

тую «Монадологию», замыкающую философскую «трилогию» — «Новые опыты о человеческом разуме . . . » (1704, против Локка) и «Теодицея» (1710, против Бейля). С конца 90-х гг. Лейбниц активно отстаивал свой приоритет¹ в открытии дифференциального и интегрального исчисления.

Создание математического анализа происходило в процессе решения старых и новых задач механики. Использование нового анализа в механических проблемах дало простор для постановки новых задач, для формирования новой идеологии и понятийного аппарата теоретической механики. Однако было бы ошибочным сводить историю механики только к истории ее задач и математического аппарата. Механика, как часть системы научного мировоззрения, формировалась под влиянием конкретных исторических условий, философских, метафизических и даже теологических теорий.

Трудно переоценить роль математического анализа, теории дифференциальных уравнений, вариационного исчисления в современной механике. Но, кроме этого, после Лейбница в механике осталось понятие *действия*. Его «живая сила» в XIX в. была переименована в кинетическую энергию, получив при этом и ясный физический смысл, и официальный статус меры движения. Его теоретические идеи обогатили механику Галилея, Декарта, Гюйгенса, его решения задач, как правило, подтверждали результаты знаменитых современников (Гюйгенса, Ньютона, Я. и И. Бернулли, Лопиталья). Идейное наследие и методы Лейбница получили развитие в трудах его последователей — Бернулли, Вариньона, Клеро, Мопертюи, Эйлера, Даламбера и Лагранжа.

3.4. Метод Я. Бернулли

Открытие Ньютоном и Лейбницем новых принципов натуральной философии и математического анализа стало поворотным пунктом в истории механики. Дальнейшее развитие идеологии и методологии теоретической механики шло по пути совершенствования, конкретизации и математизации ее понятийного аппарата, принципов построения и анализа математических моделей движения и равновесия тел. Из разряда философских наук механика окончательно переходит в разряд математических.

¹Полемика Лейбница с С. Кларком описана в [187].



Якоб Бернулли

50 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE

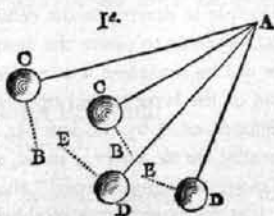
nouvelle espece de centre, que j'appelle *centre de tension*, où l'hypothèse de M. Huguens ne sçauroit avoir lieu: j'expliqueray en son tems ce que j'entends par-là. Et comme je n'ay encore rien publié de tout cela, je veux vous l'envoyer par parties, pour pouvoir être présenté à l'Académie, si vous trouvez qu'il le mérite. Je commence par la première.

Principe du Levier tiré ou poussé par des puissances qui sont en mouvement.

FIGURE I.

Soient AC, AC, AD, AD , les branches d'un levier mobile autour du point A ; soient C, C, D, D , des poids ou des puissances muës avec des vitesses CB, CB, DE, DE , lesquels fassent impression suivant les directions CB, CB, DE, DE , perpendiculaires aux bras de levier AC, AC, AD, AD . Je suppose que si tous les produits des puissances C par AC & CB , sont égaux à tous les produits des puissances D (qui agissent en sens contraire) par AD & DE ; ou bien si tous les produits de C par AC & CB (entant qu'on conçoit toutes les puissances agir en même sens) sont égaux à rien, le levier doit demeurer en équilibre.

Ce principe a été démontré par feu M. Mariotte dans la Prop. 13. de la seconde Partie de son Traité de la Percussion des corps; & il n'y a personne qui en disconvienne.



SOLUTION.

Значительный вклад в постановку новых и модернизацию уже известных задач, в адаптацию к ним дифференциального и интегрального исчисления внесли известные швейцарские математики и механики братья Якоб¹ и Иоганн Бернулли. Их решения уже упоминавшихся задач о цепной линии, о брахистохроне, о центре качаний физического маятника, об ударе тел, о движении в сопротивляющейся среде и проблем баллистики, о равновесии тел показали универсальность и эффективность нового математического аппарата, подтвердили и обобщили результаты их предшественников. В первую очередь — Лейбница, чьи идеи и методы получили в их творчестве наибольшее развитие.

Принцип², заложенный Гюйгенсом в решение задачи о центре колебаний, некоторым ученым казался сомнительным, и поэтому Я. Бернулли предложил свое решение, основанное на идее компенсации движущих сил силами инерции, получившей дальнейшее развитие у Германа, Эйлера, в «Динамике» Даламбера и благодаря Лагранжу вошедшей в теоретическую механику под названием «принцип Даламбера»³. Решение Якобом Бернулли задачи о центре качаний (колебаний), опубликованное в «Acta eruditorum» за 1691 г. и «Мемуарах» Парижской академии за 1703 г., сводится к следующему.

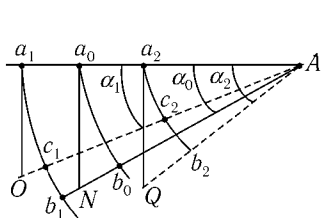


Рис. 3.4.1

Пусть в точках a_1 и a_2 (рис. 3.4.1) жесткого невесомого стержня Aa_1 укреплены две точечные массы m_1 и m_2 . Необходимо найти длину изохронного математического маятника или расстояние $l_0 = Aa_0$ до точки a_0 , в которой сосредоточена масса $m_0 = m_1 + m_2$, если $Aa_1 = l_1$, $Aa_2 = l_2$.

Если бы стержень свободно падал под действием тяжести грузов m_1 и m_2 , то за Δt точки a_1 , a_2 , a_0 переместились бы в положения O , N , Q , причем $Oa_1 = Na_0 = Qa_2$. Но стержень поворачивается вокруг точки A и через Δt займет положение AN , точка a_1 пройдет путь $a_1b_1 > a_1O$, точка a_0 — путь $a_0b_0 \approx a_0N$, точка a_2 — путь $a_2b_2 < a_2Q$. Пока точка a_1 не достигла положения c_1 , все точ-

¹По мнению К.Трусделла, классическая механика обязана своим созданием Я.Бернулли в той же мере, что и И.Ньютону [296, с. 101].

²Гипотеза 1 из § 2.8.

³Современный вид принцип Даламбера принял после выхода в 1856 г. «Трактата рациональной механики» Ш.Делоне.

ки «падали» свободно. Но в положении c_1 , как говорит Я. Бернулли, «действие веса точки a_1 истощилось» [40, с. 139] и она продолжает свое движение к точке b_1 за счет веса точки a_2 . За время прохождения точкой a_1 дуги c_1b_1 точка a_2 пройдет меньшую дугу c_2b_2 , то есть точка a_1 действует на a_2 замедляющим образом. Таким образом, точка a_1 своей инерцией (силой инерции) замедляет вращение стержня, а точка a_2 его ускоряет, точка a_0 не вносит никакого вклада, оставаясь в данный момент как бы неподвижной. В таком случае стержень Aa_1 можно отождествлять с рычагом второго рода с точкой опоры в A , находящимся в равновесии под действием сил инерции $m_1c_1b_1$ и $m_2c_2b_2$ грузов m_1 и m_2 , направленных в противоположные стороны. Уравнение равновесия рычага

$$m_1l_1 \cdot c_1b_1 = m_2l_2 \cdot c_2b_2,$$

из-за малости дуг $c_1b_1 = l_1(\alpha_0 - \alpha_1)$, $c_2b_2 = l_2(\alpha_2 - \alpha_0)$ и углов $\alpha_1 \sim \sim \text{tg } \alpha_1 = \frac{Oa_1}{l_1}$; $\alpha_2 = \frac{Qa_2}{l_2}$; $\alpha_0 = \frac{Na_0}{l_0}$, после преобразований приводит к искомому выражению:

$$l_0 = \frac{m_1l_1^2 + m_2l_2^2}{m_1l_1 + m_2l_2}.$$

Для случая нескольких масс решение будет аналогичным. Кроме идеи сведения изучения движения тела к изучению его равновесия с учетом сил инерции, Я. Бернулли высказал мысль о возможном определении реакции связи. Истинное движение $a_1c_1(a_2b_2)$ он разложил на свободное $a_1O(a_2Q)$ и движение $Oc_1(Qb_2)$ вдоль стержня. Каждому движению он ставит в соответствие силу. Вертикальному движению $a_1O(a_2Q)$, естественно, соответствует сила тяжести, а сила, соответствующая движению вдоль стержня, уравнивается опорой A . По современным представлениям — реакцией связи. Ученик Я. Бернулли — Якоб Германн¹ дал иную интерпретацию идеи использования сил инерции. В наиболее известном сочинении «Форономия или две книги о силах и движениях твердых и жидких тел» [200], решая задачу о нахождении центра колебаний физического маятника, он разлагает силу тяжести каждой материальной точки на две составляющие: одна направлена по линии подвеса, другая — перпендикулярно

¹Один из первых академиков Петербургской академии наук.

первой. Первая из сил уравнивается реакцией связи (опора A), вторая — силой инерции, равной массе точки, умноженной на касательное ускорение (по закону ускоряющих сил Ньютона). Это рассуждение относится к каждой точке маятника, то есть к маятнику в целом, и приводит к следующему принципу: **в каждый момент времени движущие силы (вес), реакции связи и силы инерции уравниваются**. Воспользовавшись этим принципом для решения своей задачи, Германн не придал ему всеобщего статуса. Это сделал позднее другой академик Петербургской академии наук, ученик И. Бернулли — Леонард Эйлер, использовавший сформулированный принцип (в своей интерпретации¹) для решения многих задач, в том числе и не связанных с колебаниями.

3.5. In magnis voluisse sat est²

Важнейшую роль в формировании идеологии и методологии механики сыграли многочисленные работы Иоганна Бернулли, принесшие ему мировую известность. Эти работы начинались как развитие идей математического анализа и динамики Лейбница и вылились в обширный цикл задач, актуальных в конце XVII — начале XVIII вв. Задач, сформулированных Галилеем, Гюйгенсом, Лейбницем, Ньютоном, им самим, как правило, решаемых методами дифференциального и интегрального исчисления³ на основе принципов и законов механики XVII в. Для истории теоретической механики наибольший интерес представляет сочинение «Рассуждение о законах передачи движения» [136], представленное в 1724 г. на конкурс Парижской академии наук. Знакомство с содержанием этой работы позволит получить представление о состоянии механики в первой трети XVIII в.

¹Пусть тело движется по плоскости под действием силы F , приложенной к центру масс тела. Разложим F на касательную (F_τ) и нормальную (F_n) составляющие. Сила F_n уравнивается реакцией плоскости, сила F_τ вызовет ускоренное движение или силу инерции ($m\vec{a}$). Если силу инерции направить противоположно ускорению $\vec{a}$, то можно считать, что она «уравнивает» F_τ . Иначе говоря, в каждый момент времени $\vec{F}$, $m\vec{a}$ и реакции поверхности уравниваются [40, с. 141]. Такова Эйлерова трактовка идеи Бернулли — Германа.

²«Довольно и того, что хочешь быть среди великих» — девиз И. Бернулли в сочинении, представленном Парижской академии наук на конкурс 1724 года.

³Термин «интегральное исчисление» ввел И. Бернулли.