M}_2 \\ \mathbf{M}_3 & \mathbf{M}_4 \end{pmatrix}, \tag{13.14}$$

коммутирующую со всеми $\mathbf{D}^{(k)}(R)$. Пусть подразделение строк и столбцов в (13.14) будет тем же, что и в (13.13). В частности, (13.14) должна также коммутировать с ${}'\mathbf{D}^{(k)}(R')$ из (13.13):

$$\begin{pmatrix} {}'\mathbf{D}^{(k)}(R') & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}'\mathbf{D}^{(k-1)}(R') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{M}_2 \\ \mathbf{M}_3 & \mathbf{M}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{M}_2 \\ \mathbf{M}_3 & \mathbf{M}_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}'\mathbf{D}^{(k)}(R') & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}'\mathbf{D}^{(k-1)}(R') \end{pmatrix}.$$

Поэтому для всех матриц неприводимых представлений ${}'\mathbf{D}^{(k-1)}(R')$ или ${}'\mathbf{D}^{(k)}(R')$ симметрической группы $(n-1)$-й степени, изоморфной перестановкам величин $s_1, \ldots, s_{n-1}$, должны выполняться следующие соотношения:

$$\begin{aligned} {}'\mathbf{D}^{(k)}(R')\,\mathbf{M}_1 &= \mathbf{M}_1\,{}'\mathbf{D}^{(k)}(R'), \\ {}'\mathbf{D}^{(k)}(R')\,\mathbf{M}_2 &= \mathbf{M}_2\,{}'\mathbf{D}^{(k-1)}(R'), \\ {}'\mathbf{D}^{(k-1)}(R')\,\mathbf{M}_3 &= \mathbf{M}_3\,{}'\mathbf{D}^{(k)}(R'), \\ {}'\mathbf{D}^{(k-1)}(R')\,\mathbf{M}_4 &= \mathbf{M}_4\,{}'\mathbf{D}^{(k-1)}(R'). \end{aligned}$$

Но отсюда, согласно теоремам 2 и 3 гл. 9, следует, что $\mathbf{M}_2$ и $\mathbf{M}_3$ должны быть нулевыми матрицами, а $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{M}_4$ — кратными единичной матрице. Тогда, в силу одной лишь коммутативности с (13.13), (13.14) должна иметь вид

$$\begin{pmatrix} m_1\mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & m_4\mathbf{1} \end{pmatrix}. \tag{13.14a}$$

Рассмотрим далее перестановку R, которая не оставляет величину s_n неизменной, а преобразует ее в другую s_i, встречающуюся в первой степени в какой-либо функции $\overline{h}'_{0\alpha}$. В линейном представлении функций $\mathsf{P}_R\overline{h}'_{0\alpha}$ должна быть использована по крайней мере

одна из функций $\overline{g}_{1x}$. Поэтому, если мы запишем $\mathbf{D}^{(k)}(R)$ в виде

$$\mathbf{D}^{(k)}(R)=\begin{pmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{B}\\ \mathbf{C} & \mathbf{D}\end{pmatrix}, \tag{13.14б}$$

где $\mathbf{C}$ наверняка не является нулевой матрицей. Тогда (13.14а) может коммутировать с (13.14б) только в том случае, если $m_1=m_4$, так что (13.14а) является постоянной матрицей. Но это является достаточным условием неприводимости $\mathbf{D}^{(k)}(R)$, которая тем самым установлена.

В том, что представления $\mathbf{D}^{(0)}$, $\mathbf{D}^{(1)}$, ..., $\mathbf{D}^{\left(\frac{1}{2}n\right)}\left(\text{или } \mathbf{D}^{\left(\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}\right)}\right)$ все различны, можно убедиться с помощью (13.13); матрицы для перестановок R' величин s_1, s_2, ..., s_{n-1} не эквивалентны во всех этих представлениях. Поэтому и сами представления должны быть неэквивалентными.

6. Нам еще остается вычислить характер $\chi^{(k)}(R)$ неприводимого представления $\mathbf{D}^{(k)}(R)$. Так как $\Delta^{(k)}(R)$ может быть преобразовано таким образом, что

$$\Delta^{(k)}(R)=\begin{pmatrix}\Delta^{(k-1)}(R) & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{D}^{(k)}(R)\end{pmatrix}, \tag{13.8}$$

то $\chi^{(k)}(R)$ равно разности характеров матриц $\Delta^{(k)}(R)$ и $\Delta^{(k-1)}(R)$. Согласно (13.4), характер матрицы $\Delta^{(k)}(R)$ равен коэффициенту при x^k многочлена $\left(k\leqslant\frac{1}{2}n\right)$

$$(1+x^{\lambda_1})(1+x^{\lambda_2})\ldots(1+x^{\lambda_\rho}),\quad (\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_\rho=n). \tag{13.14}$$

Характер матрицы $\Delta^{(k-1)}(R)$ равен коэффициенту при x^{k-1} в этом выражении или коэффициенту при x^k в произведении (13.4) на x; характер $\chi^{(k)}(R)$ дается разностью этих двух коэффициентов, т. е. коэффициентом при x^k в выражении

$$(1-x)(1+x^{\lambda_1})(1+x^{\lambda_2})\ldots(1+x^{\lambda_\rho})=\sum x^k\chi^k(R), \tag{13.15}$$

где λ_1, λ_2, ..., λ_ρ — длины циклов перестановки R.

Для присоединенных представлений $\overline{\mathbf{D}}^{(k)}(R)$ применимо то же самое выражение с тем же или с противоположным знаком в зависимости от того, является ли перестановка R четной или нечетной, т. е. в зависимости от того, четно или нечетно число $\lambda_1-1+\lambda_2-1+\ldots+\lambda_\rho-1=n-\rho$. Характер $\overline{\chi}^{(k)}(R)$ равен коэффициенту при x^k в выражении

$$(-1)^{n-\rho}(1-x)(1+x^{\lambda_1})(1+x^{\lambda_2})\ldots(1+x^{\lambda_\rho})=\sum_k x^k\overline{\chi}^{(k)}(R). \tag{13.15а}$$

Представление $\mathbf{D}^{(0)}(R)$ является тождественным, а $\bar{\mathbf{D}}^{(0)}(R)$ — антисимметричным.

Как уже упоминалось выше, предшествующее рассмотрение дает не все неприводимые представления симметрической группы, а лишь те, которые играют роль в атомной спектроскопии. В математической теории неприводимых представлений (основоположниками этой теории были А. Юнг и Г. Фробениус) отдельные представления соответствуют не определенным индексам k, а различным разбиениям числа n на положительные целые слагаемые, полное число которых равно числу всех неприводимых представлений. Представления $\mathbf{D}^{(k)}(R)$ соответствуют разделению n на два слагаемых $(n-k)+k$ $\left(\text{в силу ограничения } n-k \geqslant k \text{ имеем } k \leqslant \frac{1}{2}n\right)$; представления $\bar{\mathbf{D}}^{(k)}(R)$ соответствуют разбиению n на суммы единиц и двоек, $2+2+\ldots+2+1+1+1=n$, где имеется $n-2k$ единиц и k двоек.

То обстоятельство, что собственные функции, осуществляющиеся в природе, преобразуются, согласно этим представлениям, при перестановках координат электронов, связано с тем фактом, что спин электрона во внешнем магнитном поле может иметь лишь две различные ориентации. Если возможны три ориентации (как, например, в случае ядра азота, спин которого равен единице), появляются также представления, соответствующие разбиению числа n на три слагаемых, а также их присоединенные представления, соответствующие разбиению n на суммы чисел 1, 2 и 3. Наоборот, если возможно только одно квантованное направление (например, для ядра гелия, спин которого равен нулю), то в физических задачах могут встречаться только симметричные представления, соответствующие разбиению n на одно слагаемое $n=n$, а также антисимметричные представления, соответствующие разбиению этого числа на одни единицы, $n=1+1+\ldots+1$.

Сравним результаты этой главы с неприводимыми представлениями (7.E.1), (9.E.1) и (9.E.3) симметрической группы третьей степени, данными на стр. 100 и 101. Представление одной лишь матрицей (1) является тождественным представлением $\mathbf{D}^{(0)}(R)$ $(n=3+0)$; его присоединенное представление есть антисимметричное представление $\bar{\mathbf{D}}^{(0)}(R)$ $(n=1+1+1)$. Третьим представлением является $\mathbf{D}^{(1)}(R)$ $(n=2+1)$; его присоединенное представление есть $\bar{\mathbf{D}}^{(1)}(R)$ $(n=2+1)$, причем последние два представления эквивалентны.

Для симметрической группы четвертой степени имеем представления:

$\mathbf{D}^{(0)}(R)$ $(n=4)$ и $\bar{\mathbf{D}}^{(0)}(R)$ $(n=1+1+1+1)$, размерности $\binom{4}{0}-\binom{4}{-1}=1$,

$\mathbf{D}^{(1)}(R)$ $(n=3+1)$ и $\bar{\mathbf{D}}^{(1)}(R)$ $(n=2+1+1)$, размерности $\binom{4}{1}-\binom{4}{0}=3$,

$\mathbf{D}^{(2)}(R)$ $(n=2+2)$, эквивалентное $\bar{\mathbf{D}}^{(2)}(R)$ $(n=2+2)$,

размерности $\binom{4}{2}-\binom{4}{1}=2$.

Всего имеется пять неэквивалентных неприводимых представлений, соответствующих пяти классам группы. Очевидно, что сумма квадратов их размерностей равна порядку группы: $1^2+1^2+3^2+3^2+2^2=24=4!=h$. Для этой группы, как и для симметрической группы третьей степени, рассматриваемые представления включают все неприводимые представления.

При $n=5$ мы получим таким способом шесть неприводимых представлений $[(\mathbf{D}^{(2)}(R)$ не эквивалентно $\overline{\mathbf{D}}^{(2)}(R))]$, но так как группа имеет семь классов, то это не все неприводимые представления. При бо́льших n все меньшая часть полного числа всех неприводимых представлений оказывается среди $\mathbf{D}^{(k)}(R)$ и $\overline{\mathbf{D}}^{(k)}(R)$. Тем не менее в силу принципа Паули мы придем к заключению, что остальные представления не играют никакой роли в теории атомных спектров. Они могут быть получены тем же способом, каким мы получили рассмотренные представления, за тем исключением, что следует рассматривать функции n переменных, могущие принимать более чем те два значения, которые мы приняли в нашем рассмотрении.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Лемма о симметрической группе

Здесь будет показано, что при $k \leqslant \frac{1}{2}n$ все $\binom{n}{k-1}$ функций

$$F_{a_1a_2\ldots a_{k-1}} = s_{a_1}s_{a_2}\ldots s_{a_{k-1}}s_{a_1a_2\ldots a_{k-1}} \tag{13.5}$$

(где $a_1 < a_2 < \ldots < a_{k-1}$ и $s_{a_1a_2\ldots a_{k-1}}$ является суммой всех тех переменных s, индексы которых не встречаются среди чисел a_1, $a_2, \ldots, a_{k-1}$) линейно независимы. Только в том случае, если это имеет место, можно заключить, что не более чем $\binom{n}{k}-\binom{n}{k-1}$ линейных комбинаций произведений $s_{a_1}s_{a_2}\ldots s_{a_k}$ ортогональны всем $F_{a_1a_2\ldots a_{k-1}}$. Функции $F_{a_1a_2\ldots a_{k-1}}$ являются линейными комбинациями произведений $s_{a_1}s_{a_2}\ldots s_{a_k}$:

$$F_{a_1a_2\ldots a_{k-1}} = \sum_b m_{a_1\ldots a_{k-1};\, b_1\ldots b_k} s_{b_1}s_{b_2}\ldots s_{b_k}, \tag{13.16}$$

где можно принять $b_1 < b_2 < \ldots < b_k$ и

$$m_{a_1\ldots a_{k-1};\, b_1\ldots b_k} = \begin{cases} 1, & \text{если все } a_1, a_2, \ldots, a_{k-1} \text{ встречаются} \\ & \quad \text{среди } b_1, b_2, \ldots, b_k, \\ 0, & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases} \tag{13.17}$$

В сумме в (13.16) числа $b_1, b_2, \ldots, b_k$ пробегают все $\binom{n}{k}$ комбинаций чисел $1, 2, \ldots, n$. Если между $F_{a_1a_2\ldots a_{k-1}}$ имеется

линейное соотношение вида

$$\sum_a c_{a_1 \ldots a_{k-1}} F_{a_1 \ldots a_{k-1}} = \sum_{a,\, b} c_{a_1 \ldots a_{k-1}} m_{a_1 \ldots a_{k-1};\, b_1 \ldots b_k} s_{b_1} \ldots s_{b_k} = 0 \tag{13.18}$$

[суммирование опять проводится по всем $\binom{n}{k-1}$ комбинациям чисел a и по всем $\binom{n}{k}$ комбинациям чисел b], то отсюда следует, что для всех чисел $x_{b_1 \ldots b_k}$, определенных для $b_1 < b_2 < \ldots < b_k$,

$$\sum_{a,\, b} c_{a_1 \ldots a_{k-1}} m_{a_1 \ldots a_{k-1};\, b_1 \ldots b_k} x_{b_1 \ldots b_k} = 0. \tag{13.19}$$

Это можно показать, умножая скалярное произведение (13.18) и $s_{d_1} s_{d_2} s_{d_3} \ldots s_{d_k}$ на $x_{d_1 \ldots d_k}$ и складывая получающиеся уравнения при всех возможных комбинациях чисел d_i.

Выберем теперь числа $x_{b_1 b_2 \ldots b_k}$ так, чтобы

$$\sum_b m_{a_1 \ldots a_{k-1};\, b_1 \ldots b_k} x_{b_1 \ldots b_k} = \begin{cases} 1 & \text{при } a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ \ldots,\ a_{k-1} = k-1; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{13.20}$$

Тогда соотношение (13.19) эквивалентно равенству

$$c_{12 \ldots k-1} = 0. \tag{13.21}$$

То же самое соотношение (13.21) должно выполняться также для всех остальных $c_{a_1 \ldots a_{k-1}}$, поскольку они все входят одинаковым образом; иначе говоря, аналогичным образом можно так выбрать величины $x_{b_1 \ldots b_k}$, чтобы показать, что каждое c обращается в нуль (следует заменить лишь в последней части нашего рассуждения $1, 2, \ldots, k-1$ на $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}$). Тем самым остается лишь показать, что выбор, приводящий к (13.20), действительно может быть сделан, после чего доказательство линейной независимости функций $F_{a_1 a_2 \ldots a_{k-1}}$ будет завершено.

Величины $x_{b_1 \ldots b_k}$ находятся в нашем полном распоряжении. Выберем равными друг другу все те $x_{b_1 \ldots b_k}$, среди индексов $b_1, b_2, \ldots, b_k$ которых имеется в точности τ чисел $1, 2, \ldots, k-1$ (где $0 \leqslant \tau \leqslant k-1$). Обозначим эти $x_{b_1 \ldots b_k}$ через x_τ. Рассмотрим теперь те из соотношений (13.20), в которых имеется σ чисел $1, 2, \ldots, k-1$ среди $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$. Поскольку $m_{a_1 a_2 \ldots a_{k-1};\, b_1 b_2 \ldots b_k}$ отлично от нуля только в том случае, если все a_i встречаются среди b_i, только те члены будут давать вклад в сумму в (13.20), в которых имеется σ чисел $1, 2, \ldots, k-1$ и $k-1-\sigma$ чисел $k, k+1, \ldots, n$ среди b_i. Единственный индекс b, значение кото-

рого остается еще неопределенным, может быть либо одним из чисел $1, 2, \ldots, k-1$, либо одним из чисел $k, k+1, \ldots, n$. В первом случае он может принимать $k-1-\sigma$ значений, в последнем — $n-k+1-(k-1-\sigma)=n-2k+2+\sigma$ значений, поскольку он не может быть равным одному из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$. Тогда (13.20) принимает вид

$$(k-1-\sigma)\,x_{\sigma+1}+(n-2k+2+\sigma)\,x_\sigma=\begin{cases}1 & \text{при } \sigma=k-1\\ 0 & \text{при } \sigma=0,\ 1,\ \ldots,\ k-2.\end{cases} \tag{13.22}$$

Это дает

$$x_{k-1}=\frac{1}{n-k+1}$$

и

$$-\frac{x_\sigma}{x_{\sigma+1}}=\frac{k-1-\sigma}{n-2k+2+\sigma} \quad \text{при} \quad \sigma=0,\ 1,\ \ldots,\ k-2.$$

Но эти уравнения могут быть удовлетворены при $n-2k+2>0$ или $k\leqslant\frac{1}{2}n+1$; следовательно, тем более они будут удовлетворяться при $k\leqslant\frac{1}{2}n$. Значит, величины $x_{b_1b_2\ldots b_k}$ могут быть выбраны так, чтобы выполнялось соотношение (13.20). Следовательно, соотношение (13.21) выполняется. Аналогично должны обращаться в нуль все остальные c в (13.18); таким образом, линейная независимость функций F установлена.