

с катетами dx и dy . Таким образом, $dy = \frac{AC}{AB}dx$. Уравнению параболы должна удовлетворять и точка с координатами $(x + dx, y + dy)$, то есть $y + dy = (x + dx)^2 = x^2 + 2x dx + dx^2$.

Учитывая, что $y = x^2$, а $(dx)^2$ есть величина второго порядка малости, получаем: $dy = 2x dx$.

Сравнивая это уравнение с ранее полученным выражением для dy , легко получить выражение для подкасательной $AC = AB \cdot 2x = 2x^2 = 2y$.

Таковы основные математические результаты XVII в., имеющие непосредственное отношение к развитию механики.

2.6. Теория удара

Галилей раньше других заинтересовался ударом тел и начал не с теоретических построений, а с экспериментальных попыток определения величины ударной силы. Опыты¹ с весами, блоками, забиванием свай не привели его к желаемому результату, но убедили, что ударная сила может быть сколь угодно большой. Философский гений Декарта не позволял ему принимать всерьез экспериментальные факты. Поэтому «правила удара» в «Началах философии» он заканчивает заявлением: «Все эти доказательства настолько достоверны, что хотя бы опыт и показал обратное, однако мы вынуждены придавать нашему разуму больше веры, нежели нашим чувствам» [31, с. 496]. Опыт показал именно то, чего опасался Декарт. И причина его заблуждений состояла не в неправильности сформулированного им фундаментального принципа сохранения количества движения, а в непонимании (или неумении записать) того, что количество движения имеет не только величину, но и направление. Это заблуждение, позднее замеченное Гюйгенсом, вылилось у Декарта в ошибочное правило сложения количеств движения тел.

Метод и цели Галилея были восприняты его учеником Торричелли в опубликованных им популярных лекциях «Об ударе» и чешским естествоиспытателем Йоханнесом Маркусом Марци, издавшим в Праге трактат «О соотношении движений или правила соударений» (1639). Здесь впервые различаются три вида сталкивающихся тел — жесткие, мягкие и упругие. Рассматривая центральный удар упругих шаров, автор считает ударный импульс (меру «мощности или качества переме-

¹Возможно, что некоторые из опытов носили умозрительный характер.

нения») пропорциональным весу и скорости, экспериментально показывает независимость постударных скоростей от размеров тел. Опыты с подвешенными шарами привели его к выводам: 1) если движущееся тело сталкивается с равными ему по весу и по материалу покоящимся телом, то само оно остается в покое, другое же тело воспринимает его движение; 2) если два равных тела с равными, но произвольными скоростями сталкиваются, то оба отталкиваются друг от друга после удара с равными, но противоположными скоростями. Через 15 лет, после выхода книги Марци, с ней познакомился молодой Х. Гюйгенс.

Научные интересы Гюйгенса, внесшего наиболее значительный вклад в теорию удара, формировались под влиянием творчества Кеплера, Галилея и Декарта. Принимая научную эстафету от Декарта, он, тем не менее, пошел своим собственным путем. Изучение явлений природы, процессов движения и взаимодействия тел экспериментальными и математическими методами, а не поиск их причин и философские размышления стали основным содержанием его научного наследия. Высокий авторитет Гюйгенса в европейском научном сообществе во многом определил дальнейший прогресс таких разделов механики, как *теория удара*, *теория колебаний*, *теория притяжения*, *теория центральных сил*, способствовал ускорению внедрения идей *математического моделирования* и созданию универсальной физико-математической теории движения и равновесия тел — *теоретической механики*.

В мемуаре «О движении тел под влиянием удара» [27] Гюйгенс формулирует законы удара абсолютно упругих тел. Особое внимание к удару объясняется не только утилитарными потребностями техники (чеканка монет), но и тем, что это один из важнейших способов взаимодействия тел природы. В основу трактата положены гипотезы, ясно характеризующие состояние механики середины XVII в¹.

«1. Тело, приведенное в движение, при отсутствии противодействия продолжает свое движение неизменно с той же скоростью и по прямой линии.

¹ Мемуар был опубликован в 1703 г. после смерти автора, но его главные идеи докладывались Гюйгенсом в Лондонском королевском обществе (1661), в Парижской академии наук (1668) и опубликованы в «Journal des Sçavants» (1669). Результаты были получены гораздо раньше. Об этом свидетельствуют рукопись 1656 г. (опубликована в 14-м томе Полного собрания сочинений Гюйгенса, с. 137–149), письма Схоутену (1654), Робервалю (1656), Слозу [187, с. 285–286].

2. Не входя в рассмотрение причины отскакивания твердых тел после соударения, принимаем следующее положение: если два одинаковых тела, движущихся с одинаковой скоростью навстречу друг другу, сталкиваются прямым ударом, то каждое из них отскочит назад с той же скоростью, с какой ударились.

Удар называется *прямым*, если само движение и соприкосновение происходят на прямой линии, соединяющей центры тяжести тел.

3. Движение тел, а также их одинаковые или разные скорости надо рассматривать как относительные по отношению к другим телам, которые мы считаем покоящимися, не учитывая того, что как те, так и другие тела могут участвовать в другом, общем движении. Поэтому два тела, соударяясь, даже в случае, если оба вместе участвуют еще в другом равномерном движении, для лица, также участвующего в общем движении, действуют друг на друга так, как будто бы этого общего движения не существовало» [27, с. 213].

Суть этих гипотез была высказана еще до Гюйгенса. И опора автора именно на эти утверждения позволяет их считать общепринятыми в середине XVII в. Последующие гипотезы 4 и 5, по мнению Гюйгенса, отражают его личные физические воззрения¹ и позволяют внести коррективы в декартову теорию удара.

«4. Если большее тело соударяется с меньшим, находящимся в покое, то оно сообщает последнему некоторое движение и, следовательно, теряет несколько в своем движении» [27, с. 218].

«5. Если при соударении двух твердых, движущихся навстречу друг другу тел обнаруживается, что одно из них сохранило свое движение, то и другое не выигрывает и не теряет ничего в движении» [27, с. 219].

Теория удара представлена тринадцатью предложениями-теоремами, доказательство которых проводится в строгих геометрических традициях предшественников с широким привлечением мысленных экспериментов², согласующихся с физическими представле-

¹Фактически это было уже у Декарта.

²В качестве объекта исследования используются шары, подвешенные на нитях. Позднее Мариоттом была создана соответствующая лабораторная установка, позволившая ему подтвердить результаты Гюйгенса и внести свой вклад в развитие теории удара. В доказательстве теорем активно используется идея относительности движения.

ниями читателей. Основные результаты теории Гюйгенса состоят в следующем:

«Если с покоящимся телом соударяется одинаковое с ним тело, то ударившее тело приходит в состояние покоя, а покоившееся тело приходит в движение со скоростью ударившегося о него» [27, с. 214].

«Если два одинаковых тела соударяются с разными скоростями, то они при ударе обмениваются скоростями» [27, с. 216].

«Если два тела сталкиваются, то их относительная скорость удаления после удара та же, что и относительная скорость сближения до удара» [27, с. 219].

Доказательство последнего утверждения основано на пятой гипотезе. Но что в ней подразумевается под «сохранением движения»? Сохранение величины скорости, направления движения, количества движения (в современном смысле)? Эта неопределенность бросает тень сомнения на верность не только последнего утверждения (у Гюйгенса — предложение IV), но и последующих предложений-теорем. Пятая гипотеза играет важную роль в теории Гюйгенса. Именно в ней содержится недостающее для решения практических задач условие, аналогичное введению Ньютоном коэффициента k восстановления (удара). И рассматриваемый Гюйгенсом случай абсолютно упругого удара соответствует $k = 1$.

«При соударении двух тел сумма произведений из их величин на квадраты их скоростей остается неизменной до и после удара; при этом отношение величин и скоростей должны быть выражены числами и отрезками» [27, с. 235].

Эта теорема (предложение IX) впервые использует введенное Лейбницем в 1695 г. понятие «живой силы», позднее названное кинетической энергией и играющее важную роль в современной физике и механике. Гюйгенс постоянно оперирует понятием «величина тела». Это еще не ньютоновская масса, но в статье, опубликованной в «Journal des Sçavans» (1669), он пишет: «... я рассматриваю тела из одного и того же вещества или же принимаю, что величина тел определяется их весом» [27, с. 367]. В этой же статье у Гюйгенса есть еще один результат, не попавший в мемуар 1703 г.: «Кроме того, я заметил удивительный закон природы, который я могу доказать для сферических тел и который, по-видимому, справедлив и для всех других тел, твердых (упругих) и пластичных при прямом и при косом ударе: общий центр тяжести

двух, трех или скольких угодно тел продолжает двигаться равномерно в ту же сторону по прямой линии как до, так и после удара» [27, с. 366].

Галилея в явлении удара интересовала величина ударного импульса. Декарт, Роберваль, Гюйгенс сосредоточили свое внимание на последствиях удара, на попытке определения постударных скоростей соударяющихся тел. Этому же были посвящены работы англичан Уоллиса (1668), Рена (1668) и француза Мариотта (1673).

Джон Уоллис — выпускник Кембриджского университета, профессор геометрии Оксфордского университета, один из первых членов Лондонского королевского общества — основательно изучил работы (многие перевел и издал) античных ученых, Торричелли, Кавальери, Декарта, был первым английским математиком, начавшим заниматься анализом бесконечно малых. В «Арифметике бесконечных» (1656), сыгравшей важную роль в предыстории интегрального исчисления, Уоллис, независимо от Ферма и Роберваля, фактически вычислил определенные интегралы от степеней с любыми рациональными показателями и некоторых других алгебраических функций. Он первым рассматривал интеграл как *предел отношения числовых последовательностей*. В «Трактате о конических сечениях» (1656) Уоллис показывает преимущества аналитического метода Декарта. В более поздних трактатах Уоллис построил график функции $y = \sin x$, высказал идею геометрического представления комплексных чисел, ввел знак для бесконечности, понятия «интерполяция», «мантисса», «непрерывная дробь», занимался приближенными вычислениями, логарифмами, биномом Ньютона, методом бесконечно малых. Его высокий авторитет в среде английских ученых XVII в. повлиял на формирование научных интересов И. Барроу и И. Ньютона.

В 1669–1671 гг. Уоллис опубликовал трехтомный трактат «Механика или геометрический трактат о движении»¹ [323], наиболее полно отражавший состояние механики доньютоновского периода. Трактат начинается двадцатью двумя определениями основных механических понятий. Здесь, по-видимому, впервые делается попытка явного определения скорости.

«Скорость есть свойство движения, отражающееся в сравнении длины и времени; а именно, она определяет, какая длина в какое время проходится».

¹Переиздан в 1695 г. в собрании сочинений Уоллиса.

«Равномерная скорость — та, которая в одинаковое время проходит равную длину».

«Большая скорость — та, которая в одинаковое время проходит большую длину или одинаковую длину в меньшее время; притом большая в таком отношении, в каком указанная длина больше или время меньше. Меньшая (скорость) — наоборот» [323].

Очевидно, что приведенные определения отличаются от современных своей абстрактностью, но в них уже содержатся элементы нынешних представлений. До Уоллиса попытки определения скорости, с современной точки зрения, либо были неудачными, либо совсем не предпринимались ввиду «очевидности» этого понятия. Но «очевидность», как правило, была индивидуальной и не способствовала ни прояснению сущности, ни закреплению этого понятия в механике. И. Ньютон также не определял понятие скорости, возможно, имея в виду определения Уоллиса.

К понятию силы Уоллис относится в духе декартовских традиций, определяя ее как произведение веса на путь, проходимый точкой приложения веса. Но иногда пользуется и представлениями Галилея: сила измеряется произведением веса на скорость точки ее приложения. Это понятие силы позволяет автору сформулировать по-своему принцип возможных перемещений: «Величины опускания различных грузов стоят друг к другу в таком же отношении, в каком произведения весов на высоты падения; поднятия определяются совершенно также... Говоря в совершенно общей форме, продвижения вперед и отходы назад, обусловленные действием движущих сил, определяются произведениями сил на длину продвижения вперед, или отходя назад, измеряемую по линии направления силы» [323, ч. I, гл. 2, предл. 5]. Говоря о силах в машинах, Уоллис различает движущие силы, измеряемые «моментом», и сопротивление, измеряемое «импедиментом».

Свои законы удара, позднее вошедшие в упомянутый трактат, Уоллис впервые сформулировал в 1668 г., участвуя в конкурсе Лондонского королевского общества. При этом он исходил из принципов своей механики, представляющих причудливую смесь схоластической динамики и статики в стиле Стевина или Декарта: если сила ν перемещает вес P за время T на расстояние L , то сила $m\nu$ переместит вес mP за время nT на расстояние nL так, что отношение $\frac{\nu T}{PL}$ остается постоянным. Или еще — если сила ν перемещает вес P со скоростью C , то сила $m\nu$

переместит вес P со скоростью mC или вес mP со скоростью C . Как бы мы ни оценивали сейчас эти идеи Уоллиса, но это уже были принципы, положенные в основу построения новой науки о движении. Эти принципы позволили автору получить верные законы абсолютно неупругого удара, они давали возможность проводить расчеты характеристик движения. Но главное — сомнительность происхождения этих принципов, их субъективность послужили основой для поиска новых, более совершенных.

Вклад в теорию удара К. Рена и Э. Мариотта является развитием взглядов Гюйгенса и Уоллиса. Работа Рена была участницей того же Лондонского конкурса 1668 г. Сочинение Мариотта «Трактат об ударе или столкновении тел» [245], впервые¹ изданное в 1673 г., не только повторяет результаты Гюйгенса, Марци, Уоллиса и Рена, но и подводит под них обширную экспериментальную базу, связывает изучение удара с колебанием тел² (соударяются шары, совершающие колебательное движение), разрешает давний спор Декарта и Роберваля о центре качаний или удара тел (доказав совпадение этих точек для случая треугольника, качающегося около одной из сторон) и, возможно, впервые обращает внимание на то, что *количество движения должно определяться не весом, а количеством вещества* в теле. Он пишет: «Под весом тела здесь понимается не свойство, заставляющее (тело) двигаться к центру Земли, а его объем с определенной плотностью или концентрацией частей его материи, который, очевидно, и является причиной тяжести» [187, с. 298]. Таким образом, Мариотт фактически определяет понятие массы (не вводя этого слова) за пятнадцать лет до его появления в «Началах» Ньютона.

2.7. Теория притяжения

Поиски причин тяжести тел, изучение свойств равновесия и движения притягивающихся тел занимали важнейшее место в истории теоретической механики. Без особого преувеличения можно утверждать, что эти вопросы занимали умы всех выдающихся геометров XVII в. Кеплер, установив неравномерность движения планет, естественно, задался вопросом о причинах этого явления. Его идеи объяснения причин

¹Состоялось еще два издания, второе — в 1684.

²Упругость тел поясняется на примере колебаний струны.