

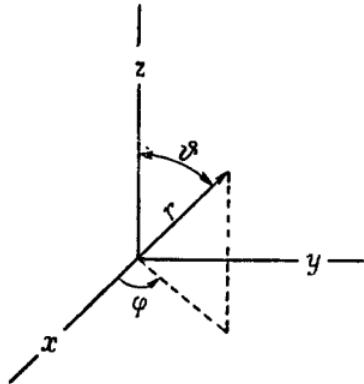
## ТРЕХМЕРНАЯ ГРУППА ЧИСТЫХ ВРАЩЕНИЙ

## Сферические гармоники

1. Неприводимые представления трехмерной группы вращений, так же как и представления двумерной группы, можно получить с помощью дифференциального уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial z^2} = 0, \quad (15.1)$$

если рассматривать однородные полиномы  $l$ -й степени, удовлетворяющие этому уравнению. Ортогональное преобразование  $R$  такого полинома приводит к другому полиному  $l$ -й степени, который также



Фиг. 7. Полярные координаты  $r, \theta$  и  $\varphi$ .

является решением уравнения (15.1) и который поэтому может быть выражен в виде линейной комбинации непреобразованных полиномов. Коэффициенты образуют представление, обозначаемое через  $\mathfrak{D}^{(l)}(R)$ . Поскольку неприводимые представления трехмерной группы вращений мы найдем иным способом, обсудим метод, связанный с уравнением Лапласа, лишь кратко.

Для решения уравнения (15.1) обычно вводят полярные координаты  $r, \theta$  и  $\varphi$  вместо  $x, y$  и  $z$  (см. фиг. 7); тогда полиномы  $l$ -й степени имеют вид  $r^l Y_{lm}(\theta, \varphi)$ . Если подставить это выражение в уравнение (15.1) (записанное в полярных координатах), то  $r$

выпадает и получается дифференциальное уравнение по переменным  $\theta$  и  $\varphi$  (включающее  $l$ ).  $2l+1$  линейно независимых решений этого уравнения<sup>1)</sup>

$$Y_{l,-l}(\theta, \varphi), Y_{l,-l+1}(\theta, \varphi), \dots, Y_{l,l-1}(\theta, \varphi), Y_{l,l}(\theta, \varphi) \quad (15.2)$$

известны как сферические гармоники<sup>2)</sup>  $l$ -й степени. Они имеют вид

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \Phi_m(\varphi) \Theta_{lm}(\theta), \quad (15.3)$$

где

$$\Phi_m(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi},$$

$$\Theta_{lm}(\theta) = (-1)^m \left[ \frac{2l+1}{2} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \right]^{1/2} \sin^m \theta \frac{d^m}{d(\cos \theta)^m} P_l(\cos \theta) \quad (m \geq 0), \quad (15.3a)$$

$$\Theta_{l,-m}(\theta) = \left[ \frac{2l+1}{2} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \right]^{1/2} \sin^m \theta \frac{d^m}{d(\cos \theta)^m} P_l(\cos \theta).$$

Функции  $P_l(\cos \theta)$  являются полиномами Лежандра, определяемыми, например, формулой Родрига

$$P_l(\cos \theta) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{d(\cos \theta)^l} (\cos^2 \theta - 1)^l. \quad (15.3b)$$

При  $\theta = 0$  все  $Y_{lm}$  обращаются в нуль, кроме  $Y_{l0}$ . Это так и должно быть, потому что азимут  $\varphi$  не определен при  $\theta = 0$ ; следовательно, в этой точке значение функции

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) \sim e^{ilm\varphi} P_l^m(\cos \theta)$$

не может зависеть от  $\varphi$ <sup>3)</sup>.

Весьма важна зависимость (15.3) от  $\varphi$ . Если применить оператор  $P_R$  к  $r^l Y_{lm}(\theta, \varphi)$ , где  $R$  означает вращение на угол  $\alpha$  вокруг оси  $Z$ , радиус и полярный угол  $\theta$  не меняется, а  $\varphi$  переходит

<sup>1)</sup> См., например, D. Hilbert, R. Courant, Methoden der Mathematischen Physik, Berlin, 1924, S. 420, 66, 265 (см. перевод: Д. Гильберт, Р. Курант, Методы математической физики, т. I, М. — Л., 1957).

<sup>2)</sup> Здесь и в дальнейшем фазы собственных функций выбраны так, чтобы они соответствовали условиям, принятым в книге: E. U. Condon, G. H. Shortley, The Theory of Atomic Spectra, London — New York, 1953 (см. перевод с 1-го издания: Е. Кондон, Г. Шортли, Теория атомных спектров, ИЛ, 1949).

<sup>3)</sup> Функции  $\Theta_{lm}$  ( $m \geq 0$ ) без квадратной скобки в (15.3a) являются присоединенными полиномами Лежандра и часто обозначаются через  $P_l^m(\cos \theta)$ .

в  $\varphi + \alpha$ . Поэтому, если мы обозначим вращение с углами Эйлера  $\alpha, \beta, \gamma$  через  $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ , то

$$\mathbf{P}_{\{\alpha\}} r^l Y_{lm}(\theta, \varphi) = r^l \frac{e^{im(\varphi+\alpha)}}{\sqrt{2\pi}} \Theta_{lm}(\theta) = e^{im\alpha} r^l Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (15.4)$$

Строки и столбцы  $(2l+1)$ -мерного представления, принадлежащего сферическим гармоникам степени  $l$ , нумеруются вторыми индексами соответствующих сферических гармоник от  $-l$  до  $l$ . Тогда

$$\mathbf{P}_{\{\alpha\}} r^l Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sum_{m'=-l}^l \mathfrak{D}^{(l)}(\{\alpha, \beta, \gamma\})_{m'm} r^l Y_{lm'}(\theta, \varphi). \quad (15.5)$$

Приравнивая коэффициенты, как обычно, получаем

$$\mathfrak{D}^{(l)}(\{\alpha, 0, 0\})_{m'm} = e^{im\alpha} \delta_{mm'}.$$

Таким образом, в представлении  $\mathfrak{D}^{(l)}$  матрицы, соответствующие вращениям вокруг оси  $Z$ , диагональны. Для вращения на угол  $\alpha$  мы имеем матрицу представления

$$\mathfrak{D}^{(l)}(\{\alpha, 0, 0\}) = \begin{pmatrix} e^{-il\alpha} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i(l-1)\alpha} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & e^{i(l-1)\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & e^{il\alpha} \end{pmatrix}. \quad (15.6)$$

Покажем теперь, что представления  $\mathfrak{D}^{(l)}$  неприводимы, доказав, что всякая матрица, коммутирующая с матрицами  $\mathfrak{D}^{(l)}(\{\alpha, \beta, \gamma\})$  при всех значениях  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$ , с необходимостью является постоянной матрицей. Прежде всего только диагональная матрица коммутирует со всеми матрицами (15.6). Поэтому матрица, коммутирующая с  $\mathfrak{D}^{(l)}(\{\alpha, \beta, \gamma\})$ , непременно является диагональной матрицей. Более того, ниже мы увидим, что в общем случае (т. е. за исключением определенных дискретных значений  $\beta$ ) в нулевой строке матрицы  $\mathfrak{D}^{(l)}(\{0, \beta, 0\})$  нет нулей. Тогда только диагональная матрица, у которой все диагональные элементы равны (т. е. постоянная матрица), коммутирует с этими матрицами. Чтобы убедиться в этом, предположим, что диагональная матрица с элементами  $d_k$  коммутирует с  $\mathfrak{D}^{(l)}(\{0, \beta, 0\})$ ; элементами нулевой строки произведения являются

$$d_0 \mathfrak{D}^{(l)}(\{0, \beta, 0\})_{0k} = \mathfrak{D}^{(l)}(\{0, \beta, 0\})_{0k} d_k, \quad (15.E.1)$$

откуда следует, что  $d_0 = d_k$ .

В том, что  $\mathfrak{D}^{(l)}(\{0, \beta, 0\})$  в общем случае не содержит нулей в нулевой строке, можно убедиться следующим образом. Если  $R$  есть вращение на угол  $\beta$  вокруг оси  $Y$ , то  $P_R$  переводит точку  $(r, \theta, 0)$  в точку  $(r, \theta + \beta, 0)$ . Поэтому функции  $r^l Y_{lm}(\theta + \beta, 0)$  являются линейными комбинациями функций  $r^l Y_{lm'}(\theta, 0)$ , причем коэффициентами будут  $\mathfrak{D}^{(l)}(\{0, \beta, 0\})_{m'm}$ . Если мы рассмотрим точку  $\theta = 0$ , то в общем случае  $Y_{lm}(\beta, 0)$  не равно нулю, тогда как  $Y_{lm'}(0, 0)$  все равны нулю, кроме  $Y_{l,0}(0, 0)$ . Если бы теперь обращался в нуль коэффициент этого члена  $\mathfrak{D}^{(l)}(\{0, \beta, 0\})_{0m}$ , все члены в правой части равенства были бы равны нулю, тогда как левая часть была бы отлична от нуля; поэтому  $\mathfrak{D}^{(l)}(\{0, \beta, 0\})_{0m}$  не может обращаться в нуль.

2. Представления  $\mathfrak{D}^{(l)}(\{\alpha, \beta, \gamma\})$  являются, таким образом, неприводимыми при всех  $l = 0, 1, 2, \dots$ . Чтобы определить их характеры, вспомним, что следы матриц, принадлежащих одному классу, равны. Так как в этом случае класс характеризуется углом вращения  $\varphi$ , характер  $\chi^{(l)}(\varphi)$  является функцией лишь угла вращения и может быть вычислен, если найти след любой матрицы, соответствующей элементу с вращением на угол  $\varphi$ . Примером такой матрицы служит матрица (15.6), если  $\alpha = \varphi$ . Таким образом, мы получаем

$$\chi^{(l)}(\varphi) = \sum_{m=-l}^{+l} e^{im\varphi} = 1 + 2 \cos \varphi + 2 \cos 2\varphi + \dots + 2 \cos l\varphi. \quad (15.7)$$

Соотношения ортогональности [если использовать весовую функцию, определенную выражением (14.27)] принимают вид

$$8\pi g(E) \int_0^\pi \chi^{(l')}(\varphi)^* \chi^{(l)}(\varphi) (1 - \cos \varphi) d\varphi = 8\pi^2 g(E) \delta_{l'l}.$$

Это можно показать путем простого интегрирования. Легко видеть также, что, кроме  $\mathfrak{D}^{(l)}$ , не существует других неприводимых представлений. Действительно, характеры любого такого представления, умноженные на  $(1 - \cos \theta)$ , должны быть ортогональными всем  $\chi^{(l)}$  и, следовательно,  $\chi^{(l+1)} - \chi^{(l)}$ , т. е. функциям  $1, 2 \cos \varphi, 2 \cos 2\varphi, 2 \cos 3\varphi, \dots$  в области от  $\varphi = 0$  до  $\varphi = \pi$ ; поэтому, согласно теореме Фурье, они должны обращаться в нуль.

Из сказанного следует, что последовательность  $\mathfrak{D}^{(0)}, \mathfrak{D}^{(1)}, \mathfrak{D}^{(2)}, \dots$  включает все неэквивалентные неприводимые представления трехмерной группы чистых вращений. Их число бесконечно, как и должно быть, поскольку группа вращений имеет бесконечное число классов.

Тождественным представлением является  $\mathfrak{D}^{(0)}$ . Трехмерные ортогональные матрицы, как представление своей собственной группы, эквивалентны представлению  $\mathfrak{D}^{(1)}$ , как это можно видеть непосредственно либо из их размерности, либо из равенства характеров.

Всякое представление трехмерной группы вращений является комбинацией представлений  $\mathfrak{D}^{(0)}, \mathfrak{D}^{(1)}, \mathfrak{D}^{(2)}, \dots$  и определяется с точностью до преобразования подобия числом, сколько раз каждое отдельное  $\mathfrak{D}^{(0)}, \mathfrak{D}^{(1)}, \dots$  встречается в нем. Но эти числа  $A_0, A_1, A_2, \dots$  можно определить непосредственно, исходя из матриц, соответствующих подгруппе, являющейся двумерной группой вращений, т. е. вращений вокруг оси  $Z$ . Если представление  $\exp(it\varphi)$  двумерной группы вращений встречается  $a_m$  раз, то (при  $m \geq 0$ )  $a_m = A_m + A_{m+1} + \dots$  и  $\mathfrak{D}^{(l)}$  содержится во всем представлении  $A_l = a_l - a_{l+1}$  раз. Следует заметить, что к этому заключению можно прийти только в том случае, если заранее известно, что мы имеем дело с представлением; этот способ не может применяться к произвольной системе матриц.

Соотношение (15.6) определяет матрицы  $\mathfrak{D}^{(l)}(\{\alpha, 0, 0\}) = \mathfrak{D}^{(l)}(\{0, 0, \gamma\})$ ; мы знали бы все матрицы  $\mathfrak{D}^{(l)}(\{\alpha, \beta, \gamma\})$ , если бы знали также матрицы, соответствующие вращениям вокруг оси  $Y$ . Обозначим  $\mathfrak{D}^{(l)}(\{0, \beta, 0\})_{\lambda\lambda}$  через  $d^{(l)}(\beta)_{\lambda\lambda}$ . Вращение  $\{\alpha, \beta, \gamma\}$  является произведением трех вращений  $\{\alpha, 0, 0\}, \{0, \beta, 0\}$  и  $\{0, 0, \gamma\}$ . Поэтому соответствующая матрица имеет вид

$$\mathfrak{D}^{(l)}(\{\alpha, \beta, \gamma\}) = \mathfrak{D}^{(l)}(\{\alpha, 0, 0\}) \mathfrak{D}^{(l)}(\{0, \beta, 0\}) \mathfrak{D}^{(l)}(\{0, 0, \gamma\}).$$

Следовательно, общая матрица вращения может быть записана с помощью матрицы вращения вокруг оси  $Y$  в следующем виде:

$$\mathfrak{D}^{(l)}(\{\alpha, \beta, \gamma\})_{m'm} = e^{im'\alpha} d^{(l)}(\beta)_{m'm} e^{im\gamma}. \quad (15.8)$$

### Гомоморфизм двумерной унитарной группы на группу вращений

3. Выведем неприводимые представления трехмерной группы чистых вращений иным методом, предложенным Г. Вейлем. Мы переходим к этому методу несмотря на то, что наше обсуждение метода, использующего уравнение Лапласа, было весьма кратким, поскольку метод Вейля позволяет вывести так называемые „двузначные представления“ одновременно с собственными представлениями. В последующем изложении (связанном с теорией спина) эти представления будут играть такую же важную роль, как и собственные представления.

При исследовании симметрической группы можно ограничиться определением размерностей и характеров отдельных представлений; в противоположность этому, для изучения группы вращений представляют интерес не только характеры, но и элементы всех матриц представлений. Как мы увидим ниже, это происходит в силу того, что в физические величины все тождественные частицы входят одинаковым образом. Но различные направления в пространстве физически эквивалентны только в том случае, если эквивалентны все направления, притом не только для механической задачи, но и для интересующей нас физической величины. Например, направление оказывается уже выделенным, если рассматривается определенная компонента дипольного момента.

Начнем с трех простых лемм, которые, собственно говоря, относятся к элементарной теории матриц.

а) Матрица, преобразующая каждый вещественный вектор в вещественный же вектор, сама является вещественной, т. е. все ее элементы вещественны. Если такая матрица применяется к  $k$ -му единичному вектору ( $k$ -я компонента равна 1, а остальные равны 0), то результирующий вектор образуется из  $k$ -й строки матрицы. Следовательно, эта строка должна быть вещественной. Но это рассуждение применимо ко всем  $k$ , так что все строки матрицы должны быть вещественными.

б) В гл. 3 (стр. 37) мы видели, что матрица  $O$  является комплексно ортогональной, если она не меняет простого скалярного произведения двух произвольных векторов, т. е. если  $((a, b)) = ((Oa, Ob))$ . Эквивалентное условие может быть сформулировано с помощью одного произвольного вектора. Матрица  $O$  является комплексно ортогональной, если длина всякого отдельного произвольного вектора  $v$  остается неизменной при преобразовании с помощью  $O$ .

Рассмотрим два произвольных вектора  $a$  и  $b$ ; пусть  $v = a + b$ . Тогда наше новое условие комплексной ортогональности матрицы  $O$  имеет вид

$$((v, v)) = ((Ov, Ov)).$$

Используя тот факт, что  $((a, b)) = ((b, a))$ , находим

$$\begin{aligned} ((a + b, a + b)) &= ((a, a)) + ((b, b)) + 2((a, b)) = \\ &= ((Oa, Oa)) + ((Ob, Ob)) + 2((Oa, Ob)). \end{aligned}$$

Однако по условию имеем также, что  $((a, a)) = ((Oa, Oa))$  и  $((b, b)) = ((Ob, Ob))$ . Следовательно,

$$((a, b)) = ((Oa, Ob)),$$

откуда мы заключаем, что матрица  $O$  комплексно ортогональна. Аналогичным образом можно показать, что матрица  $U$  унитарна, если для любого вектора выполняется соотношение  $(v, v) = (Uv, Uv)$ .

Матрица, оставляющая любой вещественный вектор вещественным же и не меняющая длины этого вектора, соответствует *вращению*. Геометрической основой этой теоремы служит тот простой факт, что в случае, если все длины равны в первоначальной и преобразованной фигурах, углы должны быть также равны; следовательно, преобразование является просто вращением.

в) Определим теперь общий вид двумерной унитарной матрицы

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

с определителем +1, рассматривая элементы произведения  $\mathbf{u}\mathbf{u}^\dagger = 1$ . Из  $a^*c + b^*d = 0$  следует, что  $c = -b^*d/a^*$ ; подстановка этого в  $ad - bc = 1$  дает  $(aa^* + bb^*)d/a^* = 1$ . Далее, поскольку  $aa^* + bb^* = 1$ , находим, что  $d = a^*$  и  $c = -b^*$ . Общая двумерная унитарная матрица с определителем +1 имеет, таким образом, вид

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}, \quad (15.9)$$

где должно также иметь место равенство  $|a|^2 + |b|^2 = 1$ .

4. Рассмотрим теперь так называемые „матрицы Паули“

$$\mathbf{s}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{s}_y = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{s}_z = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (15.10)$$

Всякая двумерная матрица  $\mathbf{h}$  с нулевым следом может рассматриваться как линейная комбинация этих матриц:

$$\mathbf{h} = x\mathbf{s}_x + y\mathbf{s}_y + z\mathbf{s}_z = (\mathbf{r}, \mathbf{S}),$$

или в явном виде

$$\mathbf{h} = (\mathbf{r}, \mathbf{S}) = \begin{pmatrix} -z & x + iy \\ x - iy & +z \end{pmatrix}. \quad (15.10a)$$

Мы ввели обозначения  $2x = h_{12} + h_{21}$ ,  $2iy = h_{12} - h_{21}$  и  $z = -h_{11} = +h_{22}$ . В частности, если  $x$ ,  $y$  и  $z$  вещественны, то матрица  $\mathbf{h}$  эрмитова.

Если мы преобразуем матрицу  $\mathbf{h}$  с помощью произвольной унитарной матрицы  $\mathbf{u}$  с определителем 1, то снова получим матрицу  $\bar{\mathbf{h}} = \mathbf{u}\mathbf{h}\mathbf{u}^\dagger$  с нулевым следом; поэтому  $\bar{\mathbf{h}}$  также можно записать в виде линейной комбинации матриц  $\mathbf{s}_x$ ,  $\mathbf{s}_y$ ,  $\mathbf{s}_z$ :

$$\bar{\mathbf{h}} = \mathbf{u}\mathbf{h}\mathbf{u}^\dagger = \mathbf{u}(\mathbf{r}, \mathbf{S})\mathbf{u}^\dagger = x'\mathbf{s}_x + y'\mathbf{s}_y + z'\mathbf{s}_z = (\mathbf{r}', \mathbf{S}), \quad (15.11)$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -z & x + iy \\ x - iy & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^* & -b \\ b^* & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z' & x' + iy' \\ x' - iy' & z' \end{pmatrix}. \quad (15.11a)$$

Последнее соотношение определяет  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  как линейные функции величин  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Преобразование  $R_u$ , переводящее  $r = (xyz)$  в  $R_u r = r' = (x' y' z')$ , можно найти из (15.11а). Оно имеет вид

$$\left. \begin{aligned} x' &= \frac{1}{2}(a^2 + a^{*2} - b^2 - b^{*2})x + \\ &\quad + \frac{1}{2}i(a^2 - a^{*2} + b^2 - b^{*2})y + (a^*b^* + ab)z, \\ y' &= \frac{1}{2}i(a^{*2} - a^2 + b^2 - b^{*2})x + \\ &\quad + \frac{1}{2}(a^2 + a^{*2} + b^2 + b^{*2})y + i(a^*b^* - ab)z, \\ z' &= -(a^*b + ab^*)x + i(a^*b - ab^*)y + (aa^* - bb^*)z. \end{aligned} \right\} \quad (15.12)$$

Частный вид матрицы  $R_u$  в этом выражении не существен<sup>1)</sup>; важно лишь то, что

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad (15.13)$$

в силу равенства определителей матриц  $\bar{h}$  и  $h$ . Согласно лемме „б“, отсюда следует, что преобразование  $R_u$  должно быть комплексно ортогональным. Это можно также видеть непосредственно из соотношений (15.12).

Кроме того, матрица  $\bar{h}$  эрмитова, если такова же матрица  $h$ . Иными словами, вектор  $r' = (x' y' z')$  веществен, если веществен вектор  $r = (xyz)$ . Это означает, что, согласно лемме „а“,  $R_u$  является вещественным, как это непосредственно следует из (5.12). Следовательно,  $R_u$  представляет некоторое вращение; всякая двумерная матрица  $u$  с определителем 1 соответствует трехмерному вращению  $R_u$ ; это соответствие дается соотношениями (15.11) и (15.12).

Определитель матрицы  $R_u$  равен +1, так как при непрерывном изменении  $u$  к единичной матрице матрица  $R_u$  переходит непрерывно в трехмерную единичную матрицу. Если бы ее определитель был равен -1 в начале такого перехода, он должен был бы скачком измениться на +1. Так как это невозможно, то  $R_u$  есть чистое вращение для всех  $u$ .

Это соответствие таково, что произведение  $qu$  двух унитарных матриц  $q$  и  $u$  отвечает произведению  $R_{qu} = R_q \cdot R_u$  соответствующих вращений. Согласно соотношению (15.11), в котором вместо  $u$  подставлено  $q$ , имеем

$$q(r, S) q^\dagger = (R_q r, S); \quad (15.12a)$$

<sup>1)</sup> Комплексные числа  $a$  и  $b$  в (15.12), которые определяют вращение, называются параметрами Кейли — Клейна; для них  $|a|^2 + |b|^2 = 1$ . Ради краткости группу двумерных унитарных матриц с определителем 1 часто будем называть просто унитарной группой.

после преобразования с  $u$  это дает

$$uq(r, S) q^+ u^+ = u(R_q r, S) u^+ = (R_u R_q r, S) = (R_{uq} r, S),$$

если снова воспользоваться соотношением (15.11), заменяя в нем  $r$  на  $R_q r$ , а  $u$  на  $uq$ . Таким образом, между группой двумерных унитарных матриц с определителем +1 („унитарной группой“) и трехмерными вращениями существует гомоморфизм; это соответствие задается соотношениями (15.11) или (15.12). Заметим, однако, что до сих пор мы еще не показали, что гомоморфизм существует между двумерной унитарной группой и полной группой вращений. Это означало бы, что  $R_u$  включает все вращения, когда  $u$  покрывает всю унитарную группу. Это будет доказано несколько ниже. Следует также заметить, что гомоморфизм не является изоморфизмом, так как одному и тому же вращению соответствует более чем одна унитарная матрица. Подробнее это мы также увидим ниже.

Прежде всего примем, что  $u$  есть диагональная матрица  $u_1(\alpha)$  (т. е. мы полагаем  $b = 0$  и по причинам, которые будут ясны позднее,  $a = e^{-\frac{1}{2} i\alpha}$ ). Тогда  $|a|^2 = 1$  и  $\alpha$  вещественно,

$$u_1(\alpha) = \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{2} i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{+\frac{1}{2} i\alpha} \end{pmatrix}. \quad (15.14a)$$

Из (15.12) видно, что соответствующее вращение

$$R_{u_1} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (15.14a')$$

является вращением на угол  $\alpha$  вокруг оси  $Z$ . Предположим далее, что  $u$  вещественна,

$$u_2(\beta) = \begin{pmatrix} \cos \frac{1}{2} \beta & -\sin \frac{1}{2} \beta \\ \sin \frac{1}{2} \beta & \cos \frac{1}{2} \beta \end{pmatrix}. \quad (15.14b)$$

Согласно (15.12), соответствующее вращение

$$R_{u_2} = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix} \quad (15.14b')$$

является вращением на угол  $\beta$  вокруг оси  $Y$ . Произведение трех унитарных матриц  $u_1(\alpha) u_2(\beta) u_1(\gamma)$  соответствует произведению

вращения на угол  $\alpha$  вокруг оси  $Z$ , вращения на угол  $\beta$  вокруг оси  $Y$  и вращения на угол  $\gamma$  вокруг оси  $Z$ , т. е. вращению с углами Эйлера  $\alpha, \beta, \gamma$ . Отсюда следует, что соответствие, определенное соотношением (15.11), не только указывает трехмерное вращение для каждой двумерной унитарной матрицы, но и по крайней мере одну унитарную матрицу для каждого чистого вращения. В частности, матрица

$$\begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{\frac{1}{2}i\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{1}{2}\beta & -\sin \frac{1}{2}\beta \\ \sin \frac{1}{2}\beta & \cos \frac{1}{2}\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}i\gamma} & 0 \\ 0 & e^{\frac{1}{2}i\gamma} \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}i\alpha} \cos \frac{1}{2}\beta \cdot e^{-\frac{1}{2}i\gamma} & -e^{-\frac{1}{2}i\alpha} \sin \frac{1}{2}\beta \cdot e^{\frac{1}{2}i\gamma} \\ e^{\frac{1}{2}i\alpha} \sin \frac{1}{2}\beta \cdot e^{-\frac{1}{2}i\gamma} & e^{\frac{1}{2}i\alpha} \cos \frac{1}{2}\beta \cdot e^{\frac{1}{2}i\gamma} \end{pmatrix} \quad (15.15)$$

соответствует вращению  $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ . Таким образом, гомоморфизм является действительно гомоморфизмом унитарной группы на полную трехмерную группу вращений.

Остается еще открытым вопрос о кратности гомоморфизма, т. е. о том, сколько унитарных матриц  $u$  соответствуют одному и тому же вращению. Достаточно установить, сколько унитарных матриц  $u$  соответствуют тождественному элементу группы вращений, т. е. преобразованию  $x' = x, y' = y, z' = z$ . Для всех  $u_0$  этого частного вида тождество  $u_0 h u_0^\dagger = h$  должно выполняться для всех  $h$ ; это может быть только в том случае, если  $u_0$  является постоянной матрицей ( $b = 0$  и  $a = a^*$  вещественно)  $u_0 = (\pm 1)$  (так как  $|a|^2 + |b|^2 = 1$ ). Таким образом, две унитарные матрицы  $(+1)$  и  $(-1)$ , и только они, соответствуют тождественному элементу группы вращений. Эти два элемента образуют инвариантную подгруппу унитарной группы, а те элементы (и только те), которые входят в один и тот же смежный класс по инвариантной подгруппе, т. е.  $u$  и  $-u$ , соответствуют тому же вращению. То, что  $u$  и  $-u$  действительно соответствуют одному и тому же вращению, можно непосредственно видеть из (15.11) или (15.12).

С другой стороны, легко видеть, что в тригонометрические функции в (15.15) входят только половинные эйлеровы углы. Углы Эйлера определяются вращением лишь с точностью до целого числа  $2\pi$ , а половинные углы Эйлера — с точностью до целого числа  $\pi$ . Тогда тригонометрические функции в (15.15) определяются с точностью до знака.

Таким образом, мы получили важный результат: имеется двузначный гомоморфизм группы двумерных унитарных матриц с определителем 1 на трехмерную группу чистых вращений. Существует

взаимнооднозначное соответствие между парами унитарных матриц  $u$  и  $-u$  и вращениями  $R_u$ , притом так, что из  $uq = t$  следует также, что  $R_u R_q = R_t$ ; наоборот, из  $R_u R_q = R_t$  следует, что  $uq = \pm t$ . Если унитарная матрица  $u$  известна, то соответствующее вращение  $R_u$  получается проще всего с помощью (15.12); наоборот, унитарная матрица для вращения  $\{\alpha, \beta, \gamma\}$  находится наиболее прямым путем из (15.15).

### Представления унитарной группы

5. Полученный только что гомоморфизм устанавливает тесную связь между представлениями рассматриваемых двух групп. Из каждого представления  $D(R)$  меньшей группы, т. е. группы вращений в рассматриваемом случае, можно получить представление  $\mathfrak{U}(u)$  унитарной группы, как мы уже упоминали в другой связи в гл. 9. При этом матрица  $\mathfrak{U}(u) = D(R_u)$  представляет все элементы ( $u$  и  $-u$ ) второй группы, которые при гомоморфизме соответствуют одному и тому же элементу  $R_u$  первой группы. Так, в частности, матрица тождественного преобразования  $D(E)$  соответствует двум унитарным матрицам  $1$  и  $-1$ . Наоборот, если все представления унитарной группы известны, то можно выбрать такие, в которых одна и та же матрица представления  $\mathfrak{U}(u) = \mathfrak{U}(-u)$  соответствует обеим матрицам  $u$  и  $-u$ . Каждое из этих представлений позволяет образовать представление группы вращений, если матрицу  $D(R_u) = \mathfrak{U}(u) = \mathfrak{U}(-u)$  сопоставить вращению  $R_u$ . Таким путем можно получить все представления группы вращений.

В частности, пусть представление  $\mathfrak{U}(u)$  унитарной группы неприводимо. Элемент  $u = -1$  коммутирует со всеми элементами группы; следовательно,  $\mathfrak{U}(-1)$  должна коммутировать со всеми  $\mathfrak{U}(u)$ . Поэтому, в соответствии с общей теоремой о неприводимых представлениях, она является постоянной матрицей. Так как  $(-1)^2 = 1$ , квадрат этого элемента группы должен быть представлен единичной матрицей<sup>1)</sup>  $\mathfrak{U}(1)$ . Тогда

$$\mathfrak{U}(-1) = +\mathfrak{U}(1) \text{ или } \mathfrak{U}(-1) = -\mathfrak{U}(1).$$

Представления, в которых  $\mathfrak{U}(-1) = +\mathfrak{U}(1)$ , называются *четными представлениями*. В четных представлениях  $\mathfrak{U}(-u) = \mathfrak{U}(u)$ .

$\cdot \mathfrak{U}(u) = \mathfrak{U}(1) \cdot \mathfrak{U}(u) = \mathfrak{U}(u)$ , т. е. одна и та же матрица всегда соответствует двум элементам  $u$  и  $-u$ . Поэтому четные предста-

<sup>1)</sup> Матрица  $\mathfrak{U}(1)$ , соответствующая тождественному элементу группы, является единичной матрицей с размерностью представления. Мы пользуемся символом  $\mathfrak{U}(1)$  вместо более простого символа 1, чтобы избежать смешивания с тождественным элементом 1 унитарной группы, который всегда является двумерным.

вления дают регулярные представления группы вращений, которые все уже известны из п. 1 настоящей главы.

Представления, в которых  $\mathbf{U}(-1) = -\mathbf{U}(1)$ , называются нечетными представлениями. В нечетных представлениях  $\mathbf{U}(-u) = -\mathbf{U}(-1)\mathbf{U}(u) = -\mathbf{U}(u)$ ; элементам, отличающимся знаком, соответствуют матрицы противоположного знака. Нечетные представления унитарной группы не дают регулярных представлений группы вращений, но дают лишь „двузначные“ или „полузначные“ представления, в которых не одна матрица, а две матрицы  $\mathbf{U}(u)$  и  $\mathbf{U}(-u) = -\mathbf{U}(u)$  соответствуют каждому вращению  $R_u = R_{-u}$ . Эти две матрицы отличаются знаками их элементов.

Одно нечетное представление унитарной группы образуется самой группой:  $\mathbf{U}(u) = u$ .

В соответствующем „двузначном“ представлении группы вращений  $\mathfrak{D}^{(1/2)}$  вращение  $\{\alpha, \beta, \gamma\}$  соответствует той матрице  $u = \mathbf{U}(u)$ , которая соответствует  $R$  в гомоморфизме. Таким образом, согласно (15.15),

$$\mathfrak{D}^{(1/2)}(\{\alpha, \beta, \gamma\}) = \pm \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}i\alpha} \cos \frac{1}{2}\beta \cdot e^{-\frac{1}{2}i\gamma} & -e^{-\frac{1}{2}i\alpha} \sin \frac{1}{2}\beta \cdot e^{\frac{1}{2}i\gamma} \\ e^{\frac{1}{2}i\alpha} \sin \frac{1}{2}\beta \cdot e^{-\frac{1}{2}i\gamma} & e^{\frac{1}{2}i\alpha} \cos \frac{1}{2}\beta \cdot e^{\frac{1}{2}i\gamma} \end{pmatrix}. \quad (15.16)$$

Первые строку или столбец обычно называют  $-1/2$ -ми строкой или столбцом; вторые  $+1/2$ -ми строкой или столбцом. Выражение (15.16) дает нам первое двузначное представление группы вращений.

Для двузначных представлений не всегда выполняется равенство  $\mathfrak{D}(R) \cdot \mathfrak{D}(S) = \mathfrak{D}(RS)$ ; гарантируется лишь равенство  $\mathfrak{D}(R) \cdot \mathfrak{D}(S) = \pm \mathfrak{D}(RS)$ , так как матрицы представления определяются лишь с точностью до знака. Более того, невозможно определить знаки всех матриц таким образом, чтобы был справедлив простой закон перемножения однозначных представлений. Таким образом, двузначное представление не имеет строения вещественного (однозначного) представления, в котором знаки просто оставлены неопределенными. Это легко видеть, например, из (15.16): вращению на угол  $\pi$  вокруг оси  $Z$  соответствует матрица  $\pm i s_z$ ; квадрат этой матрицы,  $-1 = -s_z^2$ , соответствует вращению на угол  $2\pi$ . Но такое вращение вообще не является собственно вращением, так как все остается без изменения; оно совпадает с тождественным элементом группы. Поэтому единичная матрица также должна соответствовать ему; сделать это представление однозначным путем выбора знаков в (15.16) невозможно.

6. Определим теперь неприводимые представления двумерной унитарной группы.

Рассмотрим однородный полином  $n$ -й степени относительно переменных  $\varepsilon$  и  $\zeta$ . Если мы произведем унитарное преобразование переменных

$$\begin{aligned}\varepsilon' &= a\varepsilon + b\zeta, \\ \zeta' &= -b^*\varepsilon + a^*\zeta,\end{aligned}\quad (15.17)$$

то снова получим однородный полином  $n$ -й степени. (Хотя это справедливо для произвольных линейных преобразований, мы ограничимся унитарными преобразованиями.) Поэтому  $n+1$  полиномов  $\varepsilon^n, \varepsilon^{n-1}\zeta, \varepsilon^{n-2}\zeta^2, \dots, \varepsilon\zeta^{n-1}, \zeta^n$  принадлежит  $(n+1)$ -мерному представлению унитарной группы. Чтобы сразу перейти к привычным обозначениям для группы вращений, положим  $n = 2j$ ; тогда размерность представления будет равна  $2j+1$ , причем  $j$  может быть либо целым, либо полуцелым<sup>1)</sup>. Пусть полином имеет вид

$$f_\mu(\varepsilon, \zeta) = \frac{\varepsilon^{j+\mu} \zeta^{j-\mu}}{\sqrt{(j+\mu)!(j-\mu)!}}, \quad (15.18)$$

где  $\mu$  может принимать  $2j+1$  значений  $-j, -j+1, -j+2, \dots, j-2, j-1, j$ ; эти значения являются целыми для целых  $j$  и полуцелыми — для полуцелых  $j$ . Постоянный множитель  $[(j+\mu)!(j-\mu)!]^{-1/2}$  придан произведению  $\varepsilon^{j+\mu} \zeta^{j-\mu}$ , поскольку, как мы покажем, он делает представление  $\mathbf{U}^{(j)}$  для  $2j+1$  функций (15.18) унитарным.

Построим теперь<sup>2)</sup> произведение  $\mathbf{P}_u f_\mu(\varepsilon, \zeta)$  в соответствии с равенством (11.19):

$$\mathbf{P}_u f_\mu(\varepsilon, \zeta) = f_\mu(a^*\varepsilon - b\zeta, b^*\varepsilon + a\zeta) = \frac{(a^*\varepsilon - b\zeta)^{j+\mu} (b^*\varepsilon + a\zeta)^{j-\mu}}{\sqrt{(j+\mu)!(j-\mu)!}}. \quad (15.19)$$

Чтобы выразить правую часть в виде линейной комбинации полиномов  $f_\mu$ , разложим ее по формуле бинома; она примет вид

$$\sum_{x=0}^{j+\mu} \sum_{x'=0}^{j-\mu} (-1)^x \frac{\sqrt{(j+\mu)!(j-\mu)!}}{x! x'! (j+\mu-x)!(j-\mu-x')!} \times \times a^{x'} a^{j+\mu-x} b^x b^{*j-\mu-x'} \varepsilon^{2j-x-x'} \zeta^{x+x'}. \quad (15.19a)$$

<sup>1)</sup> Это значит, что  $j$  отличается от целого числа на  $1/2$ .

<sup>2)</sup> Здесь  $\mathbf{u}$  является унитарным преобразованием (15.17). В гл. 11 оператор  $\mathbf{P}_R$  был определен только для вещественных ортогональных  $\mathbf{R}$ . В данном случае, когда  $\mathbf{u}$  унитарно, из (11.18a) вместо (11.18b) следует

$$x_i = \sum_j R_{ji}^* x'_j;$$

таким образом,  $R_{ji}^*$  выступает вместо  $R_{ji}$ .

Здесь можно опустить пределы суммирования и суммировать по всем целым числам, так как биномиальные коэффициенты равны нулю, когда  $x, x'$  лежат вне области суммирования. Если положить  $j - x - x' = \mu'$ , то  $\mu'$  должно пробегать все целочисленные значения для целых  $j$  и все полуцелые значения для полуцелых  $j$ . Выражая все функции от  $\varepsilon$  и  $\zeta$  в (15.19a) через  $f_\mu$ , согласно (15.18), получаем

$$\begin{aligned} P_u f_\mu(\varepsilon, \zeta) = & \sum_{\mu'} \sum_x (-1)^x \frac{\sqrt{(j+\mu)! (j-\mu)! (j+\mu')! (j-\mu')!}}{x! (j-\mu'-x)! (j+\mu-x)! (x+\mu'-\mu)!} \times \\ & \times a^{j-\mu'-x} a^{*j+\mu-x} b^x b^{*x+\mu'-\mu} f_{\mu'}(\varepsilon, \zeta). \end{aligned} \quad (15.20)$$

Коэффициент при  $f_{\mu'}$  в правой части является элементом  $U^{(j)}(u)_{\mu' \mu}$ :

$$\begin{aligned} U^{(j)}(u)_{\mu' \mu} = & \sum_x (-1)^x \frac{\sqrt{(j+\mu)! (j-\mu)! (j+\mu')! (j-\mu')!}}{(j-\mu'-x)! (j+\mu-x)! x! (x+\mu'-\mu)!} \times \\ & \times a^{j-\mu'-x} a^{*j+\mu-x} b^x b^{*x+\mu'-\mu}. \end{aligned} \quad (15.21)$$

Выражение при  $\mu' = j$  (для последних строк матриц представления) несколько проще, так как факториальный множитель исключает все члены, кроме членов с  $x = 0$ :

$$U^{(j)}(u)_{j \mu} = \sqrt{\frac{(2j)!}{(j+\mu)! (j-\mu)!}} a^{*j+\mu} b^{*j-\mu}. \quad (15.21a)$$

Мы получили теперь коэффициенты для представлений  $U^{(j)}$  при всех возможных значениях  $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$ ; остается лишь показать, что представления (15.21) унитарны и неприводимы и что двумерная унитарная группа не имеет других представлений, кроме найденных здесь.

7. Докажем прежде всего унитарность представления (15.21). Доказательство опирается на то обстоятельство, что полиномы  $f_\mu$  в (15.18) выбраны так, чтобы

$$\sum_{\mu=-j}^j f_\mu f_\mu^* = \sum_{\mu} \frac{1}{(j+\mu)! (j-\mu)!} |\varepsilon|^{2(j+\mu)} |\zeta|^{2(j-\mu)} = \frac{(|\varepsilon|^2 + |\zeta|^2)^{2j}}{(2j)!}. \quad (15.22)$$

Аналогичным образом, в силу определения (15.19) функций  $P_u f_\mu$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{\mu} |P_u f_\mu(\varepsilon, \zeta)|^2 = & \sum_{\mu} \frac{|a^* \varepsilon - b \zeta|^{2(j+\mu)} \cdot |b^* \varepsilon + a \zeta|^{2(j-\mu)}}{(j+\mu)! (j-\mu)!} = \\ = & \frac{1}{(2j)!} (|a^* \varepsilon - b \zeta|^2 + |b^* \varepsilon + a \zeta|^2)^{2j} = \\ = & \frac{1}{(2j)!} (|\varepsilon|^2 + |\zeta|^2)^{2j}. \end{aligned} \quad (15.22a)$$

Последнее выражение получается либо прямым вычислением, либо следует из свойства унитарности матриц  $u$ . Сравнение с (15.22) показывает, что сумма  $\sum_{\mu} f_{\mu} f_{\mu}^*$  инвариантна относительно операций  $P_u$ , так что

$$\sum_{\mu} |P_u f_{\mu}|^2 = \sum_{\mu} |f_{\mu}|^2. \quad (15.23)$$

Это обеспечивает унитарность представления  $U^{(j)}$ . Действительно, подстановка выражения для  $P_u f_{\mu}$  через  $f_{\mu}$  с помощью этого представления дает

$$\sum_{\mu} \sum_{\mu'} U_{\mu' \mu}^{(j)} f_{\mu'} \sum_{\mu''} U_{\mu'' \mu}^{(j)*} f_{\mu''}^* = \sum_{\mu} f_{\mu} f_{\mu}^*. \quad (15.23a)$$

Если  $(2j+1)^2$  функций  $f_{\mu'} f_{\mu''}$  рассматривать как линейно независимые, из соотношений (15.23) и (15.23a) непосредственно следует

$$\sum_{\mu} U^{(j)}(u)_{\mu' \mu} U^{(j)}(u)_{\mu'' \mu}^* = \delta_{\mu' \mu''}, \quad (15.24)$$

что является условием унитарности  $U^{(j)}$ .

Таким образом, унитарность  $U^{(j)}$  установлена, коль скоро показано, что между  $f_{\mu'} f_{\mu''}^*$  не существует линейного соотношения, т. е. что из равенства

$$\sum_{\mu', \mu''} c_{\mu' \mu''} e^{j + \mu' \zeta^j - \mu'' \zeta^{*j}} e^{*j + \mu'' \zeta^{*j} - \mu'} = 0 \quad (15.E.2)$$

с необходимостью следует  $c_{\mu' \mu''} = 0$ . Равенство (15.E.2) должно иметь место при всех значениях переменных  $\varepsilon$  и  $\zeta$ , так как соотношения (15.23) и (15.23a) выполняются при всех комплексных  $\varepsilon$  и  $\zeta$ . Предположим, в частности, что  $\varepsilon$  вещественно; тогда при  $\lambda = 2j + \mu' + \mu''$  требование обращения в нуль коэффициента при  $\varepsilon^{\lambda}$  дает (после деления на  $\zeta^j \zeta^{*3j-\lambda}$ )

$$\sum_{\mu'} c_{\mu', \lambda-2j-\mu'} \left(\frac{\zeta^*}{\zeta}\right)^{\mu'} = 0.$$

Но это значит, что  $c_{\mu', \lambda-2j-\mu'} = 0$ . Линейная независимость произведений  $f_{\mu'} f_{\mu''}^*$  также следует отсюда, поскольку  $(\zeta^*/\zeta)$  является переменной, пробегающей свободно всю комплексную единичную окружность. Она может быть записана в виде  $\exp i\tau$ , где  $\tau$  может принимать все вещественные значения. Но, чтобы выполнялось соотношение

$$\sum_{\mu'} c_{\mu', \lambda-2j-\mu'} e^{i\mu' \tau} = 0$$

при всех вещественных значениях  $\tau$ , все  $c$  должны обращаться в нуль.

8. Неприводимость системы матриц  $\mathfrak{U}^{(j)}$  может быть установлена точно таким же методом, каким была установлена неприводимость представлений  $\mathfrak{D}^{(l)}$  группы вращений в п. 1 настоящей главы. А именно достаточно показать, что всякая матрица  $M$ , коммутирующая с  $\mathfrak{U}^{(j)}(u)$  при всех  $u$  (т. е. при всех значениях  $a$  и  $b$ , удовлетворяющих условию  $|a|^2 + |b|^2 = 1$ ), должна быть с необходимостью постоянной матрицей. Рассмотрим прежде всего преобразования  $u$ , имеющие вид  $u_1(\alpha)$  из (15.14a); иначе говоря, положим  $b = 0$ ,  $a = \exp\left(-\frac{1}{2}i\alpha\right)$ . Тогда в сумме (15.21) остается лишь член с  $\kappa = 0$ , причем он не равен нулю только при  $\mu = \mu'$ ; мы получаем

$$\mathfrak{U}^{(j)}(u_1(\alpha))_{\mu' \mu} = \delta_{\mu' \mu} e^{i\mu\alpha}. \quad (15.25)$$

Те матрицы  $\mathfrak{U}^{(j)}$ , которые соответствуют унитарным преобразованиям вида  $u_1(\alpha)$ , имеют ту же форму, что и (15.6), с той лишь разницей, что, в отличие от  $l$  в (15.6),  $j$  может принимать как целые, так и полуцелые значения. Но с этими матрицами коммутирует только диагональная матрица, так что  $M$  должна быть диагональной. Заметим далее, что, согласно (15.21a), ни один элемент последней строки матрицы  $\mathfrak{U}^{(j)}$  не обращается в нуль тождественно. Приравнивая затем элементы  $j$ -й строки матриц  $\mathfrak{U}^{(j)}M$  и  $M\mathfrak{U}^{(j)}$ , как это делалось в соотношении (15.E.1), мы заключаем, что

$$\mathfrak{U}_{jk}^{(j)} M_{kk} = M_{jj} \mathfrak{U}_{jk}^{(j)}, \quad M_{kk} = M_{jj},$$

и  $M$  является постоянной матрицей. Следовательно, представления  $\mathfrak{U}^{(j)}$  неприводимы.

9. Можно также показать, что не существует других представлений унитарной группы, кроме  $\mathfrak{U}^{(j)}$ , если использовать тот же метод, которым мы воспользовались в п. 2 настоящей главы применительно к представлениям группы вращений. Определим прежде всего классы „унитарной группы“. Так как всякая унитарная матрица может быть диагонализована преобразованием с некоторой унитарной матрицей, все наши матрицы после этого преобразования имеют вид  $u_1(\alpha)$ , где  $\alpha$  принимает значения от 0 до  $2\pi$  [ $u_1(-\alpha)$  эквивалентна  $u_1(\alpha)$ ]. Все  $u$ , которые могут быть преобразованы к одному и тому же виду  $u_1(\alpha)$ , находятся в одном классе. (Предположение о том, что следует рассматривать только элементы группы — только унитарные матрицы с определителем 1, — не является ограничением, так как всякую унитарную матрицу можно записать в виде

произведения унитарной матрицы с определителем 1 и постоянной матрицы, а преобразование с помощью постоянной матрицы может быть просто опущено.)

Чтобы найти характер  $\mathfrak{U}^{(j)}$ , достаточно вычислить след одного из элементов каждого класса. Возьмем саму  $\mathfrak{u}_1(\alpha)$  в качестве элемента класса, к которому принадлежит  $\mathfrak{u}_1(\alpha)$ ; соответствующая матрица дается выражением (15.25). Ее след равен

$$\xi_j(\alpha) = \sum_{\mu=-j}^j e^{i\mu\alpha}, \quad (15.26)$$

где суммирование проводится по всем целым значениям от нижнего предела до верхнего.

Теперь очевидно, что унитарная группа не может иметь других неприводимых представлений, кроме  $\mathfrak{U}^{(j)}$  при  $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$ . Дело в том, что характер такого представления после умножения на весовую функцию должен быть ортогональным всем  $\xi_j(\alpha)$  и, следовательно, функциям  $\xi_0(\alpha), \xi_{1/2}(\alpha), \xi_1(\alpha) — \xi_0(\alpha), \xi_{3/2}(\alpha) — \xi_{1/2}(\alpha), \dots$ . Но функция, ортогональная 1,  $2\cos\frac{1}{2}\alpha, 2\cos\alpha, 2\cos\left(\frac{3}{2}\alpha\right)$ , ... в области от 0 до  $2\pi$ , обращается в нуль в соответствии с теоремой Фурье.

### Представления трехмерной группы чистых вращений

10. Всякое представление  $\mathfrak{U}^{(j)}$  унитарной группы является одновременно представлением — однозначным или двузначным — группы вращений. Матрица  $\mathfrak{U}^{(j)}(\mathbf{u})$  соответствует вращению  $\{\alpha\beta\gamma\}$ , если  $\mathbf{u}$  является унитарным преобразованием, соответствующим в гомоморфизме вращению  $\{\alpha\beta\gamma\}$ . Коэффициенты  $a$  и  $b$  преобразования  $\mathbf{u}$  даются выражением (15.15) в виде

$$a = e^{-\frac{1}{2}i\alpha} \cos \frac{1}{2}\beta \cdot e^{-\frac{1}{2}i\gamma}, \quad b = -e^{-\frac{1}{2}i\alpha} \sin \frac{1}{2}\beta \cdot e^{\frac{1}{2}i\gamma}. \quad (15.15a)$$

Чтобы получить элементы матрицы представления, соответствующие вращению  $\{\alpha\beta\gamma\}$ , выражения (15.15a) следует подставить в (15.21). Для сохранения преемственности обозначений, использованных в (15.16), преобразуем представление, получающееся после этой подстановки, с помощью диагональной матрицы  $M_{x\lambda} = \delta_{x\lambda}(i)^{-2x}$ : иначе говоря, умножим  $\mu$ -ю строку на  $i^{-2\mu}$ , а  $\mu$ -й столбец — на  $i^{2\mu}$ , так что коэффициент с индексами  $\mu\mu'$  умножается на  $(i)^{2(\mu-\mu')} = (-1)^{\mu-\mu'}$ .

Обозначим представление, получающееся при этом из  $\mathfrak{U}^{(j)}$ , через  $\mathfrak{D}^{(j)}(\{\alpha\beta\gamma\})$ ; его коэффициентами являются

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}^{(j)}(\{\alpha\beta\gamma\})_{\mu'\mu} = & \sum_x (-1)^x \frac{V(j+\mu)!(j-\mu)!(j+\mu')!(j-\mu')!}{(j-\mu'-x)!(j+\mu-x)!x!(x+\mu'-\mu)!} \times \\ & \times e^{i\mu'\alpha} \cos^{2j+\mu-\mu'-2x} \frac{1}{2} \beta \cdot \sin^{2x+\mu'-\mu} \frac{1}{2} \beta \cdot e^{i\mu\gamma}. \quad (15.27)\end{aligned}$$

Представление  $\mathfrak{D}^{(j)}$  является  $(2j+1)$ -мерным, где  $j$  может быть либо целым, либо полуцелым. Строки и столбцы  $\mathfrak{D}^{(j)}$  пронумерованы целыми или полуцелыми числами  $-j, -j+1, \dots, j-1, j$ . Суммирование по  $x$  в (15.27) может производиться по всем целым числам, так как бесконечности факториалов в знаменателе ограничивают область промежутком между наибольшим из чисел 0 и  $\mu-\mu'$  и наименьшим из чисел  $j-\mu'$  и  $j+\mu$ . Формулы для  $\mu'=j$  и  $\mu'=-j$  особенно просты; в первом случае остается лишь член с  $x=0$ , а во втором — только с  $x=j+\mu$ :

$$\mathfrak{D}^{(j)}(\{\alpha\beta\gamma\})_{j\mu} = \sqrt{\binom{2j}{j-\mu}} e^{ij\alpha} \cdot \cos^{j+\mu} \frac{1}{2} \beta \cdot \sin^{j-\mu} \frac{1}{2} \beta \cdot e^{i\mu\gamma}, \quad (15.27a)$$

$$\mathfrak{D}^{(j)}(\{\alpha\beta\gamma\})_{-j\mu} = (-1)^{j+\mu} \sqrt{\binom{2j}{j-\mu}} e^{-ij\alpha} \cos^{j-\mu} \frac{1}{2} \beta \cdot \sin^{j+\mu} \frac{1}{2} \beta \cdot e^{i\mu\gamma}. \quad (15.27b)$$

Все коэффициенты представлений для вращений вокруг оси  $Z$  также принимают особенно простой вид. Вращение на угол  $\alpha$  вокруг оси  $Z$  соответствует в гомоморфизме унитарному преобразованию  $u_1(\alpha)$ ; коэффициенты соответствующей матрицы представления даются выражением (15.25). Матрица в  $\mathfrak{D}^{(j)}$ , соответствующая вращению  $\{\alpha, 0, 0\}$ , является поэтому диагональной матрицей с диагональными элементами  $\exp(-ija)$ ,  $\exp(-i(j-1)\alpha)$ ,  $\dots$ ,  $\exp(+i(j-1)\alpha)$ ,  $\exp(ija)$ . Тот же самый результат получается непосредственно из (15.27), если положить  $\beta=\gamma=0$ . Матрица  $\mathfrak{D}^{(j)}(\{\alpha, 0, 0\})$  уже была явно представлена формулой (15.6), которая применима теперь не только при целых  $i$ , но и при полуцелых  $j$ . Это также относится к (15.8).

Характер  $\chi^{(j)}(\varphi)$  матрицы  $\mathfrak{D}^{(j)}$  является следом вращения на угол  $\varphi$ :

$$\begin{aligned}\chi^{(j)}(\varphi) = & \sum_{\mu=-j}^j e^{i\mu\varphi} = \\ = & \begin{cases} 1 + 2 \cos \varphi + \dots + 2 \cos j\varphi & (j \text{ целое}), \\ 2 \cos \frac{1}{2}\varphi + 2 \cos \frac{3}{2}\varphi + \dots + 2 \cos j\varphi & (j \text{ полуцелое}). \end{cases} \quad (15.28)\end{aligned}$$

Регулярные представления включают только те  $j$ , для которых  $\mathfrak{U}^{(j)}(-1) = \mathfrak{U}^{(j)}(\mu_1(2\pi))$  есть положительная единичная матрица. Из (15.25) видно, что это имеет место, когда  $\mu$  целое, т. е. когда  $j$  целое. Тогда  $\mathfrak{D}^{(j)}$  совпадает с  $\mathfrak{D}^{(l)}$ , определенным в п. 1 настоящей главы; это также проявляется в равенстве характеров.

При полуцелых  $j$  представление  $\mathfrak{D}^{(j)}$  двузначно; вращение  $\{\alpha\beta\gamma\}$  соответствует матрицам  $\pm \mathfrak{D}^{(j)}(\{\alpha\beta\gamma\})$ . Это не означает, что знаки элементов матриц  $\mathfrak{D}^{(j)}$  можно менять по отдельности; может изменяться лишь знак всей матрицы, или знаки всех элементов одновременно. Вращение  $R_u$  соответствует двум унитарным матрицам  $u$  и  $-u$ , причем каждой из них соответствует одна матрица  $\mathfrak{U}^{(j)}(u)$  и  $\mathfrak{U}^{(j)}(-u)$ ; при полуцелых  $j$  вторая из них равна  $-\mathfrak{U}^{(j)}(u)$ . Только эти две матрицы, и никакие другие, соответствуют в  $\mathfrak{D}^{(j)}$  вращению  $R_u$ . В действительности, двузначные представления *вообще не являются представлениями*. Однако они понадобятся для изложения теории спина Паули.

Теория представлений группы вращений была развита Шуром. Двузначные представления впервые получил Г. Вейль.

11. Дадим теперь несколько первых представлений в явном виде.  $\mathfrak{D}^{(0)}(R) = (1)$ , а  $\mathfrak{D}^{(1/2)}(R)$  дается выражением (15.16). Следующее представление  $\mathfrak{D}^{(1)}(R)$  имеет вид

$$\mathfrak{D}^{(1)}(\{\alpha\beta\gamma\}) = \begin{pmatrix} e^{-i\alpha} \frac{1 + \cos \beta}{2} e^{-i\gamma} & -e^{-i\alpha} \frac{\sin \beta}{\sqrt{2}} & e^{-i\alpha} \frac{1 - \cos \beta}{2} e^{i\gamma} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \beta e^{-i\gamma} & \cos \beta & -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \beta e^{i\gamma} \\ e^{i\alpha} \frac{1 - \cos \beta}{2} e^{-i\gamma} & e^{i\alpha} \frac{\sin \beta}{\sqrt{2}} & e^{i\alpha} \frac{1 + \cos \beta}{2} e^{i\gamma} \end{pmatrix}. \quad (15.29)$$

В этом соотношении тригонометрические функции половинных углов выражены через функции целых углов.

Представления групп вращения, по крайней мере однозначные, привычны для физиков, так как они дают формулы преобразований для векторов, тензоров и т. д. После преобразования к новой системе координат новые компоненты вектора или тензора являются линейными комбинациями компонент в старой системе координат. Если обозначить компоненты в старой системе через  $T_\sigma$  ( $\sigma$  может означать совокупность нескольких индексов), то компоненты  $T'_\sigma$  в новой системе координат равны

$$T'_\rho = \sum_\sigma D(R)_{\rho\sigma} T_\sigma, \quad (15.30)$$

где явно указана зависимость коэффициентов преобразования от ориентации  $R$  новой системы координат относительно старой. Если мы еще

раз переходим к новой системе координат, например, с помощью вращения  $S$ , то

$$T''_{\tau} = \sum_{\rho} D(S)_{\tau\rho} T'_{\rho} = \sum_{\rho\sigma} D(S)_{\tau\rho} D(R)_{\rho\sigma} T_{\sigma} \quad (15.31)$$

Теперь  $T''$  являются компонентами тензора в системе координат, полученной путем вращения  $SR$ , так что мы имеем

$$T''_{\tau} = \sum_{\sigma} D(SR)_{\tau\sigma} T_{\sigma}. \quad (15.32)$$

Поскольку (15.31) и (15.32) выполняется для произвольных значений компонент тензора  $T_{\sigma}$ ,

$$D(SR)_{\tau\sigma} = \sum_{\rho} D(S)_{\tau\rho} D(R)_{\rho\sigma}, \quad D(SR) = D(S) D(R). \quad (15.33)$$

Таким образом, матрицы преобразования компонент векторов и тензоров образуют представление группы вращений.

Так, в частности, матрицами преобразования векторов являются сами матрицы  $R$ , образующие представление своей группы. Это представление эквивалентно представлению  $\mathfrak{D}^{(1)}$ . „Матрицей преобразования“ для скаляров является  $\mathfrak{D}^{(0)}$ .

Однако представления, принадлежащие тензорам, которые встречаются наиболее часто, не являются неприводимыми, так как можно образовать такие линейные комбинации этих тензорных компонент, которые преобразуются лишь между собой. Эти приводимые представления преобразуются к приведенному виду с помощью матриц, образующих эти линейные комбинации из первоначальных компонент.

Рассмотрим, например, тензор второго ранга с компонентами  $T_{xx}, T_{xy}, T_{xz}, T_{yx}, T_{yy}, T_{yz}, T_{zx}, T_{zy}, T_{zz}$ . Этот тензор можно записать в виде суммы симметричного и антисимметричного тензоров. Шестью, компонентами первого являются  $T_{xx}, T_{yy}, T_{zz}, T_{xy} + T_{yx}, T_{zx} + T_{xz}, T_{yz} + T_{zy}$ ; тремя компонентами последнего будут  $T_{xy} - T_{yx}, T_{yz} - T_{zy}, T_{zx} - T_{xz}$ . Представление для антисимметричного тензора эквивалентно представлению  $\mathfrak{D}^{(1)}$  и неприводимо, чего нельзя сказать о представлении для симметричного тензора. Существует одна линейная комбинация компонент  $T = T_{xx} + T_{yy} + T_{zz}$ , которая остается инвариантной. Остающиеся пять линейных комбинаций  $T_{xx} - \frac{1}{3}T, T_{yy} - \frac{1}{3}T, T_{xy} + T_{yx}, T_{yz} + T_{zy}, T_{zx} + T_{xz}$  являются взаимно независимыми компонентами симметричного тензора с нулевым следом. Они принадлежат неприводимому представлению, эквивалентному  $\mathfrak{D}^{(2)}$ .

Последнее замечание показывает также, почему нецелесообразно нумеровать строки и столбцы неприводимых представлений с помощью обычных символов тензорных компонент, к которым они относятся. Этим предоставляется слишком много свободы. Так, компонента  $T_{xx} - \frac{1}{3}T$  симметричного тензора с нулевым следом, приведенного выше, может быть опущена, а вместо нее может быть использована компонента  $T_{zz} - \frac{1}{3}T$ .

Три строки в  $\mathfrak{D}^{(1)}$  не относятся к компонентам  $x$ ,  $y$  и  $z$  вектора, так как в том случае, если бы это было так, матрица  $\mathfrak{D}^{(1)}$  была бы вещественной.

Представление  $\mathfrak{D}^{(1)}$  определяет преобразование вектора  $T_b$ , компонентами которого являются

$$\left. \begin{aligned} T_{-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (X + iY) \\ T_0 &= Z, \\ T_{+1} &= \frac{-1}{\sqrt{2}} (X - iY) \end{aligned} \right\} \quad (15.34)$$

С помощью матрицы, входящей в (15.34),  $\mathfrak{D}^{(1)}$  можно преобразовать в представление, применимое к компонентам  $x$ ,  $y$  и  $z$  вектора, т. е. в матрицу для самого вращения  $R$ . Это легко видеть, если взять  $\mathfrak{D}^{(1)}(\{a00\})$  и  $\mathfrak{D}^{(1)}(\{0\beta0\})$  из (15.29) и умножить их на преобразование из (15.34) справа и на сопряженное ему — слева. В первом случае получается матрица (15.14a'), а во втором — (15.14б').