Глава 14

ГРУППЫ ВРАЩЕНИЙ

1. Непрерывная группа, образованная из совокупности всех вещественных ортогональных n-мерных матриц, называется *n-мерной группой вращений*. *Группа чистых вращений* включает ортогональные матрицы только с определителем $+1$, тогда как *группа вращений и отражений* включает также матрицы с определителем -1; таким образом, последняя содержит все вещественные ортогональные матрицы. Групповое умножение является снова матричным умножением, а тождественным элементом является единичная матрица.

В гл. 3 мы видели, что всякая вещественная ортогональная матрица может быть приведена к диагональному виду с помощью унитарной матрицы. Тогда абсолютные величины всех диагональных элементов равны 1; некоторые диагональные элементы равны $+1$, другие равны -1, а остальные состоят из сопряженных пар комплексных чисел $e^{i\varphi}$ и $e^{-i\varphi}$. Собственные векторы, соответствующие собственным значениям $+1$ или -1, могут быть записаны в вещественном виде, а пары собственных векторов, соответствующие двум комплексно сопряженным собственным значениям, — в виде комплексно сопряженных векторов. Так как эти собственные векторы, как и всякие собственные векторы, ортогональны в эрмитовом смысле, они ортогональны сами себе в комплексном ортогональном смысле; иначе говоря, сумма квадратов их компонент равна нулю.

Как известно, n-мерная ортогональная матрица представляет преобразование от одной системы ортогональных осей к другой, т. е. *вращение* осей координат. Из ортогональности этой матрицы следует, что каждая пара осей новой системы координат ортогональна и что единица длины новых осей координат та же, что и была для старых. Группа чистых вращений содержит только преобразования от одной „правой“ системы координат к другой „правой“ системе; группа вращений и отражений включает также преобразования от правой системы координат к левой и, наоборот. Последние преобразования часто называются несобственными вращениями.

Чтобы применить наши общие результаты к непрерывным группам, мы должны прежде всего ввести параметры. Это может быть сделано только несимметричным образом, так как определенные направления в пространстве (оси координат) должны быть выделены, и даже сами оси координат не могут рассматриваться на равных основаниях. Прежде всего найдем число измерений пространства искомых параметров. Рассмотрим n-мерную вещественную ортогональную матрицу. Так как первая строка является n-мерным вектором единичной длины (ось x новой системы координат), она в силу условия $a_{11}^2+a_{12}^2+\ldots+a_{1n}^2=1$ содержит в точности $n-1$ параметр. Вторая строка должна быть ортогональна первой; отсюда следует однородное линейное уравнение $a_{11}a_{21}+a_{12}a_{22}+\ldots+a_{1n}a_{2n}=0$ для $a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}$, а из единичной длины вытекает $a_{21}^2+a_{22}^2+\ldots+a_{2n}^2=1$. Таким образом, во второй строке имеется $n-2$ свободных параметров. Далее, k-я строка должна быть ортогональна всем $k-1$ предшествующим строкам — отсюда следуют $k-1$ однородных уравнений — и иметь единичную длину. Следовательно, она содержит $n-k$ свободных параметров. Всего имеется

$$(n-1)+(n-2)+(n-3)+\ldots+[n-(n-1)]+0=\frac{1}{2}n(n-1)$$

свободных параметров.

2. В дальнейшем мы будем ограничиваться двумерной и трехмерными группами вращений.

Общий элемент двумерной группы чистых вращений получается путем преобразования к новой системе координат на плоскости[1])

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\varphi+y\sin\varphi, \\ y' &= -x\sin\varphi+y\cos\varphi, \end{aligned} \tag{14.1}$$

где φ — *угол вращения*, принимающий значения от $-\pi$ до $+\pi$. Общий элемент группы имеет, таким образом, вид

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}. \tag{14.2}$$

Второе преобразование — переход от $x'y'$ к x'', y'' путем вращения системы координат на угол φ' — приводит к произведению

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi' & \sin\varphi' \\ -\sin\varphi' & \cos\varphi' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos(\varphi+\varphi') & \sin(\varphi+\varphi') \\ -\sin(\varphi+\varphi') & \cos(\varphi+\varphi') \end{pmatrix}. \tag{14.3}$$

---

[1]) Вращение определяется как положительное, если ось x вращается к оси y так, чтобы соответствовать определению трехмерных вращений. В общем случае положительным вращением вокруг некоторой оси называется вращение правого винта, продвигающегося в положительном направлении этой оси.

Соотношение (14.3) показывает, что произведение является просто вращением на угол $\varphi+\varphi'$.

Двумерная группа чистых вращений является абелевой, так как она имеет только один параметр. Если мы введем обозначение $\{\varphi\}$ гл. 10 для элемента группы с параметром φ, то соотношение (14.3) может быть записано в виде

$$\{\varphi'\}\cdot\{\varphi\}=\{\varphi+\varphi'\}=\{\varphi\}\cdot\{\varphi'\}. \tag{14.4}$$

Если $\varphi+\varphi'$ не лежит между $-\pi$ и $+\pi$, должно быть добавлено или вычтено целое число углов 2π, чтобы угол $\varphi+\varphi'$ попал в область, в которой допускается изменение параметра.

Для матрицы (14.2) угол φ является комплексной фазой собственного значения $\exp(\pm i\varphi)$. Столбцы единичной матрицы $\mathbf{u}$, которая диагонализует (14.2), определяется из соотношений

$$|u_{1\alpha}|^2+|u_{2\alpha}|^2=1, \qquad u_{1\alpha}^2+u_{2\alpha}^2=0, \qquad u_{1\alpha}=\pm iu_{2\alpha}$$

с точностью до множителя с абсолютной величиной 1 (который может быть выбран произвольно). Эти условия дают $u_{11}=1/\sqrt{2}$, $u_{21}=-i/\sqrt{2}$, $u_{12}=1/\sqrt{2}$, $u_{22}=+i/\sqrt{2}$, и мы имеем

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{-i\varphi} & 0\\ 0 & e^{+i\varphi}\end{pmatrix}. \tag{14.5}$$

Таким образом, собственные векторы одни и те же для всех матриц (14.2). Поскольку двумерная группа чистых вращений является абелевой, каждый элемент образует класс сам по себе.

3. Из всякой двумерной матрицы с определителем -1 можно получить матрицу с определителем $+1$ путем умножения второй строки на -1. И, наоборот, общая ортогональная матрица с определителем -1 получается путем изменения знаков во второй строке (14.2):

$$\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ \sin\varphi & -\cos\varphi\end{pmatrix}. \tag{14.2a}$$

Матрицы (14.2) и (14.2a), где $-\pi\leqslant\varphi\leqslant\pi$, образуют двумерную группу вращений и отражений. Все матрицы (14.2a) имеют собственные значения $+1$ и -1. Они имеют различные собственные векторы $\boldsymbol{u}_{\cdot 1}=[\cos(\varphi/2), \sin(\varphi/2)]$, $\boldsymbol{u}_{\cdot 2}=[-\sin(\varphi/2), \cos(\varphi/2)]$, тогда как все матрицы (14.2) имеют все одинаковые собственные векторы, но различные собственные значения. Мы можем непосред-

ственно проверить, что матрица, образованная из этих двух векторов, преобразует диагональную матрицу к виду (14.2а):

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\varphi}{2} & -\sin\frac{\varphi}{2} \\ \sin\frac{\varphi}{2} & \cos\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{\varphi}{2} & \sin\frac{\varphi}{2} \\ -\sin\frac{\varphi}{2} & \cos\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix}. \tag{14.5а}$$

Выражение для несобственного вращения (14.2а) в виде произведения (14.5а) иллюстрирует то обстоятельство, что всякое несобственное вращение (14.2а) может рассматриваться как чистое отражение в прямой линии; соотношение (14.5а) означает, что (14.2а) получается путем, во-первых, *вращения* на угол $\varphi/2$, *затем отражения* относительно оси x, и наконец, *вращения назад* на угол $-\varphi/2$. С другой стороны, то же отражение могло бы быть произведено относительно линии, составляющей угол $\varphi/2$ с осью x.

Двумерная группа вращений и отражений является смешанной непрерывной группой. Наиболее естественная параметризация этой группы использует непрерывный параметр φ и дискретный параметр d. Последний представляет собой определитель, т. е. равен ± 1. Тогда мы имеем

$$\{\varphi, d\} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -d\sin\varphi & d\cos\varphi \end{pmatrix}, \tag{14.6}$$

$$\{\varphi, d\} \cdot \{\varphi', d'\} = \{d'\varphi + \varphi', dd'\}.$$

Эта группа не является более абелевой; матрицы (14.2а) не коммутируют, а также не имеют общих собственных векторов.

Разбиение группы на классы также меняется: (14.5а) показывает, что все элементы (14.2а) *принадлежат одному классу*, так как они все могут быть преобразованы в $\{0, -1\}$. Однако элементы (14.2) уже не образуют класса каждый в отдельности; например,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \tag{14.7}$$

и, следовательно, $\{\varphi, 1\}$ и $\{-\varphi, 1\}$ принадлежат одному и тому же классу. В этом классе не может быть других элементов, так как все остальные имеют другие собственные значения и не могут быть преобразованы в один из этих двух.

4. В соответствии с общим рассмотрением интеграла Гурвица в гл. 10 существует такой инвариантный интеграл по области

двумерной группы чистых вращений, что соотношение

$$\int_{-\pi}^{\pi} J(\{\varphi\})\, g(\{\varphi\})\, d\varphi = \int_{-\pi}^{\pi} J(R\{\varphi\})\, g(\{\varphi\})\, d\varphi \tag{14.8}$$

выполняется для всех элементов группы R при условии, что $g(T)$ определяется (10.9):

$$g(T) = \frac{g(E)}{\partial p(T\cdot\{\alpha\})/\partial\alpha} \quad \text{при} \quad \alpha = 0, \tag{14.9}$$

где $p(T)$ — параметр элемента T.

В случае двумерной группы вращений непосредственная проверка показывает, что одинаковым областям должны быть приписаны одинаковые веса. Пусть t будет параметром элемента T; тогда, согласно (14.4), мы имеем параметр $p(T\{\alpha\}) = t + \alpha$. После дифференцирования по α это дает 1, так что

$$g(T) = g(E). \tag{14.10}$$

Таким образом, инвариантный интеграл равен

$$\int_{-\pi}^{\pi} J(\{\varphi\})\, d\varphi = \int_{-\pi}^{\pi} J(R\cdot\{\varphi\})\, d\varphi. \tag{14.11}$$

Все неприводимые представления двумерной группы чистых вращений одномерны. Действительно, это справедливо для всех абелевых групп; непрерывные абелевы группы являются лишь частным случаем. Рассмотрим многомерное, скажем двумерное, представление. Мы можем привести некоторую матрицу этого представления к диагональному виду. Если два диагональных элемента не были бы равными, матрица имела бы вид

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \tag{14.E.1}$$

так что все матрицы, коммутирующие с ней — и, следовательно, все матрицы этого представления — имели бы только нули на пересечениях строк и столбцов с различными диагональными элементами матрицы (14.E.1); тогда представление было бы приводимым. Если бы это не имело места, то все собственные значения матрицы (14.E.1) были бы равными и матрица была бы постоянной. Тогда она имела бы диагональный вид даже до преобразования. Но это верно для любой матрицы этого представления, так что они все были бы кратными единичной матрице, и представление было бы, следовательно, приводимым.

Из (14.4) следует, что если элемент $\{\varphi\}$ соответствует матрице $(f(\varphi))$ в некотором представлении, то

$$(f(\varphi))\cdot(f(\varphi'))=(f(\varphi'))\cdot(f(\varphi))=(f(\varphi+\varphi')),$$

и, таким образом,

$$f(\varphi)=e^{ik\varphi}.$$

Так как матрица для $\varphi=-\pi$ должна совпадать с матрицей для $\varphi=+\pi$, мы должны иметь $\exp(ik\pi)=\exp(-ik\pi)$; следовательно, $\exp(2ik\pi)=1$. Отсюда следует, что k является вещественным целым числом. Двумерная группа чистых вращений имеет бесконечно много неприводимых представлений, и все они одномерны. Матрица m-го представления, соответствующая элементу (14.2) с углом вращения φ, равна

$$(e^{im\varphi}).$$

Для каждого положительного и отрицательного целого числа, $m=\ldots-4,-3,-2,-1,0,+1,+2,+3,\ldots$, существует одно определенное неприводимое представление двумерной группы чистых вращений.

Соотношения ортогональности

$$\int_{-\pi}^{\pi}(e^{im'\varphi})^*(e^{im\varphi})\,d\varphi=\begin{cases}0 & \text{при } m\neq m'\\ \int_{-\pi}^{\pi}d\varphi=2\pi & \text{при } m=m'\end{cases}$$

являются как раз соотношениями ортогональности рядов Фурье. Полнота набора коэффициентов представления является также полнотой системы функций, по которой производятся разложения Фурье.

5. Найдем теперь неприводимые представления двумерной группы вращений и отражений, используя метод, который покажется весьма сложным для этой цели. Однако тот же самый метод будет в дальнейшем применен к трехмерной группе, так что полезно рассмотреть его на простом примере; кроме того, мы имеем здесь другой пример соотношений между представлением и соответствующими функциями.

Рассмотрим уравнение для гармонических полиномов от двух переменных

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}=0. \tag{14.12}$$

Ясно, что оно инвариантно относительно всех преобразований (14.6). Далее, решение уравнения (14.12), являющееся однородной функцией степени m относительно переменных x и y, преобразуется

оператором $\mathbf{P}_R$ [где R — преобразование вида (14.6)] в полином того же вида, так как преобразование $\mathbf{P}_R$ линейно относительно переменных x и y:

$$\mathbf{P}_{\{\varphi,\, d\}} f(x\cos\varphi + y\sin\varphi,\ -dx\sin\varphi + dy\cos\varphi) = f(x,\ y) \quad (14.13)$$

или, поскольку $\{\varphi,\ d\}^{-1}$ равно $\{-d\varphi,\ d\}$,

$$\mathbf{P}_{\{\varphi,\, d\}} f(x,\ y) = f(x\cos(-d\varphi) + y\sin(-d\varphi),\ -xd\sin(-d\varphi) + \\ + yd\cos(-d\varphi)) = f(x\cos\varphi - yd\sin\varphi,\ x\sin\varphi + yd\cos\varphi). \quad (14.14)$$

Таким образом, если $f(x,\ y)$ является однородной функцией m-й степени, то тем же свойством обладает и $\mathbf{P}_R f$.

Уравнение (14.12) совпадает с одномерным волновым уравнением с мнимой скоростью i. Его общее решение имеет вид

$$f(x,\ y) = f_-(x - iy) + f_+(x + iy). \quad (14.15)$$

Если $f(x,\ y)$ — однородная функция степени m относительно x и y, то f_+ и f_- должны (с точностью до постоянного множителя) определятся выражениями

$$f_-(x - iy) = (x - iy)^m, \quad f_+(x + iy) = (x + iy)^m. \quad (14.16)$$

Представление $\mathfrak{Z}^{(m)}(\{\varphi,\ d\})$, принадлежащее этим функциям, двумерно. Его первый столбец (—) определяется с помощью (11.23) и (14.14);

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{\{\varphi,\, d\}} f_-(x,\ y) &= f_-(x\cos\varphi - yd\sin\varphi,\quad x\sin\varphi + yd\cos\varphi) = \\ &= [(x\cos\varphi - yd\sin\varphi) - i(x\sin\varphi + yd\cos\varphi)]^m = \\ &= [x(\cos\varphi - i\sin\varphi) - iyd(\cos\varphi - i\sin\varphi)]^m = \\ &= (x - iyd)^m e^{-im\varphi}.\end{aligned}$$

Будучи записанным через коэффициенты представления, это дает

$$\mathbf{P}_{\{\varphi,\, d\}} f_-(x,\ y) = \mathfrak{Z}^{(m)}(\{\varphi,\ d\})_{--} f_- + \mathfrak{Z}^{(m)}(\{\varphi,\ d\})_{+-} f_+.$$

Следовательно, эти коэффициенты даются выражениями

$$\begin{aligned}&\mathfrak{Z}^{(m)}(\{\varphi,\ 1\})_{--} = e^{-im\varphi}, \qquad \mathfrak{Z}^{(m)}(\{\varphi,\ 1\})_{+-} = 0, \\ &\mathfrak{Z}^{(m)}(\{\varphi,\ -1\})_{--} = 0, \qquad \mathfrak{Z}^{(m)}(\{\varphi,\ -1\})_{+-} = e^{-im\varphi}.\end{aligned} \quad (14.17)$$

Другой столбец (+) может быть определен тем же способом через функции f_+. Матрица $\mathfrak{Z}^{(m)}(\{\varphi,\ 1\})$, соответствующая в этом представлении чистому вращению на угол φ, оказывается равной

$$\mathfrak{Z}^{(m)}(\{\varphi,\ 1\}) = \begin{pmatrix} e^{-im\varphi} & 0 \\ 0 & e^{im\varphi} \end{pmatrix}. \quad (14.18)$$

где мы сначала записали строку (или столбец) (—), а затем строку (или столбец) (+). Матрица, соответствующая элементу группы (14.2а), равна

$$\mathfrak{Z}^{(m)}(\{\varphi, -1\}) = \begin{pmatrix} 0 & e^{im\varphi} \\ e^{-im\varphi} & 0 \end{pmatrix}. \qquad (14.18а)$$

Функция f_- принадлежит строке (—) (или первой) матрицы $\mathfrak{Z}^{(m)}$; функция f_+ — строке (+) (или второй).

Эти представления неприводимы и различны при $m = 1, 2, 3, \ldots$. Только диагональная матрица коммутирует с (14.18), но никакая диагональная матрица, кроме постоянной матрицы, не коммутирует с (14.18а). Матрицы (14.6) являются, разумеется, также „представлением" их собственной группы. Это представление эквивалентно частному представлению $m = 1$ в (14.18), (14.18а); матрица, использованная в (14.5), преобразует (14.6) к виду (14.18), (14.18а).

Следует заметить, что (14.18) и (14.18а) также осуществляют представление при $m = 0$. Однако оно не является неприводимым, так как в этом случае всякая матрица коммутирует с (14.18); следовательно, в этом специальном случае мы можем диагонализовать (14.18а) и разделить это представление на две неприводимые компоненты

$$\mathfrak{Z}^{(0)}(\{\varphi, 1\}) = (1), \qquad \mathfrak{Z}^{(0)}(\{\varphi, -1\}) = (1) \qquad (14.19)$$

и

$$\mathfrak{Z}^{(0')}(\{\varphi, 1\}) = (1), \qquad \mathfrak{Z}^{(0')}(\{\varphi, -1\}) = (-1). \qquad (14.20)$$

6. Мы нашли теперь все представления двумерной группы вращений и отражений. Они задаются формулами (14.18) и (14.18а) при $m = 1, 2, 3, \ldots$ и являются двумерными; при $m = 0$ и $m = 0'$ они представлены выражениями (14.19) и (14.20) и являются одномерными.

Коэффициенты представления $\mathfrak{Z}^{(m)}(\{\varphi, d\})_{\pm\pm}$ образуют полную систему функций в пространстве φ и d. Это значит, что всякую функцию $g(\varphi, d)$ (φ изменяется от $-\pi$ до $+\pi$, а d равно либо $+1$, либо -1) можно записать в виде их линейной комбинации. Функции $\frac{1}{2}(\mathfrak{Z}^{(0)} + \mathfrak{Z}^{(0')})$, $\mathfrak{Z}^{(1)}_{--}$, $\mathfrak{Z}^{(1)}_{++}$, $\mathfrak{Z}^{(2)}_{--}$, $\mathfrak{Z}^{(2)}_{++}$, ... задаются последовательностью 1, $\exp(-i\varphi)$, $\exp(i\varphi)$, $\exp(-2i\varphi)$, $\exp(2i\varphi)$, ... при $d = 1$ и исчезают при $d = -1$; с другой стороны, функции $\frac{1}{2}(\mathfrak{Z}^{(0)} - \mathfrak{Z}^{(0')})$, $\mathfrak{Z}^{(1)}_{+-}$, $\mathfrak{Z}^{(1)}_{-+}$, $\mathfrak{Z}^{(2)}_{+-}$, $\mathfrak{Z}^{(2)}_{-+}$, ... равны нулю при $d = 1$ и, следовательно, равны 1, $\exp(-i\varphi)$, $\exp(i\varphi)$, $\exp(-2i\varphi)$, $\exp(2i\varphi)$, ... при $d = -1$. Функция $g(\varphi, 1)$ может быть выражена в виде линейной комбинации первого набора, а $g(\varphi, -1)$ — второго.

Из того обстоятельства, что рассмотренные матричные элементы образуют полную систему в пространстве параметров, следует, что,

кроме (14.18), (14.18а), (14.19) и (14.20), не существует других *неприводимых представлений двумерной группы вращений.*

7. Обратимся теперь к исследованию трехмерной группы чистых вращений. Собственные значения матрицы $\mathbf{a}$, вещественной ортогональной трехмерной матрицы с определителем 1, должны иметь вид 1, $\exp(-i\varphi)$, $\exp(+i\varphi)$, так как все они имеют модуль 1, а комплексные собственные значения появляются сопряженными парами. Фаза φ комплексного собственного значения называется *углом вращения*; собственный вектор[1]) $\boldsymbol{v}_{\cdot 1}$ с собственным значением 1 называется *осью вращения*. Его компоненты v_{11}, v_{21}, v_{31} проще всего определить, если начать с $\mathbf{a}\boldsymbol{v}_{\cdot 1} = \mathbf{1}\boldsymbol{v}_{\cdot 1}$ и, умножив на $\mathbf{a}^{-1} = \mathbf{a}^T$, найти $\boldsymbol{v}_{\cdot 1} = \mathbf{a}^T\boldsymbol{v}_{\cdot 1}$. Это дает $(\mathbf{a} - \mathbf{a}^T)\boldsymbol{v}_{\cdot 1} = 0$ или, если записать более подробно,

$$\begin{aligned} (a_{12} - a_{21})\,v_{21} + (a_{13} - a_{31})\,v_{31} &= 0, \\ (a_{21} - a_{12})\,v_{11} \qquad\qquad + (a_{23} - a_{32})\,v_{31} &= 0, \\ (a_{31} - a_{13})\,v_{11} + (a_{32} - a_{23})\,v_{21} \qquad\qquad &= 0, \end{aligned} \tag{14.21}$$

откуда

$$v_{11} : v_{21} : v_{31} = (a_{23} - a_{32}) : (a_{31} - a_{13}) : (a_{12} - a_{21}). \tag{14.22}$$

Угол вращения φ проще всего определить, приравняв сумму собственных значений следу матрицы,

$$1 + e^{-i\varphi} + e^{i\varphi} = 1 + 2\cos\varphi = a_{11} + a_{22} + a_{33}, \tag{14.23}$$

где φ принимает значения между 0 и π.

Собственные векторы $\boldsymbol{v}_{\cdot 2}$ и $\boldsymbol{v}_{\cdot 3}$, которые соответствуют $\exp(-i\varphi)$ и $\exp(+i\varphi)$, комплексно сопряжены друг с другом, $\boldsymbol{v}_{\cdot 2}^* = \boldsymbol{v}_{\cdot 3}$. С другой стороны, $\boldsymbol{v}_{\cdot 1}$ должен быть взят вещественным: $(\boldsymbol{v}_{\cdot 1}, \boldsymbol{v}_{\cdot 1}) = ((\boldsymbol{v}_{\cdot 1}, \boldsymbol{v}_{\cdot 1})) = 1$.

Матрица $\mathbf{v}$, столбцами которой являются собственные векторы $\boldsymbol{v}_{\cdot 1}$, $\boldsymbol{v}_{\cdot 2}$, $\boldsymbol{v}_{\cdot 3}$ матрицы $\mathbf{a}$, диагонализует эту последнюю. Поэтому $\mathbf{v}^\dagger\mathbf{a}\mathbf{v}$ является диагональной матрицей с собственными значениями 1, $\exp(-i\varphi)$, $\exp(+i\varphi)$ в качестве диагональных элементов. Запишем теперь $\mathbf{V} = \mathbf{v}\mathbf{v}_0$, где[2])

$$\mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{i}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \dfrac{i}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \tag{14.24}$$

---

[1]) Хотя $\boldsymbol{v}_{\cdot 1}$ является, конечно, вектором, он будет также играть в нашем обсуждении роль столбца элементов матрицы. Поэтому мы обозначаем его в соответствии с нашими обозначениями элементов матриц.

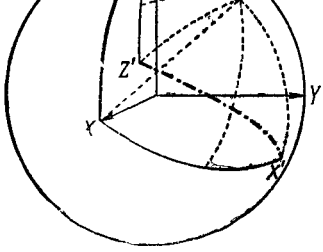
[2]) Здесь $\mathbf{v}_0$ выбрано так, что $\mathbf{a}$ представляет вращения вокруг оси X после преобразования с помощью $\mathbf{v}\,\mathbf{v}_0$. Ясно, что возможен другой выбор $\mathbf{v}_0$, который приводит $\mathbf{a}$ к виду, представляющему, например, вращение вокруг оси Y.

Столбцами матрицы $\mathbf{V}$ являются векторы $\boldsymbol{v}_{\cdot 1}$, $(-i/\sqrt{2})(\boldsymbol{v}_{\cdot 2}-\boldsymbol{v}^*_{\cdot 2})$ и $(1/\sqrt{2})(\boldsymbol{v}_{\cdot 2}+\boldsymbol{v}^*_{\cdot 2})$, так что $\mathbf{V}$ вещественна. Кроме того, матрица $\mathbf{V}$, будучи произведением унитарных матриц $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}_0$, также унитарна, так что она является вещественной ортогональной матрицей, и, следовательно, элементом группы вращения. Если мы теперь преобразуем уравнение $\mathbf{v}^\dagger\mathbf{a}\mathbf{v}=\mathbf{d}$ с помощью $\mathbf{v}_0$, то получим

$$\mathbf{V}^\dagger\mathbf{a}\mathbf{V}=\mathbf{v}_0^\dagger\mathbf{v}^\dagger\mathbf{a}\mathbf{v}\mathbf{v}_0=\mathbf{v}_0^\dagger\mathbf{d}\mathbf{v}_0=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi\\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}=\boldsymbol{\varepsilon}_\varphi. \qquad (14.25)$$

Можно принять, что в этом уравнении $\mathbf{V}$ представляет *чистое* вращение, так как мы могли бы умножить ее на -1, если бы ее определитель равнялся -1, и (14.25) осталось бы без изменения. Из (14.25) видно, что *все вращения с одним и тем же углом вращения φ принадлежат одному и тому же классу*, поскольку они все могут быть преобразованы в $\boldsymbol{\varepsilon}_\varphi$. С другой стороны, матрицы, угол вращения которых отличен от φ, не могут принадлежать одному и тому же классу, так как они имеют различные собственные значения и поэтому не могут быть преобразованы в $\boldsymbol{\varepsilon}_\varphi$.

Геометрическую интерпретацию этого изложения дает хорошо известная теорема, согласно которой всякое ортогональное преобразование в трехмерном пространстве может быть представлено как вращение



Фиг. 6. Геометрическая интерпретация соотношения (14.25).

вокруг соответствующим образом выбранной оси $\boldsymbol{v}_{\cdot 1}$. (Так как $\mathbf{a}\boldsymbol{v}_{\cdot 1}=\boldsymbol{v}_{\cdot 1}$, ось вращения не меняется при вращении.) Если преобразование переводит дугу XZ на фиг. 6 в дугу $X'Z'$, то ось вращения должна лежать на перпендикулярах, восстановленных в серединах дуг ZZ' и XX' и, следовательно, в точке их пересечения C. Действительно, вращение вокруг C преобразует Z в Z' и X в X': из равенства двух треугольников ZCX и $Z'C'X'$ (три стороны их равны) следует, что углы ZCX и $Z'C'X'$ равны, а поэтому углы ZCZ' и XCX' также равны и равны углу вращения φ. Вращение на угол φ может быть преобразовано в другое вращение с тем же углом вращения, если ось первого вращения при-

вести в совпадение с осью второго вращения путем вращения V, выполнить затем вращения на угол φ и, наконец, вернуть ось в ее первоначальное положение с помощью V^{-1}.

Для однозначной характеристики вращений оси вращения должно быть придано определенное направление, которое задает также знак вектора $\boldsymbol{v}_{.1}$. Вращение будет происходить по часовой стрелке, если смотреть вдоль положительного направления оси.

Параметризация (фиг. 1, стр. 110) трехмерной группы чистых вращений, которая обсуждалась в гл. 10, основана на этих характеристиках. Вращение на угол φ вокруг оси $\boldsymbol{v}_{.1}$ соответствует точке на расстоянии φ от начала в направлении $\boldsymbol{v}_{.1}$ [1]). Угол вращения всегда однозначно определяется вращением. Для вращения с $\varphi = 0$ (которое фактически вовсе не является вращением) направление оси вращения не определено; тем не менее соответствующая точка в пространстве параметров определяется однозначно: она является центром сферы.

На поверхности сферы $\varphi = \pi$ в пространстве параметров направление оси вращения не определяется однозначно; вращения на угол π вокруг противоположно направленных осей совпадают. Поэтому одно и то же вращение соответствует противоположным точкам сферической поверхности. В остальных случаях соответствие вращений точкам в пространстве параметров взаимно однозначно. Элементы определенных классов лежат на концентрических сферах.

Для этой системы параметров можно также легко сформулировать инвариантный интеграл Гурвица. Так как точки на сферической поверхности радиуса φ соответствуют вращениям на один и тот же угол, но вокруг осей, направленных по-разному, и так как все оси вращения в пространстве эквивалентны, $g(\{\varphi v_{11}, \varphi v_{21}, \varphi v_{31}\})$ может зависеть только от угла вращения φ, но не от направления вектора $\boldsymbol{v}_{.1}$. Таким образом, достаточно определить $g(\{\varphi, 0, 0\})$. С этой целью [см. формулу (10.9)] сначала вычислим параметры произведения $\{\varphi, 0, 0\} \cdot \{e_1, e_2, e_3\}$ для очень малых e_i, а затем устремим e_i к нулю. Вращение $\{e_1, e_2, e_3\}$ задается выражением

$$\{e_1, e_2, e_3\} = \begin{pmatrix} 1 & e_3 & -e_2 \\ -e_3 & 1 & e_1 \\ e_2 & -e_1 & 1 \end{pmatrix},$$

справедливым с точностью до первой степени величин e_i [см. соотношение (14. 22)]. Для $\{\varphi, 0, 0\}\{e_1, e_2, e_3\} = \mathbf{e}_\varphi \{e_1, e_2, e_3\}$ получим

$$\begin{pmatrix} 1 & e_3 & -e_2 \\ -e_3 \cos\varphi + e_2 \sin\varphi & \cos\varphi - e_1 \sin\varphi & e_1 \cos\varphi + \sin\varphi \\ e_3 \sin\varphi + e_2 \cos\varphi & -\sin\varphi - e_1 \cos\varphi & -e_1 \sin\varphi + \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

---

[1]) При обсуждении фиг. 1 в гл. 10 расстояние от начала было определено как φ/π, а не как φ. Левая часть фиг. 1 должна рассматриваться в настоящем обсуждении увеличенной в отношении $\pi : 1$.

Отсюда вычислим угол вращения φ' с помощью соотношения (14.23):

$$1+2\cos\varphi' = 1+2\cos\varphi - 2e_1\sin\varphi, \qquad \varphi' = \varphi + e_1. \tag{14.23a}$$

Из (14.22) мы получим направление оси вращения:

$$v'_{11} : v'_{21} : v'_{31} =$$
$$= (2e_1\cos\varphi + 2\sin\varphi) : (e_3\sin\varphi + e_2(1+\cos\varphi)) : (e_3(1+\cos\varphi) - e_2\sin\varphi). \tag{14.22a}$$

В сочетании с условием нормировки $v'^2_{11} + v'^2_{21} + v'^2_{13} = 1$ это дает (с учетом лишь членов первого порядка по e)

$$v'_{11} = 1, \qquad v'_{21} = \frac{e_2(1+\cos\varphi)}{2\sin\varphi} + \frac{e_3}{2}, \qquad v'_{31} = \frac{e_3(1+\cos\varphi)}{2\sin\varphi} - \frac{e_2}{2}.$$

Таким образом, параметрами $\{\varphi, 0, 0\}\cdot\{e_1, e_2, e_3\}$ являются

$$\varphi + e_1, \qquad \varphi\left[\frac{e_2(1+\cos\varphi)}{2\sin\varphi} + \frac{e_3}{2}\right], \qquad \varphi\left[\frac{e_3(1+\cos\varphi)}{2\sin\varphi} - \frac{e_2}{2}\right].$$

При $e_1 = e_2 = e_3 = 0$ получаем в точности параметры вращения $\mathbf{s}_\varphi$, т. е. $\varphi, 0, 0$. При $e_1 = e_2 = e_3 = 0$ интересующий нас якобиан равен

$$\frac{\partial(p_1(\{\varphi, 0, 0\}\{e_1, e_2, e_3\}), \ldots, p_3(\{\varphi, 0, 0\}\{e_1, e_2, e_3\}))}{\partial(e_1, e_2, e_3)} =$$
$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi\dfrac{1+\cos\varphi}{2\sin\varphi} & -\dfrac{\varphi}{2} \\ 0 & \dfrac{\varphi}{2} & \varphi\dfrac{1+\cos\varphi}{2\sin\varphi} \end{vmatrix} = \frac{\varphi^2}{4}\,\frac{(1+\cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi}{\sin^2\varphi} = \frac{\varphi^2}{2(1-\cos\varphi)}.$$

Таким образом, для весовой функции g [формула (10.9)] получаем

$$g(\{\varphi, 0, 0\}) = g(\{v_{11}\varphi, v_{21}\varphi, v_{31}\varphi\}) = \frac{2g_0(1-\cos\varphi)}{\varphi^2}. \tag{14.26}$$

Вычисление инвариантного интеграла функции $J(R) = J(\varphi)$, имеющей одно и то же значение для всех элементов класса (как, например, характер представления), также довольно просто. Интегрирование в пространстве параметров может быть выполнено тогда сначала по сферической поверхности ($\varphi = \text{const}$), т. е. по всем элементам одного класса, что дает $4\pi\varphi^2$, а затем по φ, т. е. по всем различным классам. Таким образом, для интеграла Гурвица получаем

$$g_0\int_0^\pi J(\varphi)\,8\pi(1-\cos\varphi)\,d\varphi. \tag{14.27}$$

Для другой параметризации часто используют углы Эйлера, как это показано на фиг. 2 (стр. 110). Вращение с углами Эйлера α, β, γ является произведением трех вращений: вокруг оси Z на угол γ, вокруг оси Y на угол β и снова вокруг оси Z на угол α. В последующих главах $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ будет всегда обозначать вращение с углами Эйлера α, β и γ. В этом представлении α и γ в общем случае изменяются от 0 до 2π, а β — от 0 до π. Однако если $\beta = 0$, то α и γ не определяются однозначно; все вращения $\{\alpha, 0, \gamma\}$ являются вращениями на угол $\alpha + \gamma$ вокруг оси Z.