Аналогично, фронт электромагнитной волны в пространстве V_4 определяется характеристической гиперповерхностью уравнений Максвелла; вследствие теоремы Лихнеровича, он совпадает с фронтом гравитационной волны. Траектории распределения электромагнитной волны — электромагнитные лучи — можно определить как бихарактеристики уравнений Максвелла; они совпадают с гравитационными лучами.

ГЛАВА 3
СОДЕРЖАНИЕ ПРОБЛЕМЫ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН

1. Различные аспекты проблемы

С точки зрения результатов, изложенных в главе 2, поля тяготения, описывающие свободные гравитационные волны, определяются решениями уравнений Эйнштейна (2.2) с начальными данными на характеристической гиперповерхности. Однако частные решения уравнений Эйнштейна найдены, как правило, без задания определенных граничных условий, так что волновой характер конкретного решения, вообще говоря, может не быть очевиден. Между тем, исследуя гравитационные поля, мы имеем в своем распоряжении только частные решения уравнений Эйнштейна. Поэтому возникает проблема: определить общековариантным образом класс полей тяготения, который отвечал бы разрыву Адамара в решениях уравнений Эйнштейна с начальными данными на характеристическом многообразии.

Окончательное решение этой проблемы до сих пор отсутствует, несмотря на многочисленные варианты, к обзору которых перейдем в следующих разделах. Трудность ее с точки зрения теории дифференциальных уравнений объясняется сложностью нелинейной структуры уравнений Эйнштейна и отсутствием для них универсальных граничных условий. С дифференциально-геометрической точки зрения трудность этой проблемы состоит в отсутствии общековариантного оператора Даламбера, который выражался бы явным образом из уравнений Эйнштейна. Наконец, с физической точки зрения трудность проблемы связана также с отсутствием общековариантного выражения для энергии гравитационного поля в общей теории относительности, что мешает решению вопроса о возможности переноса энергии гравитационными волнами и описанию самих волн в терминах свободного переноса энергии поля.

Проблема гравитационных волн, как всякая физическая задача, предполагает не только теоретическую, но и экспериментальную трактовку. Иными словами, к гравитационным волнам можно и должно подходить как к физической реальности, доступной экспериментальным измерениям. Но для корректной теоретической интерпретации данных эксперимента физическая теория должна содержать некоторые исходные общие посылки, не зависящие от конкретного эксперимента. Только в этом случае теория оказывается цельной и замкнутой, т. е. имеет собственную логическую основу (см., например, [61]). В противном случае сопоставление теории с данными того или иного эксперимента носило бы характер тавтологии.

В этом смысле общая теория относительности занимает исключительное положение среди всех физических теорий. Строгий геометрический фундамент, на котором зиждется здание эйнштейновской теории тяготения, позволяет нам надеяться на возможность общего и строгого обоснования концепции гравитационного излучения. Для выяснения этой возможности мы и предприняли в предыдущей главе обсуждение задачи Коши для уравнений гравитационного поля. При этом выяснилось, что решение задачи Коши для уравнений тяготения Эйнштейна в ряде существенных пунктов обнаруживает глубокую аналогию с решением соответствующей задачи для уравнений электромагнитного поля. В частности, характеристические многообразия и бихарактеристики уравнений Эйнштейна и уравнений Максвелла в пространстве — времени V_4 совпадают. Но в классической электродинамике характеристическое многообразие уравнений Максвелла описывает фронт электромагнитной волны, а бихарактеристики уравнений Максвелла — траектории распространения электромагнитного излучения. В свете обнаруженной аналогии становится оправданным предположение, что теоретически фронт гравитационной волны можно определить в терминах характеристического многообразия уравнений Эйнштейна, а траектории ее распространения — в терминах бихарактеристик уравнений тяготения.

Основной проблемой, однако, остается проблема определения поля гравитационного излучения, или гравитационной волновой зоны. Изложенное выше не исключает возможности найти удовлетворительное определение. При этом поиски исходных посылок, по-видимому, можно вести на пути дальнейшего углубления аналогии между гравитационным и электромагнитным полями. Разумеется, необходимо отдавать себе отчет в том, что эта аналогия не может продолжаться неограниченно. Тем не менее, следует указать, что все рассматриваемые в дальнейшем методы описания гравитационного излучения так или иначе используют аналогию между полями электромагнетизма и гравитации.

Эта аналогия может быть обнаружена различными способами. Первый способ непосредственно вытекает из сопоставления дифференциальной структуры уравнений тяготения и электромагнетизма, т. е. из сравнительного анализа решений задачи Коши для уравнений Эйнштейна и уравнений Максвелла. Такой анализ удобнее всего произвести, если в уравнениях тяготения в качестве тензора поля, аналогичного электромагнитному тензору $F_{\mu\nu}$, принять тензор кривизны пространства — времени V_4. Уравнения Эйнштейна

$$R_{\alpha\beta} = -\lambda U_{\alpha\beta} \qquad \left(U_{\alpha\beta} \equiv T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} T g_{\alpha\beta}\right) \tag{3.1}$$

и тождества Бианки

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta;\sigma} + R_{\alpha\beta\sigma\gamma;\delta} + R_{\alpha\beta\delta\sigma;\gamma} = 0 \tag{3.2}$$

приводят к соотношениям [1] [60, 62]

$$R_{\alpha\beta\gamma.;\delta}^{\dots\delta} = -2\lambda U_{\gamma[\alpha;\beta]} \qquad (2U_{\gamma[\alpha;\beta]} \equiv U_{\gamma\alpha;\beta} - U_{\gamma\beta;\alpha}). \tag{3.3}$$

Соотношения (3.2) и (3.3) обнаруживают замечательную аналогию с уравнениями Максвелла

$$F_{\mu\nu;\sigma} + F_{\sigma\mu;\nu} + F_{\nu\sigma;\mu} = 0, \tag{3.4}$$

$$F_{\mu;\nu}^{\nu} = -j_\mu, \tag{3.5}$$

причем тензор

$$J_{\gamma\alpha\beta} = 2\lambda U_{\gamma[\alpha;\beta]} \tag{3.6}$$

может быть интерпретирован как гравитационный аналог

[1] Здесь и далее прямые скобки означают антисимметризацию по заключенным в них индексам; соответственно, круглые скобки будут означать симметризацию.

электромагнитного тока. Однако если рассматривать (3.2) и (3.3) как уравнения относительно компонент $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$, то возникает вопрос: при каких условиях из уравнений (3.2) и (3.3) вытекают эйнштейновские уравнения (3.1)? Более строго проблему можно сформулировать так: каким условиям должны удовлетворять начальные данные уравнений (3.2) и (3.3), чтобы полный класс их решений определял множество всех полей тяготения эйнштейновской теории?

Ответ на этот вопрос был дан Лихнеровичем, который показал [62], что если на начальной гиперповерхности S, ориентированной в пространстве, начальные данные уравнений (3.2) и (3.3) (т. е. компоненты тензора Римана) удовлетворяют соотношениям (3.1), то последние удовлетворяются и в окрестности S [1]). Иными словами, уравнения (3.2) и (3.3) полностью эквивалентны уравнениям тяготения Эйнштейна, если данные Коши для уравнений (3.2) и (3.3) на пространственноподобной начальной гиперповерхности S подчинены условиям связи (3.1). В этом случае уравнения (3.2) — (3.3) называются квазимаксвелловскими уравнениями тяготения [63].

Однако «квазимаксвелловский подход» приводит к принципиальным трудностям при описании гравитационных полей волнового типа, определяемых начальными данными на характеристической (изотропной) гиперповерхности. Так, в случае гравитационного поля можно построить аналог волнового уравнения, отвечающий уравнению относительно тензора электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$, следующему из уравнений Максвелла в римановом пространстве — времени (Толмэн [63]). Однако этот аналог оказывается тождеством относительно тензора Римана $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ и, следовательно, не позволяет выделить волновые поля как специальный класс полей тяготения.

Наряду с дифференциальными методами, аналогия между полями тяготения и электромагнетизма может быть обнаружена на алгебраическом пути. Это приводит к возможности построить определение полей гравитационных волн на основе сходства алгебраической структуры тензора электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$ и тензора Римана $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$. Как мы увидим в следующей главе, характерное свойство полей электромагнитного излучения, выделяющее их из

[1]) Эта теорема представляет собой аналог теоремы об инволюции системы уравнений Эйнштейна, рассмотренной в предыдущей главе.

множества всех электромагнитных полей, может быть сформулировано в форме чисто алгебраических условий, а именно, в виде обращения в нуль инвариантов тензора электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$. С этой точки зрения определение электромагнитного излучения основано на алгебраическом разбиении всех электромагнитных полей на два типа, физически интерпретируемых как волновые и неволновые поля. Это наводит на мысль о применении метода алгебраической классификации также и к проблеме определения гравитационных волновых полей. Однако здесь мы сразу же убеждаемся в отсутствии полной алгебраической аналогии между электромагнитными и гравитационными полями.

В самом деле, вследствие различия в алгебраической структуре тензора электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$ и тензора кривизны пространства—времени $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$, гравитационные поля разбиваются не на два типа, как электромагнитные, а на пять алгебраически различных типов, определяемых классификацией Петрова (три основных типа, из которых два могут быть как вырожденными, так и невырожденными). Это приводит к разнообразию алгебраических свойств гравитационного волнового поля и, соответственно, к множественности алгебраических критериев, выделяющих волновые гравитационные поля из всех полей тяготения. В этом состоит еще одна трудность, вследствие которой проблема гравитационных волн в общей теории относительности до сих пор не получила общепринятого теоретического разрешения. Алгебраическая классификация полей тяготения по Петрову [64, 65] будет, однако, играть весьма важную роль в нашем дальнейшем изложении, поэтому целесообразно остановиться на ней более подробно.

2. Алгебраическая классификация полей тяготения. Пространства Эйнштейна

Пусть данное риманово пространство V_4 является пространством Эйнштейна, т. е. описывается уравнениями

$$R_{\alpha\beta} = \varkappa g_{\alpha\beta}. \tag{3.7}$$

Легко показать, что при этом должно быть

$$\varkappa = \frac{1}{4} R = \text{const}.$$

Следуя методу Петрова ([65], стр. 113—117), отобразим пространство Эйнштейна в каждой точке на центроаффинное бивекторное пространство B_N размерности

$$N = C_n^2 = \frac{1}{2} n(n-1) = 6 \qquad (n = 4),$$

поставив в соответствие каждой кососимметричной паре индексов произвольного тензора в пространстве Эйнштейна один собирательный индекс в пространстве B_N. Тогда произвольному битензору (т. е. тензору, индексы которого разбиваются на кососимметричные пары) из пространства Эйнштейна отвечает в пространстве B_6 тензор вдвое меньшей валентности.

Метризуем бивекторное пространство B_6, введя в нем тензор g_{ab} (a, b = 1, 2, 3, 4, 5, 6) как образ тензора четвертого ранга в пространстве Эйнштейна:

$$\begin{gathered} g_{ab} \to g_{\alpha\beta\gamma\delta} \equiv g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta} g_{\beta\gamma}, \\ (\alpha\beta) \to a, \qquad (\gamma\delta) \to b. \end{gathered} \tag{3.8}$$

Предполагая, что V_4 имеет сигнатуру —2 (т. е. +, —, —, —), и фиксируя нумерацию индексов бивекторного пространства

$$10 \to 1,\ 20 \to 2,\ 30 \to 3,\ 23 \to 4,\ 31 \to 5,\ 12 \to 6, \tag{3.9}$$

получаем в выбранном орторепере канонический вид метрики пространства R_6:

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} -\tilde{\varepsilon} & 0 \\ 0 & \tilde{\varepsilon} \end{pmatrix}, \tag{3.10}$$

где $\tilde{\varepsilon}$ — единичная 3×3-матрица. Отсюда следует, в частности, невырожденность матрицы $\| g_{ab} \|$.

Записывая в орторепере уравнения (3.7), приходим к выводу, что в пространствах Эйнштейна матрица $\| R_{ab} \|$ тензора кривизны симметрично-сдвоенная:

$$(R_{ab}) = \begin{pmatrix} \mathscr{E} & \mathscr{H} \\ \mathscr{H} & -\mathscr{E} \end{pmatrix}, \tag{3.11}$$

где блоки $\mathscr{E}$ и $\mathscr{H}$ — симметричные 3×3-матрицы, элементы которых удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{s=1}^{3} e_{ss} = -\varkappa, \qquad \sum_{s=1}^{3} h_{ss} = 0. \tag{3.12}$$

Тогда, разбивая λ-матрицу вида $\|R_{ab} - \lambda g_{ab}\|$ на две трехмерные комплексно сопряженные матрицы, приходим к основной теореме Петрова: существует три и только три типа полей тяготения, определяемые в R_6 соответственно характеристиками λ-матрицы тензора кривизны:

$$\begin{array}{ccc} \text{Тип 1} & \text{Тип 2} & \text{Тип 3} \\ [111, \overline{111}] & [21, \overline{21}] & [3, 3] \end{array} \tag{3.13}$$

Здесь чертой обозначены элементарные делители с комплексно сопряженными базисами. Для типа 3 элементарные делители имеют вещественные базисы (черта отсутствует). Все пространства постоянной кривизны, определяемые характеристикой вида [(111, 111)], принадлежат к типу 1 ([65], стр. 119).

Петров показал ([65], § 19), что матрица $\|R_{ab}\|$ тензора кривизны в каноническом неголономном орторепере приводится к виду (3.11), где для полей типа 1

$$\mathscr{E} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}, \qquad \mathscr{H} = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3 \end{pmatrix}, \tag{3.14}$$

$$\sum \alpha_i = -\varkappa, \qquad \sum \beta_i = 0; \tag{3.15}$$

для полей типа 2

$$\mathscr{E} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 + 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 - 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathscr{H} = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 1 \\ 0 & 1 & \beta_2 \end{pmatrix}, \tag{3.16}$$

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 = -\varkappa, \qquad \beta_1 + 2\beta_2 = 0; \tag{3.17}$$

для полей типа 3

$$\mathscr{E} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}\varkappa & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{3}\varkappa & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}\varkappa \end{pmatrix}, \qquad \mathscr{H} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.18}$$

Здесь α_s и β_s — соответственно вещественные и мнимые части базисов элементарных делителей

$$\sigma_s = \alpha_s + i\beta_s \qquad (s = 1, 2, 3), \tag{3.19}$$

совпадающих с собственными значениями матрицы $\|R_{ab}\|$.

Соответственно трем типам пространств Эйнштейна условимся обозначать их $^*T_i$, где $i = 1, 2, 3$ указывает тип поля тяготения. Пустое пространство—время $R_{\alpha\beta} = 0$, т. е. пространство $^*T_i$ при $\varkappa = 0$, будем обозначать T_i. Классификация Петрова в дальнейшем была сформулирована в рамках других формализмов, применяемых в исследованиях по гравитационным волнам. Так, Дебеве [66] подробно описал типы и подтипы полей по Петрову, исходя из вариантов взаимной ориентации изотропных векторных полей в физическом пространстве—времени, а Пенроуз [67] исследовал спинорные свойства тензора Римана с точки зрения алгебраической классификации по Петрову. Пенроузу же принадлежит следующее наглядное представление систематики Петрова в виде диаграммы [1]):

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathrm{I} \arrow[d, leftrightarrow] \\
 & \mathrm{II} \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[dl] & D \arrow[d, leftrightarrow] \\
\mathrm{III} \arrow[r, leftrightarrow] & N \arrow[r, leftrightarrow] & O \\
{}^*T_3 & {}^*T_2 & {}^*T_1
\end{tikzcd} \tag{3.20}$$

Здесь I, D, O — подтипы $^*T_1$, различаемые следующими свойствами: для I все три собственные значения в блоках матрицы $\|R_{ab}\|$ различны; для D два собственных значения из трех совпадают, например,

$$\alpha_2 = \alpha_3, \qquad \beta_2 = \beta_3; \tag{3.21}$$

для O все три собственных значения совпадают и, вследствие (3.15), являются вещественными:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = -\frac{1}{3}\varkappa, \qquad \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0 \tag{3.22}$$

[1]) Поскольку обозначения Пенроуза, благодаря наглядности диаграммы (3.20), стали широко приняты в работах по классификации Петрова, то мы в дальнейшем о полях типов I, D, O, II, N и III будем говорить просто как о соответствующих типах по Петрову, не подчеркивая отхода от оригинальной терминологии Петрова [65] в обозначениях диаграммы (3.20).

(при $\varkappa = 0$ тип O включает только плоское пространство—время).

Во втором столбце диаграммы (3.20) II и N — подтипы $^*T_2$, причем II — «невырожденный второй тип», для которого собственные значения σ_1 и σ_2 различны, а N — «вырожденный второй тип», для которого σ_1 и σ_2 совпадают и, вследствие (3.17), вещественны[1]):

$$\alpha_1 = \alpha_2 = -\frac{1}{3}\varkappa, \qquad \beta_1 = \beta_2 = 0. \tag{3.23}$$

Единственное и всегда вещественное собственное значение в обоих блоках матрицы $\|R_{ab}\|$ для $^*T_3$ равно $-\frac{1}{3}\varkappa$.

3. Классификация полей тяготения общего вида

Ввиду того, что классификация пространств Эйнштейна $^*T_i$ опирается только на алгебраические свойства тензора кривизны, для классификации полей тяготения общего вида ($R_{\alpha\beta} \neq \varkappa g_{\alpha\beta}$) целесообразно применить тензор конформной кривизны Вейля (см. [58], стр. 115),

$$C_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\alpha\beta\mu\nu} - \frac{1}{2}(g_{\mu\alpha}R_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu}R_{\beta\mu} + g_{\beta\nu}R_{\alpha\mu} - g_{\beta\mu}R_{\alpha\nu}) + \\ + \frac{1}{6}R(g_{\mu\alpha}g_{\beta\nu} - g_{\nu\alpha}g_{\beta\mu}), \tag{3.24}$$

обладающий всеми алгебраическими свойствами тензора Римана:

$$C_{\alpha\beta\mu\nu} = -C_{\beta\alpha\mu\nu} = -C_{\alpha\beta\nu\mu} = C_{\mu\nu\alpha\beta}, \qquad C_{\alpha[\beta\mu\nu]} = 0. \tag{3.25}$$

Легко видеть, что

$$C_{\alpha\mu} \equiv C_{\alpha\beta\mu\nu}g^{\beta\nu} = 0, \tag{3.26}$$

т. е. тензор Вейля произвольного пространства V_4 в алгебраическом отношении ведет себя как тензор Римана в пустом пространстве, причем совпадает с последним в случае (2.2). Определяя в бивекторном пространстве R_6 характеристику λ-матрицы вида $\|C_{ab} - \lambda g_{ab}\|$ тензора Вейля и повторяя рассуждения предыдущего параграфа, мы придем к выводу о существовании трех и только трех

[1]) Отметим, что Бель [68] пользуется несколько иными обозначениями: именно, типы I, D, II, III и N соответственно обозначаются как cas 1, cas $2a$, cas $2b$, cas $3a$ и cas $3b$.

типов V_4 общего вида, отвечающих характеристикам (3.13). Можно показать ([65], § 20), что матрица $\|C_{ab}\|$ в каноническом ортореперe принимает тот же вид (3.11), (3.14) — (3.18), что и $\|R_{ab}\|$, причем теперь всюду надо положить $\varkappa = 0$.

Диаграмма Пенроуза (3.20) также сохранит свой вид и для матрицы $\|C_{ab}\|$. При этом тип O будет представлять, очевидно, конформно плоские пространства V_4, для которых всегда $C_{\alpha\beta\mu\nu} = 0$, а тип N будет описываться матрицами (3.16) при

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0, \qquad \beta_1 = \beta_2 = 0.$$

4. Классификация Петрова и изотропные векторные поля

Дебеве [66] показал, что риманово пространство V_4 сигнатуры — 2 допускает соответственно каноническому виду матрицы $\|C_{ab}\|$ в бивекторном пространстве R_6 по крайней мере одно и не более чем четыре изотропных векторных поля $l^\alpha \neq 0$, удовлетворяющих уравнениям

$$l_{[\lambda}C_{\alpha]\beta\gamma[\delta}l_{\sigma]}l^\beta l^\gamma = 0. \tag{3.27}$$

Формулировка этой теоремы Дебеве в виде уравнений (3.27) принадлежит Саксу [110]. Ввиду важности исследования Дебеве — Сакса для нашего дальнейшего изложения, мы остановимся на их результатах несколько более детально.

Тип I по Петрову характеризуется тем, что все четыре ектора $l^\alpha_{(N)}$ ($N = 1, 2, 3, 4$) различны, для типа D они попарно совпадают (два независимых вектора), для типа II существует три независимых вектора (два из четырех совпадают), для типа III — два независимых вектора (три из четырех совпадают), наконец, тип N характеризуется тем, что все четыре вектора совпадают, т. е. определяют одно и то же направление[1]). Чтобы убедиться в этом, достаточно проверить уравнения (3.27) в каноническом ортореперe, задавшись в нем подходящими значениями ком-

---

[1]) Векторы l^α в этих уравнениях определены только с точностью до коллинеарности (умножения на произвольный скаляр). Поэтому различие в векторах $l^\alpha_{(N)}$ понимается как различие в изотропных направлениях, задаваемых этими векторами.

понент l^α. Так, для типа N следует принять $l^\alpha = \delta_0^\alpha + \delta_1^\alpha$. Векторы $l_{(N)}^\alpha$, удовлетворяющие уравнениям (3.27), будем называть *векторами Дебеве*.

Это приводит к новой инвариантной характеристике алгебраических типов полей тяготения общего вида. А именно, если условиться обозначать число совпадающих (коллинеарных) векторов $l_{(N)}^\alpha$ цифрой в квадратных скобках, то сказанное можно систематизировать следующим образом:

Тип по Петрову	I	D	II	N	III
Символ Дебеве—Сакса	[1111]	[22]	[211]	[4]	[31]

(3.28)

Систему (3.28) можно использовать в алгебраической классификации полей тяготения по Петрову как альтернативу диаграмме (3.20). В этой формулировке классификации Петрова типы полей тяготения различаются по взаимной ориентации векторов Дебеве в самом физическом пространстве — времени.

Тип взаимной ориентации векторов Дебеве определяет специфический вид уравнений (3.27); наиболее общий вид этих уравнений характеризует «наиболее общий» случай ориентации векторов, т. е. тип I. Для других типов уравнения (3.27) переходят в более жесткие уравнения, так что полный их перечень для всех типов системы (3.28) имеет следующий вид:

Тип по Петрову	Уравнения для векторов Дебеве	
N или [4]	$C_{\alpha\beta\gamma\delta} l^\alpha = 0$	(3.29)
III или [31]	$C_{\alpha\beta\gamma[\delta} l^\gamma l_{\lambda]} = 0$	(3.30)
II, D или [211], [22]	$C_{\alpha\beta\gamma[\delta} l_{\lambda]} l^\beta l^\gamma = 0$	(3.31)
I или [1111]	$l_{[\rho} C_{\alpha]\beta\gamma[\delta} l_{\lambda]} l^\beta l^\gamma = 0$	(3.32)

Легко видеть, что вектор $l_{(N)}^\alpha$, удовлетворяющий какому-то из уравнений (3.29) — (3.32), автоматически удовлетворяет и всем последующим уравнениям. Поэтому принадлежность поля тяготения к тому или иному типу определяется двумя обстоятельствами: 1) вектор Дебеве $l_{(N)}^\alpha$ удовлетворяет данному уравнению из ряда (3.29) —

(3.32) и 2) этот вектор не удовлетворяет ни одному из предыдущих уравнений указанного ряда.

До сих пор мы рассматривали поля тяготения общего вида, классификация которых характеризуется алгебраической структурой тензора Вейля $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$. В пустом пространстве—времени тензор Вейля совпадает с тензором Римана $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$; соответственно, в классификации (3.28) — (3.32) вместо $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$ будет фигурировать просто $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$.

В дальнейшем поля типа I, отвечающие максимально общему виду взаимной ориентации векторов Дебеве, будем называть *алгебраически общими*, а поля остальных типов — D, II, N и III — *алгебраически специальными*; смысл этих названий ясен из подхода Дебеве — Сакса.

ГЛАВА 4

КРИТЕРИЙ ПИРАНИ

1. Изотропное электромагнитное поле

Первая попытка дать общековариантное геометрическое определение концепции гравитационных волн в пустом пространстве на основе классификации Петрова была предпринята Пирани [262] в 1957 году (см. также его работы [69—71]). Определение Пирани основано на двух постулатах в соответствии с представлением о волне в терминах разрыва Адамара:

1. Состояние свободных гравитационных волн полностью характеризуется тензором Римана.

2. Фронт гравитационной волны проявляется как разрыв тензора Римана на изотропной трехмерной гиперповерхности.

Первый из этих постулатов означает лишь, что полевой функцией (напряженностью) гравитационного поля в подходе Пирани служит тензор Римана $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$, тогда как метрический тензор $g_{\alpha\beta}$, часто ассоциируемый с потенциалом поля тяготения, не играет такого рода первичной роли в анализе волн тяготения. Второй постулат, согласно которому фронт гравитационной волны лежит на характеристической гиперповерхности уравнений Эйнштейна, с физической точки зрения означает, что гравитационные волны в пустом пространстве распространяются с фундаментальной скоростью.