(3.32) и 2) этот вектор не удовлетворяет ни одному из предыдущих уравнений указанного ряда.

До сих пор мы рассматривали поля тяготения общего вида, классификация которых характеризуется алгебраической структурой тензора Вейля $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$. В пустом пространстве—времени тензор Вейля совпадает с тензором Римана $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$; соответственно, в классификации (3.28) — (3.32) вместо $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$ будет фигурировать просто $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$.

В дальнейшем поля типа I, отвечающие максимально общему виду взаимной ориентации векторов Дебеве, будем называть *алгебраически общими*, а поля остальных типов — D, II, N и III — *алгебраически специальными*; смысл этих названий ясен из подхода Дебеве — Сакса.

ГЛАВА 4

КРИТЕРИЙ ПИРАНИ

1. Изотропное электромагнитное поле

Первая попытка дать общековариантное геометрическое определение концепции гравитационных волн в пустом пространстве на основе классификации Петрова была предпринята Пирани [262] в 1957 году (см. также его работы [69—71]). Определение Пирани основано на двух постулатах в соответствии с представлением о волне в терминах разрыва Адамара:

1. Состояние свободных гравитационных волн полностью характеризуется тензором Римана.

2. Фронт гравитационной волны проявляется как разрыв тензора Римана на изотропной трехмерной гиперповерхности.

Первый из этих постулатов означает лишь, что полевой функцией (напряженностью) гравитационного поля в подходе Пирани служит тензор Римана $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$, тогда как метрический тензор $g_{\alpha\beta}$, часто ассоциируемый с потенциалом поля тяготения, не играет такого рода первичной роли в анализе волн тяготения. Второй постулат, согласно которому фронт гравитационной волны лежит на характеристической гиперповерхности уравнений Эйнштейна, с физической точки зрения означает, что гравитационные волны в пустом пространстве распространяются с фундаментальной скоростью.

Определение Пирани предполагает аналогию между электромагнитными и гравитационными волнами. В качестве третьего (не формулируемого явно) постулата принимается, что волновые поля в гравитации, как и в электродинамике, могут быть только изотропными полями. В этой связи Пирани дает обобщение понятия изотропного электромагнитного поля на случай полей тяготения.

Как известно, тензор (2.30) энергии — импульса электромагнитного поля $\tau_{\mu\nu}$ имеет четыре попарно равных собственных значения: k, k, $-k$, $-k$, причем

$$4k^2 = \Phi^2 + \Psi^2, \tag{4.1}$$

где

$$\Phi = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \qquad \Psi = \overset{*}{F}_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \tag{4.2}$$

а $^*F_{\mu\nu}$ — тензор, дуальный тензору Максвелла:

$$^*F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma}. \tag{4.3}$$

Электромагнитное поле называется *изотропным* (null field), если собственные значения тензора $\tau_{\mu\nu}$ равны нулю: $k = 0$, т. е. $\Phi = \Psi = 0$. С физической точки зрения изотропное электромагнитное поле отвечает волновому процессу распространения электромагнитной энергии с фундаментальной скоростью, поскольку в этом случае наблюдатель не может следовать за полем. По определению, наблюдатель следует за электромагнитным полем, если для него поток вектора Пойнтинга

$$P_\alpha = (\delta_\alpha^\beta - v_\alpha v^\beta)\,\tau_{\beta\sigma}v^\sigma \tag{4.4}$$

через все возможные двумерные поверхности равен нулю (здесь v^σ — временноподобный вектор 4-скорости наблюдателя). Но для того чтобы поток P^α всегда равнялся нулю, необходимо, чтобы сам вектор P^α был равен нулю. Согласно (4.4), это означает, что

$$\tau_{\alpha\sigma}v^\sigma = (\tau_{\rho\sigma}v^\rho v^\sigma)\,v_\alpha. \tag{4.5}$$

Из условия (4.5) вытекает, что если наблюдатель следует за полем, то его 4-вектор скорости является собственным вектором матрицы $\|\tau_{\mu\nu}\|$. Однако, как известно [62], собственные векторы тензора $\tau_{\mu\nu}$ изотропного электромагнитного поля могут быть либо изотропными (притом совпадающими), либо пространственноподобными, но не могут быть временноподобными. Следовательно, обратить в нуль P^α в случае изотропного поля невозможно, и для того чтобы наблюдатель следовал за полем, его 4-вектор скорости должен выродиться в изотропный, т. е. наблюдатель должен двигаться со скоростью света.

Таким образом, можно дать следующее определение изотропного электромагнитного поля: электромагнитное поле называется изотропным, если матрица $\|\tau_{\mu\nu}\|$ не имеет временноподобных собственных векторов.

2. Главные векторы Римана. Следование за гравитационным полем

Определение Пирани основано на распространении понятия изотропного поля (в его последней формулировке для электромагнитного поля) на случай гравитационных полей. Однако непосредственным образом осуществить такое обобщение затруднительно, так как в эйнштейновской теории тяготения отсутствует истинный тензор энергии — импульса гравитационного поля. Чтобы преодолеть эту трудность, Пирани определяет понятие следования за гравитационным полем принципиально иным способом, чем в электромагнетизме, вводя так называемые главные векторы Римана.

Главными векторами тензора Римана $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ называются направления пересечений пар двумерных поверхностей, определяемых собственными векторами тензора R_{ab} $(a,\ b = 1,\ 2,\ldots,\ 6)$ в бивекторном пространстве R_6 (следовательно, бивекторами в физическом пространстве V_4). Число главных векторов Римана и их ориентацию можно установить, зная собственные направления тензора R_{ab} в R_6. Так, типу I диаграммы Пенроуза (3.20) отвечает один главный вектор, причем временноподобный, типу D — два изотропных и один временноподобный главный вектор; для типов II, III, N существует единственный, причем изотропный, главный вектор.

Введем теперь, следуя Пирани, определение: наблюдатель следует за гравитационным полем, если его 4-вектор скорости совпадает с временноподобным главным вектором Римана.

Очевидно, наблюдатель может следовать только за гравитационным полем, главный вектор которого временноподобен, т. е. за полем типа I или типа D. Что же касается полей типов II, III и N, то наблюдатель, следуя за таким гравитационным полем, должен был бы иметь изотропный 4-вектор скорости, т. е. двигаться со скоростью света.

Мы можем теперь принять следующее определение изотропного поля тяготения: гравитационное поле является изотропным, если тензор кривизны $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ не имеет временноподобных главных векторов Римана.

Из сказанного вытекает, что изотропными гравитационными полями являются поля типов II, III и N, и только они. Мы приходим, таким образом, к формулировке критерия существования гравитационных волн по Пирани.

Критерий Пирани. *В данной области пустого пространства — времени V_4 существуют свободные гравитационные волны, если в этой области тензор Римана принадлежит к одному из типов* II, N *и* III *диаграммы* (3.20); *в других случаях гравитационные волны отсутствуют.*

3. Пример. Волновые поля тяготения Уаймэна — Троллопа

Итак, определение состояния свободного волнового гравитационного поля, основанное на критерии Пирани (как и на других критериях, обсуждаемых ниже), тесно связано с выяснением принадлежности данного поля тяготения к тому или иному типу по классификации Петрова. Поэтому представляется целесообразным рассмотреть известные в настоящее время решения уравнений Эйнштейна в пустом пространстве, принадлежащие к типам II, N и III.

Значительную часть решений такого рода (решения Пересa, Такено, Петрова, Робинсона и Траутмана, Кундта и др.) мы будем обсуждать в последующих главах при анализе других предложенных критериев гравитационных волн (в пустоте или в среде, заполненной электромагнитным излучением). Для иллюстрации критерия Пирани мы рассмотрим полученный недавно Уаймэном и Троллопом [72, 73] класс решений уравнений Эйнштейна, не совпадающий с упомянутыми решениями либо существенно обобщающий их.

Классу решений Уаймэна — Троллопа отвечает метрика

$$g_{\alpha\beta} = \begin{Vmatrix} 2\alpha & 1 & \beta & \gamma \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & e^{-\tau} & 0 \\ \gamma & 0 & 0 & e^{-\tau} \end{Vmatrix}, \tag{4.6}$$

где

$$\beta = \xi x^2 + \xi_0, \quad \gamma = \eta x^2 + \eta_0,$$

а ξ, η, ξ_0, η_0, α и τ — функции координат x^0, x^1, x^3, причем β — функция, гармоническая по x^1 и x^3,

$$\beta_{,11} + \beta_{,33} = 0,$$

а γ — функция, гармонически сопряженная с β. Метрика (4.6) получена с использованием разложения $g_{\alpha\beta}$ в орторепере по четырем вещественным векторам (см., например, [74]), один из которых — изотропный вектор l^α — предполагается гармоническим.

Для ряда частных случаев Уаймэну и Троллопу удалось проинтегрировать уравнения поля в пустом пространстве (2.2) относительно метрики (4.6). Они выделили три специальных случая:

A. $\xi^2 + \eta^2 = 0$,
B. $\xi^2 + \eta^2 \neq 0$, $\alpha_{,22} = 0$,
C. $\xi^2 + \eta^2 \neq 0$, $\tau_{,11} + \tau_{,33} = 0$.

Можно показать[1]), что случаи A и C отвечают полю типа III, а случай B — полю типа II диаграммы Пенроуза. Если же функции ξ и η таковы, что β и γ не зависят от x^2, то данная метрика (в вакууме) относится к типу N (вырожденному типу 2 по классификации Петрова). В последнем случае l^α совпадает с вектором Киллинга, определяющим группу сдвигов этого пространства — времени вдоль координатных линий x^2. Геометрически траектории этого вектора интерпретируются как бихарактеристики уравнений Эйнштейна.

ГЛАВА 5

КРИТЕРИИ БЕЛЯ

1. Тензор суперэнергии

Критерий существования гравитационных волн, предложенный Белем [56, 68, 76—80] (см. также Дебеве [81]), как и критерий Пирани, опирается на представления об

[1]) Соответствующие расчеты были проделаны Л. Б. Григорьевой. Она же показала, что рассматриваемая в работе Троллопа [73] метрика, отвечающая случаю негармонического вектора распространения l^α, совпадает с известной метрикой Робинсона — Траутмана (см. гл. 9).