

2.5. Математические методы

Философские и физические воззрения, технические проблемы и формирующиеся математические теории определяют форму и содержание механики на всех этапах ее становления. Это утверждение, вполне очевидное в XX в., показалось бы странным в долагранжевский период истории науки. И странность заключалась бы в искусственности выделения задач и методов механики из общего ансамбля математических проблем и теорий. В Парижской академии наук и тех, кого мы называем основоположниками теоретической механики, и творцов новых разделов современной математики именовали одинаково — геометры¹. И все они занимались созданием и приложениями новых математических идей и теорий. Поэтому обособление истории теоретической механики от истории математики представляется искусственным и не очень оправданным. Теоретическая, а может, точнее — математическая, механика формировалась параллельно с новыми разделами математики.

Фактически до начала XVIII в. основным математическим инструментом механики была геометрия, достаточно развитая еще в древнегреческий период. И работы по статике, и кинематические исследования движения земных и небесных тел, и первые работы по динамике опирались на достижения геометрии Евклида и Аполлония. Но это была, если так можно выразиться, «статическая геометрия». В XVII в., начиная с Кеплера, Галилея, Декарта, основной проблемой натуральной философии становится задача исследования механического движения тел (движение планет, комет, падение тел, влияние на движение тел внешних факторов, удар тел, колебания маятников, движение жидкостей и т. д.). Назрела необходимость в создании «геометрии движения».

Понятие «величина» до XVII в. ассоциировалось с конкретным количеством, размером, числом, постоянной величиной. Поэтому появление в математике «переменной величины» поначалу казалось парадоксальным. Но, развивая известную мысль Ф. Энгельса², можно утверждать, что математика переменных величин стала поворотным пунктом в механике движения тел. И первой предпосылкой новой механики ста-

¹Академики-механики по сути больше напоминали современных инженеров-изобретателей.

²Поворотным пунктом в математике была декартова переменная величина. Благодаря этому в математику вошло движение и диалектика.

ла *аналитическая геометрия* Р. Декарта и П. Ферма. Понятие переменной величины стало основным в математическом описании движения тел.

Первая из трех книг «Геометрии» Декарта начинается с разъяснений общих принципов и правил составления уравнений геометрических кривых: «Чтобы решить какую-либо задачу, нужно сначала считать ее как бы решенной и обозначить буквами все как данные, так и искомые линии. Затем, не делая никакого различия между данными и искомыми линиями, заметить зависимость между ними, так чтобы получить два выражения для одной и той же величины; это и приводит к уравнению, служащему для решения задачи, ибо можно приравнять одно выражение другому» [32]. Описанная здесь технология построения уравнений становится основой для формирования математического аппарата механики в трудах Гюйгенса, Ньютона, Лейбница, Вариньона, Бернулли. Это определялось важнейшей ролью геометрических методов в решении задач механики той эпохи.

Второй важнейшей идеей геометрии Декарта стало использование для описания движения координатных осей. Оси у Декарта еще не равноправны: одна ось главная, другая — вспомогательная, расположенная под некоторым (не обязательно прямым) углом к главной оси. Все кривые у Декарта делятся на два класса: 1) описываемые непрерывным движением циркуля или линейки, или же несколькими такими последовательными движениями, из которых последующие вполне определяются n предшествующими; 2) «механические» кривые, к которым относятся все остальные. «Механические» кривые Декарт исключал из класса допустимых кривых и, таким образом, рассматривал только кривые, которые могут быть построены с помощью некоторого шарнирного механизма. Декарт отмечал, что степень алгебраического уравнения кривой инвариантна относительно выбора системы координат. Но за основу классификации кривых он брал не степень их уравнения, а число звеньев соответствующего шарнирного механизма. Алгебраическая символика Декарта очень близка к современной. Всякое уравнение кривой приводится к виду $P_n(z) = 0$, где $P_n(z)$ — многочлен с целыми коэффициентами, расположенными по убывающим степеням неизвестного z . Декарт высказал предположение, что алгебраическое уравнение кривой имеет столько корней, какова его степень.

Независимо от Декарта, идеи аналитической геометрии были высказаны другим французским математиком — Пьером Ферма —

в небольшом сочинении «Введение в теорию плоских и пространственных мест», написанном в 1636, но опубликованном только в 1679 г. Для прямых линий и конических сечений Ферма впервые приводит привычные ныне уравнения:

$$y = mx, \quad xy = k^2, \quad x^2 + y^2 = a^2, \quad x^2 \pm a^2 y^2 = b^2,$$

записанные относительно, как правило, ортогональных осей [76, с. 134]. Исследования в том же направлении опубликовали англичанин Дж. Уоллис («Трактат о конических сечениях», 1655), голландец Ян де Витт («Основы кривых линий», 1659), француз Г. Лопиталь («Аналитический трактат о конических сечениях», 1707). В 1704 г. Ньютон издал «Перечисление кривых третьего порядка», где введены равноправные и ортогональные оси координат, в основу классификации кривых положена степень их алгебраического уравнения. Для приведения уравнений кривых к каноническому виду автор использовал линейные преобразования координат. Геометрии пространственных кривых была посвящена работа соотечественника Декарта и Ферма — А. Клеро — «Исследования о кривых двойкой кривизны» (1731). Наиболее законченный вид аналитическая геометрия приобрела во «Введении в исчисление бесконечно малых» (1748) Л. Эйлера.

Начиная с XVII в. возрастает интерес к алгебре, особенно в связи с внедрением символьных обозначений. Алгебраическая символика формировалась на протяжении многих столетий (Диофант, Лука Пачоли, Никола Шюке и др.), но решающий шаг — введение буквенных коэффициентов — был сделан французом Ф. Виетом в работе «Введение в аналитическое искусство» (1591). В результате алгебра приобрела характер чисто символьного исчисления. Это позволило построить общую теорию алгебраических уравнений, внести вклад в развитие геометрической алгебры (теории операций над отрезками) и теории конических сечений, в которых прежде доказательства сводились к построению с помощью циркуля и линейки.

В XVII в. были заложены основы математического анализа, ставшего основой математического аппарата классической механики. По определению С. М. Никольского, «математический анализ — часть математики, в которой функции и их обобщения изучаются методом пределов. Понятие предела тесно связано с понятием бесконечно малой величины, поэтому можно также сказать, что математический анализ изучает функции и их обобщения методом бесконеч-

но малых» [57, стр. 591]. Идеи анализа пронизывают всю современную математику, включая ее приложения. Различают математический анализ в широком и узком смысле. Анализ в широком смысле — это вся совокупность математических дисциплин, представляющих непосредственное развитие идей и методов дифференциального и интегрального исчисления: дифференциальных уравнений, интегральных уравнений, вариационного исчисления, теории функций действительного переменного и так далее. Анализ в узком смысле — это интегральное и дифференциальное исчисление. Его созданию и были посвящены математические исследования Г. Галилея, И. Кеплера, Г. Сен-Венсана, Р. Декарта, Ф. Б. Кавальери, П. Ферма, Ж. П. Роберваля, Э. Торричелли, Дж. Уоллиса, Н. Меркатора, Б. Паскаля, П. Монголи, Х. Гюйгенса, И. Барроу, Дж. Грегори, И. Ньютона, Г. В. Лейбница, Я. и И. Бернулли.

Общие методы дифференцирования и интегрирования функций, как взаимно обратные методы, могли быть открыты только теми, кто владел геометрическими методами древних греков, алгебраическими методами Декарта и Уоллиса, понятиями функции и бесконечно малой величины, кто нуждался в методах анализа для решения своих прикладных проблем. Честь этого открытия выпала на долю англичанина Исаака Ньютона и немца Готфрида Вильгельма Лейбница.

Теория «флюксий»¹ Ньютона тесно связана с работами его учителя И. Барроу, Дж. Грегори² и Дж. Уоллиса («Арифметика бесконечных», 1655). Ее создание было обусловлено потребностью в решении практических задач, в том числе, проблем небесной механики. Две главные задачи теории «флюксий» состоят в следующем: 1) для данного соотношения между «флюентами» определить соотношение между «флюксиями», 2) для известного соотношения между «флюксиями» найти соотношения между «флюентами». С современной точки зрения, это задачи дифференцирования и интегрирования.

¹ По терминологии Ньютона «флюента» — переменная величина, «флюксия» — скорость изменения «флюенты», то есть производная.

² Джеймс Грегори — профессор университетов Сент-Эндрюса и Эдинбурга (Шотландия). Использовал идею функциональной зависимости, изучил многие виды функций, изложил метод предельного перехода, широко использовал разложение функций в степенные ряды, открыл формулу биномиального ряда, интерполяционную формулу, получил формулы приближенного интегрирования, преобразования координат, вывел уравнения некоторых кривых.

Решение первой из задач Ньютон сводил к замене «флюент» их приближенными значениями. Рассмотрим решение Ньютона на примере уравнения $y = x^2$. Заменяя «флюенты» x и y их приближенными значениями $x + \dot{x}o$, $y + \dot{y}o$, где $\dot{x}$ и $\dot{y}$ — «флюксии», а $\dot{x}o$ и $\dot{y}o$ — «моменты флюент» (бесконечно малые величины)¹, получим $(y + \dot{y}o) = (x + \dot{x}o)^2$, откуда, в силу исходного уравнения, пренебрегая малыми второго порядка и сокращая обе части на значок o , приходим к искомому соотношению $\dot{y} = 2\dot{x}x$ между «флюксиями».

В решении второй задачи Ньютон столкнулся с трудностью, обнаружив, что даже линейное уравнение $P(x, y)\dot{x} + Q(x, y)\dot{y} = 0$ не всегда может быть проинтегрировано в явном виде. Для решения дифференциальных уравнений он пользовался разложением функций в степенные ряды. Эта идея, вошедшая в математику во второй половине XVII в. (Н. Меркатор, Дж. Грегори, Дж. Уоллис, Г. В. Лейбниц), оказалась весьма эффективной и получила дальнейшее развитие. Она сводила задачу интегрирования функций к задаче обращения (интегрирования) соответствующих рядов. Так, Меркатор в «Логарифмотехнике» (1668) рассматривал логарифм $\ln(1 + x)$ как площадь под гиперболой $y = \frac{1}{1+x}$. Действительно,

$$\ln(1 + x) = \int \frac{dx}{1 + x} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

И ряд в правой части можно рассматривать как последовательное интегрирование ряда, получаемого после деления «по правилам алгебры» 1 на $(1 + x)$:

$$\frac{1}{1 + x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

В 80–90-х гг. XVII в., пытаясь придать своему исчислению более строгую, чем в методе «флюксий» и рядов, логическую форму, Ньютон начал развивать метод «первых» и «последних» отношений, изложенный им в ряде лемм в «Началах». Здесь основным являлось понятие *производной*, определяемой как «последнее» отношение исчезающего приращения функции (Δy) к исчезающему приращению аргумента (Δx), или как «первое» отношение возникающего приращения функции к возникающему приращению аргумента.

¹Аналоги дифференциалов.

Ньютону, как и Барроу, была известна геометрическая интерпретация интеграла функции как площади соответствующей криволинейной трапеции, а также то, что производная этой площади по абсциссе является ординатой этой кривой. Понятия *определенного интеграла* у Ньютона нет, однако есть, хоть и не полная, но достаточно обширная таблица неопределенных интегралов. Большинство положений своего математического анализа он продемонстрировал в процессе решения конкретных задач, оставив своим последователям возможность построения стройной математической теории.

Официальным годом рождения дифференциального исчисления обычно называют 1684 — год выхода в лейпцигском журнале «Acta eruditorum» статьи Лейбница «Новый метод максимумов и минимумов...», где вводится понятие дифференциала, правила дифференцирования функций (суммы, произведения, отношения), условия их экстремумов и точек перегиба¹. Через два года Лейбниц опубликовал статью, посвященную основам интегрального исчисления. Новая математическая теория, удачная символика введенных понятий (дифференциала, интеграла) привлекли внимание континентальных ученых, и дальнейшее развитие математического анализа и его приложений в работах Я. и И. Бернулли, Г. Лопиталя, П. Вариньона и их последователей происходило в русле лейбницевой традиции.

Если подход Ньютона был «кинематическим», основанным на понятии скорости, то Лейбниц излагал свою теорию на основе геометрических представлений о «характеристическом треугольнике», впервые появившихся в работах Паскаля, Снеллиуса и Барроу («Геометрические лекции», 1670). Поясним подход Лейбница на примере параболы $y = x^2$ (рис. 2.5.1).

Треугольник ABC , образованный касательной BC , подкасательной AC и отрезком AB , параллельным оси x , подобен «характеристическому треугольнику»

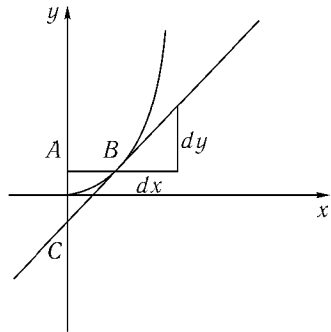


Рис. 2.5.1

¹ Основные идеи анализа Лейбниц сформулировал между 1673 и 1676 г. под личным влиянием Гюйгенса, в результате изучения работ Декарта и Паскаля.

с катетами dx и dy . Таким образом, $dy = \frac{AC}{AB}dx$. Уравнению параболы должна удовлетворять и точка с координатами $(x + dx, y + dy)$, то есть $y + dy = (x + dx)^2 = x^2 + 2x dx + dx^2$.

Учитывая, что $y = x^2$, а $(dx)^2$ есть величина второго порядка малости, получаем: $dy = 2x dx$.

Сравнивая это уравнение с ранее полученным выражением для dy , легко получить выражение для подкасательной $AC = AB \cdot 2x = 2x^2 = 2y$.

Таковы основные математические результаты XVII в., имеющие непосредственное отношение к развитию механики.

2.6. Теория удара

Галилей раньше других заинтересовался ударом тел и начал не с теоретических построений, а с экспериментальных попыток определения величины ударной силы. Опыты¹ с весами, блоками, забиванием свай не привели его к желаемому результату, но убедили, что ударная сила может быть сколь угодно большой. Философский гений Декарта не позволял ему принимать всерьез экспериментальные факты. Поэтому «правила удара» в «Началах философии» он заканчивает заявлением: «Все эти доказательства настолько достоверны, что хотя бы опыт и показал обратное, однако мы вынуждены придавать нашему разуму больше веры, нежели нашим чувствам» [31, с. 496]. Опыт показал именно то, чего опасался Декарт. И причина его заблуждений состояла не в неправильности сформулированного им фундаментального принципа сохранения количества движения, а в непонимании (или неумении записать) того, что количество движения имеет не только величину, но и направление. Это заблуждение, позднее замеченное Гюйгенсом, вылилось у Декарта в ошибочное правило сложения количеств движения тел.

Метод и цели Галилея были восприняты его учеником Торричелли в опубликованных им популярных лекциях «Об ударе» и чешским естествоиспытателем Йоханнесом Маркусом Марци, издавшим в Праге трактат «О соотношении движений или правила соударений» (1639). Здесь впервые различаются три вида сталкивающихся тел — жесткие, мягкие и упругие. Рассматривая центральный удар упругих шаров, автор считает ударный импульс (меру «мощности или качества переме-

¹Возможно, что некоторые из опытов носили умозрительный характер.