неприменимой гармоническая система координат, которая, наоборот, успешно применялась В. А. Фоком к описанию гравитационных волн методом разложения потенциалов в ряд по параметру $1/c$. Причиной этому служит появление логарифмического члена $r^{-1}\log r$ вместо $1/r$ в разложении гравитационных потенциалов, что исключает предельный переход к метрике Шварцшильда (Боннор [11], Айзексон и Виникур [44]). Вследствие этого для достаточно больших расстояний от изолированного источника гравитационного излучения волновое решение линеаризованной теории тяготения в гармонических координатах не может служить первым приближением к точному волновому решению, хотя на расстояниях, значительно меньших длины распространяющейся волны, это описание оказывается удовлетворительным [45, 46].

Между тем уравнения поля тяготения общековариантны. Поэтому всякое физическое следствие теории должно допускать общековариантную формулировку. В связи с этим нашей ближайшей задачей будет рассмотрение строгих общековариантных методов описания гравитационных волн. В качестве отправного пункта мы рассмотрим проблему Коши для уравнений тяготения Эйнштейна.

В дальнейшем будет удобно отличать понятие *гравитационных волн* от понятия *гравитационного излучения*. С гравитационными волнами мы будем связывать поле в собственно волновой зоне, где оно не взаимодействует с источниками. «Гравитационным излучением» мы будем чаще называть общее гравитационное поле источника, порождающего волны. В случае пустого пространства — времени гравитационные волны мы будем называть *свободными*.

ГЛАВА 2

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНА

1. Уравнения Эйнштейна как система гиперболического типа

Строгая постановка проблемы гравитационных волн в общей теории относительности стала возможна лишь после того, как де Дондер [47] и Ланцош [48] доказали, что система уравнений Эйнштейна — это система гиперболического типа, т. е. что ее характеристики совпадают с характеристиками волнового уравнения вида [1])

$$\Box\psi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\,\partial_\beta\,(\sqrt{-g}\,g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\psi) = 0. \tag{2.1}$$

Действительно, уравнения Эйнштейна в пустом пространстве

$$R_{\mu\nu} = 0 \tag{2.2}$$

можно тождественными преобразованиями (см., например, [9]) привести к виду

$$\frac{1}{2}\,g^{\alpha\beta}g_{\mu\nu,\alpha\beta} + \Gamma_{\mu\nu} - L_{\mu\nu} = 0, \tag{2.3}$$

где введены обозначения

$$\Gamma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\Gamma_{\mu,\nu} + \Gamma_{\nu,\mu}) - \Gamma^{\rho}_{\mu\nu}\Gamma_{\rho}, \tag{2.4}$$

$$\Gamma_\rho = g_{\rho\sigma}\Gamma^\sigma, \quad \Gamma^\sigma = -\,g^{\alpha\beta}\Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta}, \tag{2.5}$$

так что члены $L_{\mu\nu}$ выражаются только через компоненты метрического тензора и их первых производных:

$$L_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta}g^{\rho\sigma}g_{\mu\sigma,\beta}g_{\rho\nu,\alpha} - g^{\alpha\rho}g^{\beta\sigma}\Gamma_{\mu\rho\sigma}\Gamma_{\nu\alpha\beta}. \tag{2.6}$$

Перейдем в данной области пространства — времени в специальную систему координат, выбрав в качестве новых x^σ четыре решения уравнения (2.1):

$$\Box x^\sigma = \Gamma^\sigma = \frac{1}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g}\,g^{\sigma\beta})_{,\beta} = 0. \tag{2.7}$$

Такую систему принято называть *гармонической системой координат.* В ней уравнения (2.2) примут вид

$$\frac{1}{2}\,g^{\alpha\beta}g_{\mu\nu,\alpha\beta} - L_{\mu\nu} = 0. \tag{2.8}$$

Как известно, характеристики системы уравнений в частных производных определяются только коэффициентами при высших производных. В нашем случае такими чоэффициентами служат сами компоненты метрического тензора $g^{\alpha\beta}$. Но матрицу $g^{\alpha\beta}$ можно в любой точке пространства — времени неособенным преобразованием коор-

[1]) Всюду далее значок даламбертиана понимается в смысле, указанном формой (2.1).

динат привести к каноническому виду, характеризующемуся сигнатурой (+, —, —, —). Тем самым доказано, что система квазилинейных уравнений (2.2) есть система гиперболического типа (см. [49], стр. 61).

2. Разрыв Адамара

В классической теории дифференциальных уравнений с частными производными (см., например, [50]) распространение волны в пространстве характеризуется *разрывом Адамара* в решении уравнений на начальной гиперповерхности S. Как мы увидим ниже, гиперповерхность S разрыва функций поля (их производных), называемая *поверхностью фронта волны*, является характеристической гиперповерхностью уравнений поля. Поэтому нашей ближайшей задачей будет определение характеристических многообразий («характеристик») уравнений Эйнштейна. Однако прежде, чем применить понятие разрыва Адамара непосредственно к уравнениям Эйнштейна, мы проиллюстрируем его на примере скалярного уравнения (2.1).

Пусть в каждой из окрестностей 1 и 2, на которые поверхность S делит рассматриваемую область пространства — времени, функция ψ непрерывна и при стремлении x^α к некоторой точке $P_0\,(x^\alpha_{(0)})$ поверхности S соответственно из окрестностей 1 и 2 стремится к пределам $\psi^{(0)}_{(1)}$ и $\psi^{(0)}_{(2)}$. Тогда разрывом Адамара функции ψ на поверхности S называется следующая функция точки P_0:

$$[\psi]\,(P_0) \equiv \psi^{(0)}_{(1)} - \psi^{(0)}_{(2)}. \tag{2.9}$$

Пусть теперь функция ψ непрерывна всюду вблизи S, но некоторые из ее первых частных производных $\psi_{,\alpha}$ имеют конечные разрывы на S:

$$[\psi] = 0, \ \ [\psi_{,\alpha}] \neq 0. \tag{2.10}$$

Построим полные дифференциалы $\psi_{(1)}$ и $\psi_{(2)}$ на S:

$$d\psi_{(1)} = \psi_{(1),\,\alpha} dx^\alpha, \qquad d\psi_{(2)} = \psi_{(2),\,\alpha} dx^\alpha.$$

Существование и непрерывность их доказал Адамар [51], рассмотрев предельный переход к S из окрестностей 1 и 2. Вычитая их один из другого, получаем, вследствие (2.10) и непрерывности $d\psi$ на S:

$$(\psi_{(1),\,\alpha} - \psi_{(2),\,\alpha})\, dx^\alpha = [\psi_{,\alpha}]\, dx^\alpha = 0. \tag{2.11}$$

Пусть поверхность S задана уравнением $\varphi(x^\alpha) = 0$. Для $\partial_\alpha\varphi$ — вектора нормали к поверхности S — имеет место соотношение

$$\varphi_{,\alpha}dx^\alpha = 0, \tag{2.12}$$

если приращение dx^α принадлежит поверхности S. Сравнивая (2.11) и (2.12), приходим к выводу о пропорциональности $[\psi_{,\alpha}]$ и $\varphi_{,\alpha}$:

$$[\psi_{,\alpha}] = \chi\varphi_{,\alpha}. \tag{2.13}$$

Если первые производные функции ψ непрерывны, то можно аналогичным образом показать, что разрывы вторых производных будут выражаться формулой

$$[\psi_{,\alpha\beta}] = \chi\varphi_{,\alpha}\varphi_{,\beta}, \tag{2.14}$$

и т. д. (см. Адамар [51], стр. 81—89).

Итак, проблему исследования гравитационных волн как решений уравнений Эйнштейна следует связать с решением задачи Коши для системы квазилинейных уравнений в частных производных гиперболического типа в неаналитических функциях; иными словами, следует предполагать, что коэффициенты уравнений, начальные данные и само решение могут быть функциями конечного порядка гладкости C^r, а производные от этих функций более высокого порядка, чем r, претерпевают разрыв Адамара на некоторых гиперповерхностях. (Функция ψ называется функцией класса C^r, если она имеет непрерывные частные производные до порядка r включительно.) Если ψ — функция класса C^{r-1} в окрестности некоторой гиперповерхности S, а ее производные порядка r имеют на S разрыв Адамара, то ψ называется кусочно-гладкой функцией класса C^r, или функцией класса C^r «на кусках» [1]).

Решение задачи Коши зависит не только от класса гладкости функций, в которых заданы начальные данные и ищется решение, но и от характера начальной гиперповерхности S. Именно: решения задачи оказываются существенно различными в зависимости от того, является ли гиперповерхность S *свободной* или *характеристической* [2]).

---

[1]) Par morceaux («на кусках») — в оригинальной терминологии Лихнеровича (см. [52], стр. 27—35).

[2]) Для общего случая постановку задачи Коши и определение свободной и характеристической гиперповерхности можно найти в монографиях Петровского [49], а также Берса, Джона и Шехтера [53].

В важном для нас случае уравнений Эйнштейна (2.2) задача Коши формулируется следующим образом:

Пусть на начальной гиперповерхности S, выражающейся уравнением вида

$$S: \quad \varphi(x^\alpha) = 0, \tag{2.15}$$

заданы функции $g_{\alpha\beta}(x^\sigma)$ и их первые производные $g_{\alpha\beta,\rho}(x^\sigma)$; требуется найти функции $g_{\alpha\beta}(x^\sigma)$ вне S при условии, что на S они сами и их первые производные совпадают с заданными функциями, причем и на S, и вне S искомые $g_{\alpha\beta}$ удовлетворяют уравнениям (2.2).

В проведенном Лихнеровичем анализе задачи Коши для уравнений Эйнштейна большую роль сыграл выбор удобной системы координат. В дальнейшем мы будем предполагать, что система координат — *гармоническая*, так что уравнения (2.2) принимают вид (2.8), а начальные данные подчиняются условию

$$\Gamma^\sigma = 0.$$

Точное решение задачи Коши для уравнений Эйнштейна в гармонических координатах было дано Лихнеровичем в работе [54], которой мы в дальнейшем и будем придерживаться.

В рамках условия гармоничности во всей области пространства — времени, где ищется решение задачи Коши, в бесконечно малой окрестности гиперповерхности S можно выбрать такие координаты x^σ, в которых ее уравнение приводится к виду

$$\varphi(x^\alpha) = x^0 = 0. \tag{2.16}$$

Из постановки задачи Коши легко видеть, что в проблеме гравитационных волн нас должно интересовать ее решение в функциях класса C^1 (C^2 на кусках) при достаточно гладких (но неаналитических) начальных данных. Иными словами, компоненты $g_{\mu\nu}$ и их первые производные $g_{\mu\nu,\sigma}$ будут непрерывны на гиперповерхности S, а какие-то из вторых производных метрики, $g_{\mu\nu,\rho\sigma}$, должны претерпевать на S разрыв Адамара. Определим, какие из вторых производных $g_{\mu\nu}$ могут иметь разрыв на гиперповерхности S, заданной уравнением (2.16). Согласно формуле Адамара (2.14), разрывы вторых производных можно выразить в виде

$$[g_{\mu\nu,\alpha\beta}] = a_{\mu\nu}\varphi_{,\alpha}\varphi_{,\beta}, \tag{2.17}$$

где $a_{\mu\nu}$ — так называемые «коэффициенты разрывности» (см. также работы Траутмана [55] и Беля [56]). Отсюда вытекает, что из вторых производных от $g_{\mu\nu}$ на гиперповерхности S разрыв могут терпеть только $g_{\mu\nu,00}$:

$$[g_{\mu\nu,00}] = a_{\mu\nu}. \tag{2.18}$$

Но среди этих производных производные от $g_{0\alpha}$ не входят в уравнения Эйнштейна. Поэтому для нас важно то, что из всех производных от $g_{\mu\nu}$, входящих в уравнения (2.2), разрыв на гиперповерхности S могут претерпевать только вторые производные вида $g_{ij,00}$. В этом случае данные Коши для задачи (2.2) сводятся к заданию на S только значений функций $g_{\mu\nu}$ и $g_{\mu\nu,0}$, из которых первые мы предполагаем трижды, а вторые — дважды непрерывно дифференцируемыми по координатам x^i. Остальные первые производные от $g_{\mu\nu}$, а также вторые производные от g_{00} и g_{0i} однозначно даются дифференцированием по x^i уже известных данных Коши на S.

В связи с этим возникает вопрос: когда уравнения Эйнштейна (2.2) вместе с данными Коши однозначно определяют также и производные $g_{ij,00}$?

Как показал Лихнерович ([52], стр. 31—33, см. также [57], стр. 364), система уравнений (2.2) в гармонической системе координат эквивалентна системе вида

$$\frac{1}{2} g^{00} g_{ij,00} + \Omega_{ij} = 0, \tag{2.19}$$

$$S^0_\alpha = 0, \qquad \Gamma^\alpha = 0, \tag{2.20}$$

где

$$S^\alpha_\beta = R^\alpha_\beta - \frac{1}{2} R\delta^\alpha_\beta, \tag{2.21}$$

причем Ω_{ij}, S^0_α и Γ^α не содержат производных вида $g_{ij,00}$ и, следовательно, полностью определяются данными Коши. При этом выполнение условий (2.20) на гиперповерхности S гарантирует их выполнение и в окрестности S, если на S и вне S имеют место уравнения (2.19) (теорема Лихнеровича об инволюции системы дифференциальных уравнений [52]).

Это означает, что условия (2.20) служат лишь для определения данных Коши, которые, следовательно, не могут быть произвольными. В то же время система (2.19) служит для интегрирования системы (2.2) по x^0, т. е. для определения неизвестных функций $g_{\mu\nu}$. Таким образом, задача Коши для уравнений Эйнштейна в пустом пространстве распадается на две части: 1) определение данных Коши, удовлетворяющих уравнениям (2.20); 2) интегрирование системы уравнений (2.19) по x^0.

Пусть мы имеем данные Коши, удовлетворяющие условиям (2.20). Тогда уравнения (2.2) при условии $g^{00} \neq 0$ допускают решение, не имеющее разрыва Адамара на S; это соответствует случаю, когда уравнения (2.19) вместе с данными Коши однозначно определяют также и производные $g_{ij,00}$. Наоборот, если $g^{00} = 0$ в окрестности S, то вторые производные $g_{ij,00}$, а следовательно, и компоненты тензора кривизны R_{0i0j} не могут быть определены на S однозначно данными Коши и уравнениями поля, т. е. претерпевают на гиперповерхности S разрыв Адамара [1]).

3. Характеристические гиперповерхности уравнений Эйнштейна

Условие $g^{00} = 0$, определяющее разрыв Адамара тензора кривизны на начальной гиперповерхности S, заданной в виде (2.16), можно сформулировать в общековариантном виде. Действительно, переходя к произвольным координатам, в которых $x^0 = \varphi(x'^{\alpha})$, запишем условие

$$g^{00} = \frac{\partial x^0}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^0}{\partial x'^{\beta}} g'^{\alpha\beta} = 0$$

в виде общего уравнения гиперповерхности S, допускающей слабый разрыв решения системы (2.2) (штрихи опущены):

$$g^{\alpha\beta}\varphi_{,\alpha}\varphi_{,\beta} = 0, \tag{2.22}$$

т. е. *уравнения эйконала* из геометрической оптики ([16], стр. 173).

Но уравнение (2.22) является необходимым и достаточным условием изотропности гиперповерхности S (см. [58], стр. 57). Следовательно, слабый разрыв первого рода

[1]) По определению, разрыв производных от функций, выражающих решение задачи Коши для некоторой системы уравнений, при условии непрерывности самого решения называется *слабым* разрывом решения данной системы уравнений. Таким образом, условие $g^{00} = 0$ означает слабый разрыв первого рода для решения системы уравнений (2.2).

в решении системы уравнений (2.2) (разрыв Адамара тензора кривизны) возможен только при условии, что начальная гиперповерхность S изотропна.

Мы видим, что решение задачи Коши для уравнений Эйнштейна в пустом пространстве существенно зависит от характера начальной гиперповерхности S. Если гиперповерхность S, заданная уравнением $\varphi(x^\alpha) = 0$, не удовлетворяет условию (2.22):

$$g^{\alpha\beta}\varphi_{,\alpha}\varphi_{,\beta} \neq 0, \qquad (2.23)$$

то она называется *свободной*, и задача Коши для уравнений (2.2) в функциях класса C^1 (C^2 на кусках) допускает единственное решение. Если же S удовлетворяет условию (2.22), то она называется *характеристической*, и теорема о единственности решения задачи Коши не имеет места.

4. Теорема Лере

О решении задачи Коши для уравнений Эйнштейна (2.2) можно судить также на основе общих теорем о существовании и единственности решения системы квазилинейных дифференциальных уравнений с частными производными гиперболического типа. Так, если входящие в уравнения коэффициенты все аналитичны, а решение ищется в аналитических функциях, то при аналитических начальных данных на свободной гиперповерхности задача Коши имеет, притом единственное, решение (теорема Коши — Ковалевской, см. [53], стр. 56). Однако к интересующему нас случаю решения задачи Коши в функциях класса C^1 (C^2 на кусках) теорема Коши — Ковалевской неприменима.

Как заметил Лихнерович [54], в нашем случае может быть использована теорема Лере [59], согласно которой система квазилинейных уравнений в частных производных гиперболического типа имеет решение в неаналитических функциях, и притом единственное, при условии, что начальная гиперповерхность S является свободной (пространственноподобной), а данные Коши на ней выражаются достаточно гладкими функциями. Применительно к уравнениям (2.2) все условия теоремы Лере удовлетворяются, если воспользоваться гармоническими координатами, в которых уравнения Эйнштейна принимают вид (2.8), а начальные данные определяются решением системы уравнений (2.20).

Из теоремы Лере вытекает следующий важный результат:

Разрыв Адамара тензора Римана $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ в пустом пространстве — времени возможен только на характеристической гиперповерхности уравнений Эйнштейна (2.2) S, *определяемой уравнением эйконала* (2.22).

Действительно, наличие разрыва Адамара в тензоре Римана на некоторой гиперповерхности S свидетельствует о том, что по крайней мере некоторые из вторых производных метрического тензора $g_{\mu\nu,\,\rho\sigma}$ не могут быть однозначно определены из уравнений поля в окрестности S по заданным на ней начальным данным. А это, в свою очередь, означает, что гиперповерхность S не может быть свободной.

5. Бихарактеристики уравнений тяготения

Мы выяснили, что в римановом пространстве V_4 сигнатуры — 2 характеристическое многообразие уравнений Эйнштейна в пустоте

$$R_{\mu\nu} = 0 \tag{2.24}$$

представляет собой изотропную трехмерную гиперповерхность V_3 (2.15), причем функция φ удовлетворяет уравнению эйконала (2.22).

Огибающая гиперплоскостей, касательных в данной точке ко всем возможным характеристическим гиперповерхностям, проходящим через эту точку, называется характеристическим конусом [50]. А так как характеристическая гиперповерхность уравнений Эйнштейна изотропная (т. е. несет на себе вырожденную метрику), то характеристический конус системы уравнений (2.2) совпадает со световым конусом в данной точке ([52], стр. 33—35). Впервые уравнение (2.22) как характеристическое уравнение для системы (2.1) было рассмотрено Финци [59].

Согласно определению *бихарактеристик* (называемых также *лучами*) для системы квазилинейных уравнений второго порядка (см. [50], стр. 551), бихарактеристики уравнений Эйнштейна (2.2) совпадают с линиями тока изотропного векторного поля l^α, ортогонального к характеристической гиперповерхности S,

$$l^\alpha = g^{\alpha\beta}\,\varphi_{,\beta}, \tag{2.25}$$

и выражаются уравнениями

$$\frac{dx^\alpha}{d\tau} = g^{\alpha\beta}\varphi_{,\beta}, \tag{2.26}$$

где τ — параметр на кривой. Очевидно, из уравнений (2.26) вытекает также

$$l_\beta = g_{\beta\alpha}\frac{dx^\alpha}{d\tau}. \tag{2.27}$$

Функции $x^\alpha(\tau)$ и $l_\alpha(\tau)$ можно задать канонической системой уравнений

$$\frac{dx^\alpha}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial l_\alpha}, \qquad \frac{\partial l_\alpha}{\partial \tau} = -\frac{\partial H}{\partial x^\alpha}, \tag{2.28}$$

где функция Гамильтона

$$H(x^\alpha, l_\beta) = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}x^\alpha l^\beta \tag{2.29}$$

совпадает с характеристической формой уравнений Эйнштейна в пустом пространстве [50]. Но решения $x^\alpha(\tau)$ канонической системы (2.28) определяют экстремали функции Лагранжа

$$L = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}.$$

В самом деле, переходя от переменных $\left(x^\alpha, \frac{dx^\alpha}{d\tau}\right)$ к переменным (x^α, l^β), получаем классическое соотношение между L и H:

$$H = \left(\frac{dx^\alpha}{d\tau}\right)\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{dx^\alpha}{d\tau}\right)} - L.$$

Поскольку первый интеграл системы (2.28) есть $2L = C = \text{const}$, то эти решения будут экстремалями и для

$$\sqrt{2L} = \sqrt{g_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}},$$

т. е. будут геодезическими риманова пространства V_4 с метрикой $g_{\alpha\beta}$ ([52], стр. 33—35).

Как известно из теории дифференциальных уравнений в частных производных [50], бихарактеристики принадлежат к характеристической поверхности, т. е. касательные к ним являются образующими характеристического конуса. Но, как мы видели выше, характеристический конус для уравнений Эйнштейна совпадает со световым конусом. Следовательно, *бихарактеристики уравнений Эйнштейна являются изотропными геодезическими.*

6. Задача Коши для уравнений Эйнштейна — Максвелла

При анализе определения гравитационных волн существенную пользу может принести опыт, приобретенный при исследовании теории электромагнитных волн, описываемых тензором энергии — импульса

$$\tau_{\alpha\beta} = \frac{1}{4} g_{\alpha\beta} F_{\lambda\mu} F^{\lambda\mu} - F_{\alpha}^{\rho} F_{\beta\rho}, \tag{2.30}$$

где $F_{\alpha\beta}$ есть максвелловский тензор напряженностей. Поэтому целесообразно рассмотреть задачу Коши также для уравнений Максвелла в римановом пространстве — времени общей теории относительности. Общее решение этой задачи исследовал Лихнерович ([52], стр. 43—52).

Самосогласованная система уравнений Эйнштейна — Максвелла имеет вид

$$D_{\alpha} \equiv g^{\alpha\beta} F_{\alpha\gamma;\beta} = 0, \tag{2.31}$$

$$E^{\alpha} \equiv \frac{1}{2} \eta^{\beta\gamma\delta\alpha} F_{\gamma\delta;\beta} = 0, \tag{2.32}$$

$$Q_{\alpha\beta} \equiv R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} + \lambda\tau_{\alpha\beta} = 0. \tag{2.33}$$

Здесь $\eta^{\alpha\beta\gamma\delta}$ — дискриминантный тензор [1])

$$\eta^{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}, \qquad \eta_{\alpha\beta\gamma\delta} = -\sqrt{-g}\, \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}, \tag{2.34}$$

а $\varepsilon_{\mu\nu\gamma\delta}$ — полностью антисимметричный символ Леви-Чивиты, равный $+1$ для ε_{1234} и всех четных перестановок индексов, -1 для нечетных перестановок и 0 в остальных случаях.

Примем, что поле $F_{\alpha\beta}$— класса C^0 (C^2 на кусках). Тогда задача Коши для уравнений Эйнштейна—Максвелла (2.31) — (2.33) формулируется так: пусть на начальной

[1]) Точнее, *аксиальный* тензор, так как при преобразовании координат его знак зависит от знака якобиана преобразования (см., например, [60], стр. 11).

гиперповерхности S (2.15) заданы гравитационное и электромагнитное поля; требуется определить их вне S, если они удовлетворяют уравнениям (2.31) — (2.33).

В системе координат, где уравнение S имеет вид (2.16), данные Коши состоят из $g_{\alpha\beta}$ (функций, по крайней мере три раза непрерывно дифференцируемых по x^i), $g_{\alpha\beta,0}$ и $F_{\alpha\beta}$ (функций, дважды дифференцируемых по тем же координатам). Разрыв на S могут иметь лишь производные $g_{\alpha\beta,00}$ и $F_{\alpha\beta,0}$. Выделяя для удобства индекс 0, запишем уравнения (2.31) в форме

$$D_i \equiv g^{00}F_{0i,0} + g^{0k}F_{ki,0} + \ldots = 0, \qquad (2.35)$$

$$D_0 \equiv g^{0i}F_{i0,0} + \ldots = 0 \qquad (2.36)$$

(многоточие здесь и в дальнейшем используется для того, чтобы не выписывать явно члены, однозначно определяемые данными Коши).

Как показал Лихнерович, система уравнений (2.35) — (2.36) эквивалентна системе, составленной из уравнений (2.35) и

$$D^0 = 0, \qquad (2.37)$$

где величина D^0 $(\equiv g^{0i}D_i + g^{00}D_0)$, как видно из уравнений (2.35) — (2.36), однозначно определяется данными Коши. Аналогично, уравнения (2.32) эквивалентны системе

$$E_i \equiv \frac{1}{2}\eta^{0jki}F_{jk,0} + \ldots = 0, \qquad (2.38)$$

$$E^0 \equiv \frac{1}{2}\eta^{jkl0}F_{kl,j} = 0, \qquad (2.39)$$

где E^0 определяется данными Коши. Наконец, уравнения (2.33) эквивалентны системе

$$Q_{ij} \equiv R_{ij} - \frac{1}{2}Rg_{ij} + \lambda\tau_{ij} = 0, \qquad (2.40)$$

$$Q^0_\alpha \equiv R^0_\alpha - \frac{1}{2}R\delta^0_\alpha + \lambda\tau^0_\alpha = 0, \qquad (2.41)$$

где Q^0_α определяется данными Коши. (Напомним, что вне источников след тензора энергии — импульса $\tau^\alpha_\alpha \equiv 0$.) Таким образом, задача Коши распадается на две части: 1) определение данных Коши, удовлетворяющих на S условиям (2.37), (2.39) и (2.41); 2) интегрирование при найденных начальных данных системы уравнений (2.35), (2.38) и (2.40) по координате x^0.

Предположим сначала, что $g^{00} \neq 0$ всюду на S. Тогда из уравнений (2.38) однозначно определяется $F_{ik,0}$, из уравнений (2.35) — $F_{0i,0}$, а из уравнений (2.40) — $g_{ij,00}$. Таким образом, все вторые производные от $g_{\alpha\beta}$ и первые производные от $F_{\alpha\beta}$ однозначно определяются начальными данными и исходной системой, в силу чего последняя имеет единственное решение.

Пусть теперь $g^{00} = 0$ на S. Тогда $g_{ij,00}$ и $F_{0i,0}$ могут иметь разрыв на S, и, следовательно, S — характеристическое многообразие уравнений Максвелла. Характеристическое уравнение, как мы знаем, имеет вид (2.22), иными словами, характеристическое многообразие уравнений Максвелла совпадает с характеристическим многообразием уравнений Эйнштейна.

Таким образом, мы доказали теорему Лихнеровича ([52], стр. 50—52):

Характеристические многообразия (2.15) *уравнений Эйнштейна и уравнений Максвелла в* V_4 *совпадают и определяются решениями уравнения эйконала* (2.22).

Прямым следствием этой теоремы является тот факт, что бихарактеристики уравнений Эйнштейна совпадают с бихарактеристиками уравнений Максвелла.

7. Фронт гравитационной волны и «лучи» тяготения

На основании изложенного можно утверждать, что характеристическое многообразие уравнений Эйнштейна есть гиперповерхность, на которой тензор Римана терпит разрыв Адамара, т. е. эта гиперповерхность играет роль фронта волны, понимаемого как поверхность разрыва $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ [55, 59]. Бихарактеристики же уравнений Эйнштейна представляют собой траектории изотропного вектора, ортогонального к характеристической гиперповерхности (фронту волны) и играющего, следовательно, роль волнового вектора. Так как характеристическое многообразие и бихарактеристики — инварианты преобразований координат ([50], стр. 555), то *трехмерную характеристическую гиперповерхность уравнений Эйнштейна можно рассматривать как инвариантно определенный фронт гравитационной волны, а бихарактеристики уравнений Эйнштейна — как инвариантно определенные гравитационные лучи, т. е. траектории распространения фронта волны.*

Аналогично, фронт электромагнитной волны в пространстве V_4 определяется характеристической гиперповерхностью уравнений Максвелла; вследствие теоремы Лихнеровича, он совпадает с фронтом гравитационной волны. Траектории распределения электромагнитной волны — электромагнитные лучи — можно определить как бихарактеристики уравнений Максвелла; они совпадают с гравитационными лучами.

ГЛАВА 3

СОДЕРЖАНИЕ ПРОБЛЕМЫ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН

1. Различные аспекты проблемы

С точки зрения результатов, изложенных в главе 2, поля тяготения, описывающие свободные гравитационные волны, определяются решениями уравнений Эйнштейна (2.2) с начальными данными на характеристической гиперповерхности. Однако частные решения уравнений Эйнштейна найдены, как правило, без задания определенных граничных условий, так что волновой характер конкретного решения, вообще говоря, может не быть очевиден. Между тем, исследуя гравитационные поля, мы имеем в своем распоряжении только частные решения уравнений Эйнштейна. Поэтому возникает проблема: определить общековариантным образом класс полей тяготения, который отвечал бы разрыву Адамара в решениях уравнений Эйнштейна с начальными данными на характеристическом многообразии.

Окончательное решение этой проблемы до сих пор отсутствует, несмотря на многочисленные варианты, к обзору которых перейдем в следующих разделах. Трудность ее с точки зрения теории дифференциальных уравнений объясняется сложностью нелинейной структуры уравнений Эйнштейна и отсутствием для них универсальных граничных условий. С дифференциально-геометрической точки зрения трудность этой проблемы состоит в отсутствии общековариантного оператора Даламбера, который выражался бы явным образом из уравнений Эйнштейна. Наконец, с физической точки зрения трудность проблемы связана также с отсутствием общековариантного выражения для энергии гравитационного поля в общей теории относи-