ГЛАВА 1

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН

1. Линейное приближение

Тот факт, что радиационные и волновые процессы являются естественным элементом современной теории тяготения — общей теории относительности А. Эйнштейна, — наглядно выступает при рассмотрении случая слабого гравитационного поля, когда общая картина упрощается настолько значительно, что многие сложные понятия и соотношения этой теории приобретают вид, аналогичный хорошо исследованным понятиям и соотношениям классической теории поля. Хотя главным предметом нашего изложения является проблема инвариантного формулирования понятия гравитационных волн, само это изложение не было бы достаточно полным и мотивированным без предварительного анализа методов приближенного описания волнового гравитационного поля.

Уравнения Эйнштейна

$$R_{\alpha\beta} = -\lambda\left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Tg_{\alpha\beta}\right) \tag{1.1}$$

впервые были рассмотрены в приближении слабого поля самим их автором [1, 2]. Здесь $R_{\alpha\beta}$ — тензор Риччи, $T_{\alpha\beta}$ — тензор энергии — импульса «материи», т. е. вещества и всех полей, кроме гравитационного, $T = g^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta}$ и λ — эйнштейновская гравитационная постоянная. Всюду в книге принято правило суммирования по повторяющимся индексам; греческие индексы пробегают ряд значений 0, 1, 2, 3, а для вспомогательного ряда 1, 2, 3 принято обозначение малыми латинскими индексами.

Если метрический тензор пространства — времени $g_{\alpha\beta}$ мало отличается от метрического тензора Минковского $\overset{(00)}{g}_{\alpha\beta}$,

$$g_{\alpha\beta} = \overset{(00)}{g}_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}, \tag{1.2}$$

то величины $h_{\alpha\beta}$ малы по сравнению с единицей. Будем предполагать, что и их частные производные имеют тот же порядок малости [1]):

$$h_{\alpha\beta,\mu} \sim h_{\alpha\beta,\mu\nu} \sim h_{\alpha\beta}. \tag{1.3}$$

Тогда в линейном по $h_{\alpha\beta}$ приближении тензор Римана — Кристоффеля имеет вид

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} \approx \frac{1}{2}(h_{\alpha\gamma,\beta\delta} + h_{\beta\delta,\gamma\alpha} - h_{\alpha\delta,\gamma\beta} - h_{\beta\gamma,\alpha\delta}). \tag{1.4}$$

Находя отсюда выражение для тензора Риччи, запишем уравнения (1.1) в линейном приближении:

$$\frac{1}{2}(\overset{(00)}{g}{}^{\beta\delta}h_{\alpha\gamma,\beta\delta} + h_{,\alpha\gamma} - h^{\delta}_{\alpha,\gamma\delta} - h^{\delta}_{\gamma,\alpha\delta}) = -\lambda\left(T_{\alpha\gamma} - \frac{1}{2}T\overset{(00)}{g}_{\alpha\gamma}\right). \tag{1.5}$$

При этом был использован тот очевидный факт, что в линейном приближении

$$g^{\alpha\beta} = \overset{(00)}{g}{}^{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta}, \quad h^{\alpha\beta} = h_{\sigma\tau}\overset{(00)}{g}{}^{\sigma\alpha}\overset{(00)}{g}{}^{\tau\beta}, \quad h = \overset{(00)}{g}{}^{\alpha\beta}h_{\alpha\beta}.$$

Умножая уравнения (1.5) на $\overset{(00)}{g}{}^{\alpha\gamma}$, приходим к скалярному соотношению

$$\Box h + h^{\mu\nu}_{,\mu\nu} = -\lambda T, \tag{1.6}$$

---

[1]) Строго говоря, производные от $h_{\alpha\beta}$ разных порядков имеют определенные, причем различные, размерности, поэтому порядки малости их следовало бы оценивать по отношению к характерным линейным размерам (типа радиуса кривизны) пространства — времени фона. Но так как в данном случае оно является плоским (бесконечный радиус кривизны), то порядки малости первых и вторых производных в рассматриваемых приближениях можно считать одинаковыми. Для случая неплоской метрики фона такие оценки проводятся, например, в работах Айзексона, обсуждаемых ниже в этой главе.

где [1])

$$\Box = -\overset{(00)}{g}{}^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta = \Delta - \partial_0\partial_0 \tag{1.7}$$

есть оператор Даламбера специальной теории относительности, а Δ — оператор Лапласа:

$$\Delta = \sum_i^3 \partial_i\partial_i. \tag{1.8}$$

Умножая уравнение (1.6) на $\overset{(00)}{g}_{\alpha\gamma}$ и подставляя в (1.5) получившееся выражение для $\lambda T \overset{(00)}{g}_{\alpha\gamma}$, приходим к системе уравнений, которую удобно представить в виде

$$\Box\psi_{\alpha\beta} + \psi^{\mu}_{\alpha,\beta\mu} + \psi^{\mu}_{\beta,\alpha\mu} - \overset{(00)}{g}_{\alpha\beta}\psi^{\mu\nu}_{,\mu\nu} = 2\lambda T_{\alpha\beta}, \tag{1.9}$$

где мы ввели величины

$$\psi_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} h \overset{(00)}{g}_{\alpha\beta}. \tag{1.10}$$

Систему уравнений (1.9) можно далее упростить, приняв во внимание, что в приближении слабого поля всегда можно удовлетворить условиям Гильберта [3, 4]:

$$\psi^{\beta}_{\alpha,\beta} = 0. \tag{1.11}$$

Тогда уравнения поля приобретают стандартный вид

$$\Box\psi_{\alpha\beta} = 2\lambda T_{\alpha\beta}, \qquad \psi^{\beta}_{\alpha,\beta} = 0. \tag{1.12}$$

Итак, уравнения Эйнштейна в линейном приближении являются волновыми уравнениями для потенциалов $\psi_{\alpha\beta}$, причем их правая часть описывает источники гравитацион-

---

[1]) Частные производные по координатам в большей части книги обозначаются индексами после запятой (например, $Q_{\alpha\beta,\gamma} \equiv \frac{\partial}{\partial x^\gamma} Q_{\alpha\beta}$), а ковариантные — индексами после точки с запятой (например, $Q_{\mu\nu;\lambda} \equiv \frac{\partial}{\partial x^\lambda} Q_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha_{\lambda\mu} Q_{\alpha\nu} - \Gamma^\alpha_{\lambda\nu} Q_{\mu\alpha}$), однако в тех параграфах, где была необходимость особо выделить операторную природу этих индексов, используются более наглядные обозначения типа $Q_{\alpha\beta,\gamma} \equiv \partial_\gamma Q_{\alpha\beta}$ и $Q_{\alpha\beta;\gamma} \equiv \nabla_\gamma Q_{\alpha\beta}$. Все другие случаи специальных обозначений дифференцирования оговорены в тексте.

ного поля. Следовательно, в линейном приближении уравнения тяготения описывают распространение гравитационных волн с фундаментальной скоростью[1]) c ($x^0 = ct$); условия (1.11) представляют собой аналог условия калибровочной инвариантности классической теории поля.

Выберем начало декартовой системы координат внутри объема V, занимаемого источниками. Пусть $\boldsymbol{x}$ — радиус-вектор произвольной точки P, лежащей вне объема V, $\boldsymbol{\xi}$ — радиус-вектор произвольной точки O внутри объема V. Общее решение системы уравнений (1.12) при нулевых начальных данных ($\psi_{\alpha\beta} = 0$ и $\psi_{\alpha\beta,0} = 0$ при $x^0 = 0$) имеет вид[2])

$$\psi_{\alpha\beta} = -\frac{\lambda}{2\pi}\int\limits_V \frac{T_{\alpha\beta}\left(\xi^i, t - |\boldsymbol{r}|\right)}{|\boldsymbol{r}|}\, d^3\xi^i, \tag{1.13}$$

где $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}$. Таким образом, решение уравнений Эйнштейна в линейном приближении дается запаздывающими потенциалами (1.13).

Разлагая в решении (1.13) подынтегральное выражение в ряд по степеням $|\xi|/|x|$, можно исследовать излучение материальной системы во всех порядках мультипольности. Соответствующие компоненты излучения характеризуются тензорами мультипольных моментов. Ранг s тензора 2^s-мультипольного момента, характеризующего распределение масс источников, определяется номером s соответствующего члена в разложении по мультиполям. Так, вводя следующие трехмерные тензоры (Боннор, [6]):

$$\begin{aligned}
&M = \int\limits_V T_{00}\, dV, \qquad A_i = \int\limits_V T_{0i}\, dV, \qquad S_{ij} = \int\limits_V T_{ij}\, dV,\\
&M_{kl\ldots m} = \int\limits_V T_{00}\xi_k\xi_l\ldots\xi_m\, dV,\\
&A_{i|kl\ldots m} = \int\limits_V T_{0i}\xi_k\xi_l\ldots\xi_m\, dV,\\
&S_{ij|kl\ldots m} = \int\limits_V T_{ij}\xi_k\xi_l\ldots\xi_m\, dV,
\end{aligned} \tag{1.14}$$

---

[1]) Всюду в книге используется система единиц, в которой $c = 1$; исключение составляет лишь начало параграфа 2 этой главы.

[2]) Математическая теория неоднородного уравнения Даламбера изложена, например, в книге Соболева [5].

и определяя через них соответствующие бесследовые тензоры мультипольных моментов

$$\hat{M}_{kl} = 3M_{kl} - \delta_{kl}M_{pp},$$

$$\hat{M}_{klm} = 5M_{klm} - \delta_{kl}M_{ppm} - \delta_{lm}M_{kpp} - \delta_{mk}M_{plp},$$

$$\hat{A}_{i|k} = 3A_{i|k} - \delta_{ik}A_{p|p}, \tag{1.15}$$

$$\hat{S}_{ij|k} = 5S_{ij|k} + \delta_{ij}(S_{kp|p} - 2S_{pp|k}) + \frac{1}{2}\delta_{ki}(S_{pp|j} - 3S_{jp|p}) + \\ + \frac{1}{2}\delta_{jk}(S_{pp|i} - 3S_{ip|p}),$$

. . . . . .

можно выразить компоненты запаздывающих потенциалов ψ_α^β в виде бесконечных рядов по мультиполям:

$$\psi_{ij} = -\frac{4\hat{S}_{ij}}{3|x|} - \frac{4x_k}{5|x|^2}\left(\dot{\hat{S}}_{ij|k} + \frac{\hat{S}_{ij|k}}{|x|} + \cdots\right),$$

$$\psi_{0i} = -\frac{4x_k}{3|x|^2}\left(\dot{\hat{A}}_{i|k} + \frac{\hat{A}_{i|k}}{|x|}\right) - \\ - \frac{2x_kx_l}{5|x|^3}\left(\ddot{\hat{A}}_{i|kl} + \frac{3\dot{\hat{A}}_{i|kl}}{|x|} + \frac{3\hat{A}_{i|kl}}{|x|^2}\right) + \cdots, \tag{1.16}$$

$$\psi_{00} = -\frac{4M}{|x|} - \frac{2x_kx_l}{3|x|^3}\left(\ddot{\hat{M}}_{kl} + \frac{3\dot{\hat{M}}_{kl}}{|x|} + \frac{3\hat{M}_{kl}}{|x|^2}\right) - \\ - \frac{2x_kx_lx_m}{15|x|^4}\left(\dddot{\hat{M}}_{klm} + \frac{6\ddot{\hat{M}}_{klm}}{|x|} + \frac{15\dot{\hat{M}}_{klm}}{|x|^2} + \frac{15\hat{M}_{klm}}{|x|^3}\right) + \cdots,$$

где точки над символом обозначают дифференцирование по запаздывающему времени $t - r$. Первый член разложения для ψ_{00}, очевидно, представляет собой ньютоновский гравитационный потенциал, тогда как последующие выписанные члены отвечают квадрупольному и октупольному моментам распределения масс. Отсутствие дипольного члена свидетельствует, в частности, о том, что сферически симметричная система источников не может излучать гравитационных волн. Таким образом, решение (1.16) волновых уравнений (1.12) описывает гравитационные волны в линейном приближении, причем первым «радиационным» членом в разложении потенциалов $\psi_{\alpha\beta}$ является квадрупольный член.

2. Приближения высших порядков

Для получения нелинейных приближений уравнений тяготения можно использовать классический метод аппроксимаций Эйнштейна — Инфельда — Гофмана [7], примененный впервые в исследованиях уравнений движения и основанный на разложении потенциалов гравитационного поля в ряд по малому параметру $1/c$ (c — фундаментальная скорость) [1]). В приложении к проблеме гравитационного излучения этот метод рассматривали Инфельд (см. [8]), Фок [9] и Боннор [6, 11]. Разложение по параметру $1/c$ позволяет получить в приближении нулевого порядка уравнения ньютоновской теории тяготения, что, в свою очередь, дает возможность существенно упростить рассмотрение приближений более высоких порядков. Так, подходящим выбором системы координат можно добиться, чтобы в разложении компонент $h_{\mu\nu}$

$$h_{\mu\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} c^{-n} \underset{(n)}{h_{\mu\nu}} (x^{\alpha})$$

первыми отличными от нуля членами были члены второго порядка малости для компонент h_{00} и h_{ij} и третьего порядка для компонент h_{i}.

Соответственно, для компоненты ψ_{00} первым отличным от нуля членом разложения будет $\underset{(2)}{\psi_{00}}$, для компонент ψ_{0i} — члены $\underset{(3)}{\psi_{0i}}$ и для ψ_{ij} — члены четвертого порядка малости $\underset{(4)}{\psi_{ij}}$. Уравнения поля в приближениях указанных порядков принимают вид

$$\Delta \underset{(2)}{\psi_{00}} = 2\lambda \underset{(0)}{T_{00}}, \qquad \Delta \underset{(3)}{\psi_{0i}} = 2\lambda \underset{(2)}{T_{0i}}, \qquad \Delta \underset{(4)}{\psi_{ij}} = 2\lambda \underset{(4)}{T_{ij}} + \underset{(4)}{N_{ij}}, \quad (1.17)$$

где $\underset{(4)}{N_{ij}}$ — нелинейные члены, впервые появляющиеся как аддитивные добавки к членам четвертого порядка малости.

Аналогичные уравнения, как показал Гупта [10] (см. также Боннор [11]), можно получить в приближении n-го порядка малости с помощью другого метода, основанного

---

[1]) Формальной процедуре разложения по параметру $1/c$ отвечает фактическое разложение по безразмерному параметру типа U/c^2, где U — ньютоновский гравитационный потенциал, или по $^2/c^2$, где v — скорость движения одного из тел, образующих систему источников.

на разложении метрики $g_{\alpha\beta}$ и тензора энергии — импульса $T_{\alpha\beta}$ в ряд по параметру λ (гравитационной постоянной):

$$g_{\alpha\beta}(x^\sigma, \lambda) = \overset{(00)}{g_{\alpha\beta}} + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \underset{(n)}{h_{\alpha\beta}}, \qquad T_{\alpha\beta}(x^\sigma, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \underset{(n)}{T_{\alpha\beta}}(x^\sigma),$$

где $\underset{(n)}{h_{\alpha\beta}}$ и $\underset{(n)}{T_{\alpha\beta}}$ не зависят от λ. Подставив эти разложения в уравнения поля, можно представить последние в форме равенств нулю аналитических функций, разложенных в ряд по λ. Приравнивая к нулю выражения, играющие роль коэффициентов по λ^n, мы получаем уравнения тяготения в приближении n-го порядка. Воспользовавшись снова определением (1.10) для компонент $\psi_{\alpha\beta}$, запишем (для $n \geqslant 2$) уравнения

$$\Delta \underset{(n)}{\psi_{\alpha\beta}} = 2\,[\underset{(n-1)}{T_{\alpha\beta}} - \underset{(n)}{N_{\alpha\beta}}], \tag{1.18}$$

где через $\underset{(n)}{N_{\alpha\beta}}$ обозначены нелинейные члены, зависящие только от комбинаций $\psi_{\alpha\beta}$ низшего порядка малости, чем n, и не зависящие от $\underset{(n)}{\psi_{\alpha\beta}}$ и λ. Уравнения (1.18) по определению принимаются за уравнения тяготения Эйнштейна в приближении n-го порядка (Хавас и Гольдберг [13, 14]).

В приближении произвольно высокого порядка уравнения типа (1.17) — (1.18) уже нельзя, вообще говоря, интерпретировать как волновые. Однако в случае островного распределения материи естественно предположить, что классическое понятие массы — энергии системы источников, используемое в линейном приближении, может быть применено и в приближениях более высокого порядка. Приняв это предположение, можно, исходя из решения уравнений тяготения произвольно высокого порядка, оценить соответствующее изменение энергии системы за характерный промежуток времени (например, за полный период 2^s-мультипольных осцилляций) с помощью псевдотензора энергии — импульса, определяющего перенос энергии гравитационными волнами в линейном приближении (Эддингтон [15], Ландау и Лифшиц [16]).

Другим методом оценки потерь энергии $\Delta m = m_2 - m_1$ может служить сравнение с полем Шварцшильда, если стационарные состояния системы в моменты t_1 и t_2, отвечающие значениям массы m_1 и m_2, можно описать решением Шварцшильда. Этот метод применим, очевидно, только

к таким распределениям источников (и таким системам отсчета), которые допускают переход к метрике Шварцшильда на достаточно больших расстояниях от системы источников поля. Тогда изменение Δm массы системы за период осцилляции $\Delta t = t_2 - t_1$ можно интерпретировать как следствие переноса энергии гравитационными волнами.

С этой целью Боннором и Ротенбергом [17, 18], в применении к источникам островного типа (в вакууме $T_{\alpha\beta} = 0$), был предложен так называемый *метод двухпараметрических аппроксимаций*, обобщающий изложенный выше метод разложения метрики в ряд по степеням гравитационной постоянной. Если в качестве параметра вместо гравитационной постоянной λ использовать величину m, характеризующую полную массу системы, а в качестве еще одного параметра, естественно возникающего при определении мультипольных осцилляций системы, выбрать характерный параметр системы a с размерностью длины, то решение уравнений тяготения, разложимое в сходящийся ряд Тейлора по m и a в окрестности $m = 0$ и $a = 0$, может быть представлено в виде

$$g_{\alpha\beta} = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} m^p a^s \overset{(ps)}{g}_{\alpha\beta}, \tag{1.19}$$

где коэффициенты $\overset{(ps)}{g}_{\alpha\beta}$ не зависят от m и a. Обычное разложение по степеням гравитационной постоянной λ эквивалентно разложению по единственному параметру m ($s = 0$).

Подставляя это разложение в уравнения поля в вакууме

$$R_{\alpha\beta} = 0$$

и приравнивая к нулю коэффициенты разложения при $m^p a^s$, получаем систему 10 дифференциальных уравнений второго порядка, называемую «уравнениями поля в ps-приближении»:

$$\Phi_{\alpha\beta}(\overset{(ps)}{g}_{\mu\nu}) = \overset{(ps)}{\Psi}_{\alpha\beta}(\overset{(qr)}{g}_{\mu\nu}) \qquad (q \leqslant p-1,\ r \leqslant s). \tag{1.20}$$

Левые части их линейны по $\overset{(ps)}{g}_{\mu\nu}$ (и их производным), а правые части — нелинейны по $\overset{(qr)}{g}_{\mu\nu}$ (и их производным), известным уже из приближения предшествующего порядка.

Очевидно, приближение 00 отвечает метрике плоского пространства — времени: $g_{\alpha\beta} = \overset{(00)}{g}_{\alpha\beta}$. Все приближения порядка $1s$ линейны и однородны по $\overset{(1s)}{g}_{\alpha\beta}$ и их производным:

$$\overset{(1s)}{\Psi}_{\alpha\beta} = 0$$

и, следовательно, эквивалентны рассмотренным выше приближениям Эйнштейна — Инфельда — Гофмана. Приближения ps-порядков с $p \geqslant 2$ нелинейны: $2s$-приближения отвечают второму порядку малости ($s = 0, 1, 2, \ldots$), $3s$-приближения — третьему порядку ($s = 0, 1, 2, \ldots$) и т. д.

Решение уравнений тяготения в линейном приближении в виде разложения в ряд по мультиполям дается формулами (1.16). В принятых нами обозначениях (1.19) оно может быть записано в виде

$$g_{\alpha\beta} = \overset{(00)}{g}_{\alpha\beta} + \sum_{s=0}^{\infty} ma^s \overset{(1s)}{g}_{\alpha\beta},$$

где дипольные члены отсутствуют ($\overset{(11)}{g}_{\alpha\beta} = 0$), монопольные члены $\overset{(10)}{g}_{\alpha\beta}$ (т. е. статическая часть, $\overset{(00)}{g}_{\alpha\beta} + m\overset{(10)}{g}_{\alpha\beta}$) отвечают линейному приближению к метрике Шварцшильда, а члены $\overset{(12)}{g}_{\alpha\beta}$, $\overset{(13)}{g}_{\alpha\beta}, \ldots, \overset{(1s)}{g}_{\alpha\beta}, \ldots$ называются, соответственно, квадрупольными, октупольными,..., 2^s-мультипольными волновыми решениями в приближениях $1s$-порядков. Это отвечает определению 2^s-мультипольного момента аксиально симметричной системы источников, линейно распределенных вдоль оси симметрии,

$$Q^{(s)}(u) = ma^s h^{(s)}(u), \tag{1.21}$$

где $u = t - r$, а коэффициенты $h^{(s)}(u)$ не зависят от m и a.

Для определения порядка приближения, в котором изолированная система источников обнаруживает вековое изменение массы вследствие излучения гравитационных волн, рассмотрим нестационарную систему, допускающую (при $a \to 0$) предельный переход к стационарному полю точечного источника (полю Шварцшильда). Наиболее

простой системой такого рода является аксиально симметричное распределение конечной длины [1]), описываемое (в сферических координатах r, θ, φ, t) метрикой

$$ds^2 = -A\,dr^2 - r^2\,(B\,d\theta^2 + C\sin^2\theta\,d\varphi^2) + D\,dt^2, \tag{1.22}$$

где A, B, C, D — функции r, θ, t. Записывая для этой метрики уравнения поля (1.20) в ps-приближении и интегрируя их (Розен и Шамир [19], Боннор [17]), получаем:

$$\begin{aligned}
\Box A = P &- \int (M_1 + r^{-1}M)\,dt - \\
&- \int \left\{(L_1 + r^{-1}L) - \int (N_{11} + r^{-1}N_1)\,dt\right\} d\theta - (\eta_1 + r^{-1}\eta) + \\
&+ \int (\sigma_{11} + r^{-1}\sigma_1)\,d\theta - (\chi_1 + r^{-1}\chi), \qquad (1.23)\\
C = &- A\cos\text{es}^2\theta \int \left[2A + r^{-1}\int \left\{2A + r\left(\int M\,dt + \eta\right)\right\} dr + \right.\\
&\left. + r^{-1}\tau\right] \sin\theta\cos\theta\,d\theta + \text{cosec}^2\theta \int \left(\int N\,dt + \sigma\right) \sin^2\theta\,d\theta + \mu\,\text{cosec}^2\,\theta,\\
B = &- C + r^{-1}\int \left\{2A + r\left(\int M\,dt + \eta\right)\right\} dr + r^{-1}\tau,\\
D = &\ A + r\int \left[2r^{-2}A + r^{-1}\left\{\int \left(L - \int N_1 dt - \sigma_1\right) d\theta + \chi\right\}\right] dr + r\nu,
\end{aligned}$$

где $\Box$ — оператор Даламбера в координатах r, θ, φ, t; P, M, L и N — правые (нелинейные) части уравнений (1.20), предполагаемые известными из qr-приближения ($q \leqslant p - 1$, $r \leqslant s$):

$$P = \Psi_{11}, \quad M = \Psi_{10}, \quad L = \Psi_{12}, \quad N = \Psi_{20};$$

для остальных значений индексов α и β уравнения (1.20) обращаются в тождества; наконец, $\eta(r, \theta)$, $\sigma(r, \theta)$, $\chi(r, t)$, $\tau(\theta, t)$, $\nu(\theta, t)$, $\mu(r, t)$ — шесть функций интегрирования, выбором которых можно удовлетворить требованию евклидовости на бесконечности и добиться отсутствия сингулярности метрики на оси симметрии. Индекс 1 в уравнениях (1.23) обозначает дифференцирование по r.

---

[1]) Примером такой системы являются две равные точечные массы, соединенные пружиной и совершающие симметричные осцилляции.

Таким образом, решение уравнений ps-приближения для метрики (1.22) сводится к интегрированию неоднородного волнового уравнения для функций $\overset{(ps)}{A}$, после чего из остальных соотношений системы (1.23) автоматически следуют выражения для $\overset{(ps)}{C}$, $\overset{(ps)}{B}$ и $\overset{(ps)}{D}$. В частности, для линейного приближения $1s$-порядка функции P, M, N и L оказываются равными нулю в силу (1.20), и мы получаем рассмотренное выше однородное волновое уравнение для функций $\psi_{\alpha\beta}$.

Величина изменения энергии системы источников в ps-приближении оценивается методом Бонди [20], основанным на разложении коэффициентов $\overset{(ps)}{g}_{\alpha\beta}$ в ряд по обратным степеням параметра r:

$$\sum_{n=1}^{l} r^{-n} \overset{(n)}{\delta}(\theta, u) \qquad (u = t - r). \tag{1.24}$$

Гравитирующую массу системы можно оценить, установив соответствие между данным стационарным решением и эквивалентным полем, которое создавалось бы некоторой шварцшильдовской массой; в членах $\overset{(ps)}{\Psi}_{\alpha\beta}$ достаточно ограничиться коэффициентами при $1/r$, а в членах $\overset{(ps)}{\Phi}_{\alpha\beta}$ уравнений (1.20) — соответственно коэффициентами порядка не выше $1/r^3$. При этом нужно учитывать только члены, описывающие вековое изменение состояния системы за период Δt, отвлекаясь от членов $\overset{(ps)}{g}_{\alpha\beta}$, которые не изменили своего вида в результате осцилляции. Так, все члены $\overset{(p0)}{g}_{\alpha\beta}$ описывают только постоянную (не меняющуюся за период осцилляции) составляющую поля системы, т. е. приближение $p0$-порядка к собственно метрике Шварцшильда (полю центральной массы m, для которой линейный размер $a = 0$). Отсюда, в частности, легко понять, почему разложения только по параметру m или λ не описывают гравитационных волн.

Нелинейные члены порядка $\overset{(21)}{\Psi}_{\alpha\beta}$ могут содержать только комбинации вида

$$\overset{(11)}{g}_{\alpha\beta} \cdot \overset{(10)}{g}_{\alpha\beta}$$

и, следовательно, обращаются в нуль ввиду отсутствия

дипольных членов ($\overset{(11)}{g}_{\alpha\beta} = 0$). Поэтому достаточно применить разложение (1.24) только к членам порядка $\overset{(ps)}{g}_{\alpha\beta}$ при $s \geqslant 2$. Но Ротенберг показал [21], что для изолированной аксиально симметричной системы источников в приближении $1s$-порядка энергия и импульс, определяемые псевдотензором $t^{\alpha\beta}$, сохраняются[1]). Отсутствие векового изменения массы в приближениях 22- и 23-порядков легко обнаружить, разложив соответствующие коэффициенты $\overset{(22)}{g}_{\alpha\beta}$ и $\overset{(23)}{g}_{\alpha\beta}$ в ряд типа (1.24) и оценив выражения для $\overset{(22)}{\Psi}_{\alpha\beta}$ и $\overset{(23)}{\Psi}_{\alpha\beta}$ в приближении $1/r$.

Таким образом, наинизшим приближением, которое может дать вклад в вековое изменение массы системы, является приближение 24-порядка. Строгое решение уравнений 24-приближения осуществили Хюнтер и Ротенберг [27]. В нелинейные члены $\overset{(24)}{\Psi}_{\alpha\beta}$ должны входить комбинации вида

$$\overset{(10)}{g}_{\alpha\beta} \cdot \overset{(14)}{g}_{\alpha\beta}, \qquad \overset{(11)}{g}_{\alpha\beta} \cdot \overset{(13)}{g}_{\alpha\beta}, \qquad \overset{(12)}{g}_{\alpha\beta} \cdot \overset{(12)}{g}_{\alpha\beta},$$

из которых лишь последняя (квадруполь-квадрупольное излучение) может дать вековой вклад в изменение массы. Действительно, вторая из них тождественно исчезает ($\overset{(11)}{g}_{\alpha\beta} = 0$), а для первой (монополь — 2^4-мультипольное излучение) правые части $\overset{(24)}{\Psi}_{\alpha\beta}$ уравнений (1.20) не содержат вековых членов порядка $1/r$. Напротив, для квадруполь-квадрупольного излучения функции $\overset{(24)}{\Psi}_{\alpha\beta}$ уже содержат вековые члены порядка $1/r$, что приводит к изменению шварцшильдовской массы Δm за период осцилляций:

$$\Delta m = -\frac{2}{15}(\alpha - \beta)\int\limits_T [\overset{(2)}{Q}{}'''(u)]^2\, du, \tag{1.25}$$

---

[1]) Напротив, уже в приближении ($1s$) можно показать, что изолированная система источников теряет момент импульса вследствие излучения гравитационных волн (Кэмпбелл [22]). Для сравнения отметим, что, в отличие от рассматриваемой системы, стержень, вращающийся вокруг ортогональной к нему оси симметрии, в приближении $1s$-порядка теряет за счет гравитационного излучения не только энергию (Эддингтон [23]), но и импульс (Куперсток [24], Ротенберг [25]), а также, за счет октупольных гравитационных волн, момент импульса (Куперсток и Бут [26]).

где $\overset{(2)}{Q}(u)$ — квадрупольный момент (1.21) системы, штрих обозначает дифференцирование по параметру $u = t - r$, а α и β — параметры, характеризующие нестационарность системы ($\alpha + \beta = 1$). Из формулы (1.25) следует, что система не излучает энергию только в строго стационарном случае $\alpha = \beta = {}^1/_2$, либо при осцилляциях весьма специального типа, характеризуемых условием $\overset{(2)}{Q}{}'''(u) = 0$. Оценка потерь массы — энергии по этой формуле, как оказывается, в точности совпадает с оценкой, получаемой при помощи псевдотензора энергии — импульса в линейном приближении (Ротенберг [28]) [1]).

3. Критика методов приближений

Существенный недостаток рассмотренных методов приближенного анализа волновых гравитационных полей (методы Боннора — Ротенберга, Эйнштейна — Инфельда — Гофмана, Фока, Бонди) состоит в том, что в нулевом приближении рассматривается метрика плоского пространства — времени $\overset{(00)}{g}_{\alpha\beta}$, отвечающая отсутствию поля тяготения. Поправка к метрике при этом играет роль бесконечно малой заданного порядка и поэтому может описывать лишь слабые гравитационные поля. Эти методы, следовательно, позволяют определить состояние только слабого гравитационного излучения и только на фоне плоского пространства — времени.

Однако данные современных астрономических наблюдений указывают на возможность существования в космосе источников весьма сильных гравитационных волн. Так, по подсчетам Торна [30], нейтронная звезда, испытывающая колебательные возмущения (пульсации) не-

---

[1]) Рассмотренный метод двухпараметрических аппроксимаций Боннора может быть обобщен и на случай непустого пространства—времени. Так, Ротенберг [29] получил решение уравнений *ps*-приближения для пространств, заполненных электромагнитным излучением. Соответствующее неоднородное волновое уравнение в *ps*-приближении для метрики (1.22) описывает гравитационное и электромагнитное излучения. Метод Боннора был развит также для изолированных аксиально симметричных полей тяготения более общего вида, чем распределение с метрикой (1.22) (Ротенберг [21]). Однако гравитационное излучение произвольных изолированных аксиально симметричных систем удобнее рассматривать на основе общего метода, предложенного Бонди, Метцнером и Ван дер Бургом (см. гл. 11).

сферического характера, может за счет излучения гравитационных волн терять энергию порядка 10^{51} *эрг* (0,1% массы покоя самой звезды) в течение одного периода пульсаций (10^{-4}—10^{-3} *сек*). Аналогичные оценки мощности были получены Вебером [31] для пульсаров, Куперстоком [32, 33] для квазаров и для двойных звезд, Зельдовичем и Новиковым [34] для коллапсировавших звезд, Кармели [35] для тормозного гравитационного излучения Солнца и Уилером [36] для Метагалактики. Кроме того, следует ожидать, что в реальных полях тяготения не только гравитационные волны могут создавать сильное возмущение метрики пространства — времени, но и сама метрика фона может отвечать сильному полю тяготения.

Значительный шаг вперед на пути преодоления этой трудности сделал Айзексон [37, 38], применив метод аппроксимаций Брилла — Хартла [39] к описанию так называемых гравитационных волн «высокой частоты», распространяющихся на фоне сильно искривленного пространства—времени. Идея метода основана на разложении величин $h_{\mu\nu}$, т. е. добавочной части к метрике фона $\gamma_{\mu\nu}$, в ряд по степеням малости отношения $\varepsilon = l/L$, где l — характерный размер волнового возмущения (интерпретируемый как его «длина волны»), а L — характерный размер гравитационного поля фона, условно сопоставляемый «радиусу кривизны» фонового пространства — времени [1]). Этот метод является обобщением рассмотренного выше метода Боннора. Так как ε имеет порядок $(l^2m/r^3)^{1/2}$, то гравитационное излучение изолированной системы на больших расстояниях r от нее всегда можно рассматривать как «высокочастотное излучение», отвечающее случаю $L \to \infty$.

Согласно строгому определению, пространство — время V_4 с метрикой $g_{\mu\nu}$ описывает гравитационные волны высокой частоты, если оно допускает однопараметрическое семейство координатных систем, связанных между собой инфинитезимальными преобразованиями группы Ли G с параметром ε, в которых $g_{\mu\nu}$ принимает вид

$$g_{\mu\nu}(x) = \gamma_{\mu\nu}(x) + \varepsilon h_{\mu\nu}(x, \varepsilon) \qquad (\varepsilon \ll 1), \qquad (1.26)$$

---

[1]) Малость отношения $\varepsilon = l/L$ и интерпретируется как относительная коротковолновость (высокочастотность) бегущего возмущения $h_{\mu\nu}$, т. е. волны на фоне искривленного пространства — времени.

где

$$\gamma_{\mu\nu} = O(1), \quad \partial_\alpha \gamma_{\mu\nu} = O(1), \quad \partial_{\alpha\beta}\gamma_{\mu\nu} = O(1), \quad (1.27)$$

$$h_{\mu\nu} = O(1), \quad \partial_\alpha h_{\mu\nu} = O(\varepsilon^{-1}), \quad \partial_{\alpha\beta} h_{\mu\nu} = O(\varepsilon^{-2}). \quad (1.28)$$

Условия (1.27) означают, что кривизна метрики фона $\gamma_{\mu\nu}$ имеет порядок малости единица, т. е. фоновое пространство — время является искривленным и его тензор Римана

$$R^{(0)}_{\alpha\beta\gamma\delta} \equiv R_{\alpha\beta\gamma\delta}(\gamma_{\mu\nu}) = 0.$$

Однако из условий (1.28) следует, что полная кривизна пространства V_4 по порядку величины может даже превосходить кривизну фона

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}(\gamma_{\mu\nu} + \varepsilon h_{\mu\nu}) = R^{(0)}_{\alpha\beta\gamma\delta} + \varepsilon R^{(1)}_{\alpha\beta\gamma\delta} + \varepsilon^2 R^{(2)}_{\alpha\beta\gamma\delta} + \ldots, \quad (1.29)$$

где

$$R^{(1)}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2}(h_{\alpha\gamma;\beta\delta} + h_{\beta\delta;\alpha\gamma} - h_{\beta\gamma;\alpha\delta} - h_{\alpha\delta;\beta\gamma} + \\ + R^{(0)}_{\alpha\sigma\gamma\delta} h^\sigma_\beta - R^{(0)}_{\beta\sigma\gamma\delta} h^\sigma_\alpha).$$

Здесь ковариантное дифференцирование выполняется относительно метрики фона $\gamma_{\mu\nu}$, с помощью которой производится поднятие и опускание индексов. В разложении (1.29) второй член

$$\varepsilon R^{(1)}_{\alpha\beta\gamma\delta} \approx O(\varepsilon^{-1})$$

по порядку величины превалирует над остальными, так как, например,

$$\varepsilon^2 R^{(2)}_{\alpha\beta\gamma\delta} \approx O(1), \quad \varepsilon^3 R^{(3)}_{\alpha\beta\gamma\delta} \approx O(\varepsilon)$$

и т. д. Аналогично, для тензора Риччи $R_{\alpha\beta}$ полной метрики получаем разложение

$$R_{\alpha\beta}(\gamma_{\mu\nu} + \varepsilon h_{\mu\nu}) = R^{(0)}_{\alpha\beta} + \varepsilon R^{(1)}_{\alpha\beta} + \varepsilon^2 R^{(2)}_{\alpha\beta} + \cdots,$$

где

$$R^{(0)}_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta}(\gamma_{\mu\nu}),$$

$$R^{(1)}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\gamma^{\rho\tau}(h_{\rho\tau;\alpha\beta} + h_{\alpha\beta;\rho\tau} - h_{\tau\alpha;\beta\rho} - h_{\tau\beta;\alpha\rho}),$$

причем превалирующим по порядку величины также

является второй член

$$\varepsilon R^{(1)}_{\alpha\beta} \approx O(\varepsilon^{-1}),$$

тогда как

$$\varepsilon^2 R^{(2)}_{\alpha\beta} \approx O(1).$$

Отсюда следует, что уравнения поля в вакууме в приближении первого порядка будут иметь вид

$$R^{(1)}_{\alpha\beta} = 0, \tag{1.30}$$

в приближении второго порядка — вид

$$R^{(0)}_{\alpha\beta} = -\varepsilon^2 R^{(2)}_{\alpha\beta}, \tag{1.31}$$

и т. д. Вводя величины

$$\hat{\psi}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu} h, \qquad \hat{\psi} = \gamma^{\alpha\beta}\hat{\psi}_{\alpha\beta},$$

где $h \equiv \gamma^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}$, можно представить уравнения (1.30) первого приближения в виде

$$\gamma^{\alpha\beta}\hat{\psi}_{\mu\nu;\beta} - \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}\gamma^{\alpha\beta}\hat{\psi}_{;\alpha\beta} - \hat{\psi}^{\beta}_{\mu;\nu\beta} - \hat{\psi}^{\beta}_{\nu;\mu\beta} + 2R^{(0)}_{\sigma\nu\mu\beta}\hat{\psi}^{\beta\sigma} + \\ + R^{(0)}_{\mu\sigma}\hat{\psi}^{\sigma}_{\nu} + R^{(0)}_{\nu\sigma}\hat{\psi}^{\sigma}_{\mu} = 0, \tag{1.32}$$

где ковариантное дифференцирование выполняется также относительно $\gamma_{\mu\nu}$. Для случая слабого гравитационного поля, определяемого метрикой (1.2), функции $\hat{\psi}_{\mu\nu}$ переходят в ранее введенные функции $\psi_{\mu\nu}$.

Чтобы привести уравнение (1.32) к стандартному виду волнового уравнения относительно потенциалов $\hat{\psi}_{\mu\nu}$, необходимо показать, что второй, третий и четвертый члены в этом уравнении могут быть устранены преобразованием «калибровки», т. е. выбором подходящего генератора ξ^{μ} группы Ли G, индуцирующей допустимые преобразования

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \xi_{\mu;\nu} - \xi_{\nu;\mu}$$

и не меняющей первого члена в (1.32).

Для доказательства воспользуемся формулами, выражающими связь тензоров $R_{\alpha\beta}$ и $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ с увлеченными тензорами [40] $\bar{R}_{\alpha\beta}$ и $\bar{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}$:

$$\bar{R}^{(1)}_{\alpha\beta} = R^{(1)}_{\alpha\beta} - \mathscr{L}_{\xi} R^{(0)}_{\alpha\beta}, \qquad \bar{R}^{(1)}_{\alpha\beta\gamma\delta} = R^{(1)}_{\alpha\beta\gamma\delta} - \mathscr{L}_{\xi} R^{(0)}_{\alpha\beta\gamma\delta},$$

где $\mathscr{L}_\xi$ — символ производной Ли в направлении генератора ξ^α группы G. Пользуясь формулами для производных Ли от тензоров $R_{\alpha\beta}$ и $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ (см., например, [41]), можно показать, что величины $\mathscr{L}_\xi R^{(0)}_{\alpha\beta}$ и $\mathscr{L}_\xi R^{(0)}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ — второго порядка малости по ε, т. е. в приближении высокой частоты ($\varepsilon \to 0$) тензоры $R^{(1)}_{\alpha\beta}$ и $R^{(1)}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ не меняются при преобразованиях группы G («калибровочно-инвариантны», [37]). Используя закон преобразования величин $\hat{\psi}^\alpha_{\mu;\alpha}$ и $\hat{\psi}^\alpha_\alpha$ при инфинитезимальных преобразованиях группы G ($x^\alpha \to x^\alpha + \varepsilon\xi^\alpha$):

$$\hat{\psi}^\alpha_{\mu;\alpha} \to \hat{\psi}^\alpha_{\mu;\alpha} - \gamma^{\alpha\beta}\xi_{\mu;\beta} + R^{(0)}_{\mu\alpha}\xi^\alpha,$$

$$\hat{\psi} \to \hat{\psi} + 2\xi^\alpha_{;\alpha},$$

выберем ξ^μ так, чтобы удовлетворялась система уравнений

$$\gamma^{\alpha\beta}\xi_{\mu;\alpha\beta} - R^{(0)}_{\mu\alpha}\xi^\alpha = \hat{\psi}^\alpha_{\mu;\alpha}, \qquad \xi^\alpha_{;\alpha} = -\frac{1}{2}\hat{\psi}^\alpha_\alpha.$$

Тогда, очевидно, в новой координатной системе будут выполнены условия

$$\hat{\psi}^\alpha_{\mu;\alpha} = 0, \qquad \hat{\psi} = 0,$$

приводящие уравнения (1.32) к искомому виду

$$-\Delta\hat{\psi}_{\mu\nu} \equiv \gamma^{\alpha\beta}\hat{\psi}_{\mu\nu;\alpha\beta} + 2R^{(0)}_{\sigma\mu\nu\beta}\hat{\psi}^{\sigma\beta} + R^{(0)}_{\mu\sigma}\hat{\psi}^\sigma_\nu + R^{(0)}_{\nu\sigma}\hat{\psi}^\sigma_\mu = 0. \tag{1.33}$$

В случае плоской метрики фона, $\gamma_{\mu\nu} = \overset{(00)}{g}_{\mu\nu}$, в силу равенства $R^{(0)}_{\delta\mu\nu\beta} = 0$ все добавочные к $\gamma^{\alpha\beta}\hat{\psi}_{\mu\nu;\alpha\beta}$ члены исчезают, и мы возвращаемся к ранее рассмотренному волновому уравнению (1.12). Для неплоской метрики $\gamma_{\mu\nu}$ левая часть уравнения (1.33) представляет собой обобщенный топологический даламбертиан де Рама [42], легший в основу определения волновых гравитационных полей [1]), предложенного Лихнеровичем [43].

Таким образом, гравитационное излучение на фоне искривленного пространства — времени получает изящное определение в пределе высокой частоты.

---

[1]) Строгий подход к определению гравитационных волн на основе оператора де Рама рассматривается в гл. 8.

Подход Айзексона устраняет две существенные трудности в поисках определения гравитационных волн, справедливого в приближении заданного порядка. Первая из них, как говорилось выше, была связана с необходимостью предполагать слабость гравитационного поля, обусловленного волновым возмущением. Вторая была сопряжена с предположением о плоском характере метрики фона. В результате методы аппроксимаций были применимы лишь к асимптотически плоским гравитационным полям (в частности, к полям островных источников).

Однако метод Айзексона — Брилла — Хартла, как и другие описанные выше методы, не преодолевает еще одной трудности, присущей всем попыткам дать определение гравитационных волн, отправляясь от метода приближений: отсутствует доказательство сходимости ряда последовательных приближений. Так, метод Боннора основан на предположении о сходимости ряда (1.19) в окрестности $m = 0$ и $a = 0$, что, однако, не обеспечивает его сходимости на достаточно больших расстояниях от системы источников. Как показал Фок [9], при разложении подынтегрального выражения (1.13) для волновых функций $\psi^{\alpha\beta}$ достаточно хорошая сходимость ряда обеспечивается лишь для «умеренно больших» расстояний r: именно, для расстояний, больших по сравнению с размерами системы источников, но малых по сравнению с длиной испускаемых ею волн. Что же касается «волновой зоны», т. е. области, удаленной от источников на расстояния, большие по сравнению с длиной испускаемых волн, то в ней сходимость ряда приближений, вообще говоря, нельзя однозначно гарантировать. Между тем именно этот случай и составляет область применимости метода Айзексона — Брилла — Хартла. Критичность ситуации усугубляется еще отсутствием надежных экспериментальных данных о свойствах гравитационных волн, вследствие чего желательность строгого доказательства сходимости рядов последовательных приближений в волновой зоне становится особенно настоятельной.

Наконец, каждый из рассмотренных методов приближений предполагает выбор определенной системы координат (или класса допустимых систем координат), существование которых не может быть гарантировано a priori в заданном поле тяготения. Так, например, при рассмотрении гравитационного излучения изолированной аксиально симметричной системы тел методом Бонди оказывается

неприменимой гармоническая система координат, которая, наоборот, успешно применялась В. А. Фоком к описанию гравитационных волн методом разложения потенциалов в ряд по параметру $1/c$. Причиной этому служит появление логарифмического члена $r^{-1} \log r$ вместо $1/r$ в разложении гравитационных потенциалов, что исключает предельный переход к метрике Шварцшильда (Боннор [11], Айзексон и Виникур [44]). Вследствие этого для достаточно больших расстояний от изолированного источника гравитационного излучения волновое решение линеаризованной теории тяготения в гармонических координатах не может служить первым приближением к точному волновому решению, хотя на расстояниях, значительно меньших длины распространяющейся волны, это описание оказывается удовлетворительным [45, 46].

Между тем уравнения поля тяготения общековариантны. Поэтому всякое физическое следствие теории должно допускать общековариантную формулировку. В связи с этим нашей ближайшей задачей будет рассмотрение строгих общековариантных методов описания гравитационных волн. В качестве отправного пункта мы рассмотрим проблему Коши для уравнений тяготения Эйнштейна.

В дальнейшем будет удобно отличать понятие *гравитационных волн* от понятия *гравитационного излучения*. С гравитационными волнами мы будем связывать поле в собственно волновой зоне, где оно не взаимодействует с источниками. «Гравитационным излучением» мы будем чаще называть общее гравитационное поле источника, порождающего волны. В случае пустого пространства — времени гравитационные волны мы будем называть *свободными*.

ГЛАВА 2

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНА

1. Уравнения Эйнштейна как система гиперболического типа

Строгая постановка проблемы гравитационных волн в общей теории относительности стала возможна лишь после того, как де Дондер [47] и Ланцош [48] доказали, что система уравнений Эйнштейна — это система гиперболического типа, т. е. что ее характеристики совпадают с