где

$$\beta = \xi x^2 + \xi_0, \quad \gamma = \eta x^2 + \eta_0,$$

а ξ, η, ξ_0, η_0, α и τ — функции координат x^0, x^1, x^3, причем β — функция, гармоническая по x^1 и x^3,

$$\beta_{,11} + \beta_{,33} = 0,$$

а γ — функция, гармонически сопряженная с β. Метрика (4.6) получена с использованием разложения $g_{\alpha\beta}$ в орто-репере по четырем вещественным векторам (см., например, [74]), один из которых — изотропный вектор l^α — предполагается гармоническим.

Для ряда частных случаев Уаймэну и Троллопу удалось проинтегрировать уравнения поля в пустом пространстве (2.2) относительно метрики (4.6). Они выделили три специальных случая:

A. $\xi^2 + \eta^2 = 0$,
B. $\xi^2 + \eta^2 \neq 0$, $\alpha_{,22} = 0$,
C. $\xi^2 + \eta^2 \neq 0$, $\tau_{,11} + \tau_{,33} = 0$.

Можно показать[1]), что случаи A и C отвечают полю типа III, а случай B — полю типа II диаграммы Пенроуза. Если же функции ξ и η таковы, что β и γ не зависят от x^2, то данная метрика (в вакууме) относится к типу N (вырожденному типу 2 по классификации Петрова). В последнем случае l^α совпадает с вектором Киллинга, определяющим группу сдвигов этого пространства — времени вдоль координатных линий x^2. Геометрически траектории этого вектора интерпретируются как бихарактеристики уравнений Эйнштейна.

ГЛАВА 5

КРИТЕРИИ БЕЛЯ

1. Тензор суперэнергии

Критерий существования гравитационных волн, предложенный Белем [56, 68, 76—80] (см. также Дебеве [81]), как и критерий Пирани, опирается на представления об

[1]) Соответствующие расчеты были проделаны Л. Б. Григорьевой. Она же показала, что рассматриваемая в работе Троллопа [73] метрика, отвечающая случаю негармонического вектора распространения l^α, совпадает с известной метрикой Робинсона — Траутмана (см. гл. 9).

аналогии с теорией электромагнитных волн. Но, в отличие от критерия Пирани, первый критерий Беля, которому мы посвятим этот параграф, основан на определении «тензора энергии» (точнее, «суперэнергии») гравитационного поля. В аналогии с тензором энергии — импульса электромагнитного поля (2.30) такой «тензор суперэнергии» должен, очевидно, выражаться конструкцией, квадратичной относительно тензора Римана $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$.

Итак, пусть данное V_4 есть пустое пространство — время, так что уравнения Эйнштейна имеют вид (2.2), и пусть тензор $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ имеет в качестве кососимметричных пар индексов $\alpha\beta$ и $\gamma\delta$. Введем два новых тензора, дуальных тензору $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$:

$$ {}^*R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta\rho\sigma} R^{\rho\sigma\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\gamma\delta}, \qquad R^*_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2}\eta_{\gamma\delta\rho\sigma} R^{\rho\sigma\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\alpha\beta}. \tag{5.1} $$

Можно показать, что в пространствах Эйнштейна (3.7)

$$ {}^*R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R^*_{\alpha\beta\gamma\delta} \overset{\text{def}}{=} \overset{*}{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} \tag{5.2} $$

(см. Приложение I, теорема 1).

Определим *тензор суперэнергии Беля* [76] как тензор четвертого ранга

$$ T^{\alpha\beta\lambda\mu} = \frac{1}{2}\left(R^{\alpha\rho\lambda\sigma} R^{\beta\cdot\mu\cdot}_{\cdot\rho\cdot\sigma} + \overset{*}{R}{}^{\alpha\rho\lambda\sigma} \overset{*}{R}{}^{\beta\cdot\mu\cdot}_{\cdot\rho\cdot\sigma}\right). \tag{5.3} $$

Легко видеть, что тензор суперэнергии (5.3) в пустом пространстве по своим свойствам допускает весьма близкую аналогию с тензором $\tau_{\mu\nu}$ электромагнитного поля. Во-первых, он полностью симметричен в силу того, что тензор $\overset{*}{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ в пустом V_4 симметричен по парам индексов $\alpha\beta$ и $\gamma\delta$. Во-вторых, как и в случае тензора $\tau_{\mu\nu}$, результат свертывания его с метрическим тензором дает нуль: $g_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta\mu\nu} = 0$. В-третьих, он удовлетворяет ковариантному уравнению непрерывности, которое аналогично уравнению непрерывности для тензора $\tau_{\mu\nu}$ в пространстве — времени без источников [80]:

$$ T^{\alpha}_{\cdot\beta\mu\nu;\alpha} = 0. \tag{5.4} $$

В-четвертых, аналогия между тензорами $T^{\alpha\beta\mu\nu}$ и $\tau_{\mu\nu}$ обнаруживается также при сравнении собственных значений $\tau^{\mu\nu}$ и инвариантов $T^{\alpha\beta\mu\nu}$. Тензор $\tau_{\mu\nu}$ удовлетворяет соотношению [81]

$$\tau_\alpha^\beta \tau_{\beta\gamma} = \frac{1}{4} k^2 g_{\alpha\gamma}, \qquad (5.5)$$

где k — собственное значение тензора $\tau_{\alpha\beta}$, имеющее вид (4.1). Можно показать [81], что тензор суперэнергии удовлетворяет аналогичному соотношению:

$$T_{\alpha\beta\lambda\mu} T_{\gamma\cdots}^{\cdot\beta\lambda\mu} = \frac{1}{4} K^2 g_{\alpha\gamma}, \qquad (5.6)$$

где

$$K^2 = (R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\beta\gamma\delta})^2 + (R_{\alpha\beta\gamma\delta} \overset{*}{R}{}^{\alpha\beta\gamma\delta})^2. \qquad (5.7)$$

Тесную алгебраическую аналогию тензора Беля с тензором энергии — импульса электромагнитного поля можно использовать для определения «плотности энергии и импульса» гравитационного поля. Пусть в каждой точке M пространства — времени задан единичный временноподобный 4-вектор u^α. Поставим ему в соответствие скаляр

$$W = T^{\alpha\beta\lambda\mu} u_\alpha u_\beta u_\lambda u_\mu. \qquad (5.8)$$

Нетрудно убедиться [80], что этот скаляр можно представить в виде

$$W(u^\alpha) = \frac{1}{2} (\mathscr{E}_{\alpha\beta} \mathscr{E}^{\alpha\beta} + \mathscr{H}_{\alpha\beta} \mathscr{H}^{\alpha\beta}), \qquad (5.9)$$

где симметричные тензоры $\mathscr{E}_{\alpha\beta}$ и $\mathscr{H}_{\alpha\beta}$, введенные Матте [82], определяются как

$$\mathscr{E}_{\alpha\lambda} = R_{\alpha\beta\lambda\mu} u^\beta u^\mu, \qquad (5.10)$$

$$\mathscr{H}_{\alpha\lambda} = -\overset{*}{R}_{\alpha\beta\lambda\mu} u^\beta u^\mu. \qquad (5.11)$$

Очевидно, эти тензоры ориентированы в пространстве в том смысле, что временноподобный вектор u^α является их собственным вектором (отвечающим нулевому собственному значению). Отсюда нетрудно установить, что квадрат каждого из этих тензоров не может быть отрицательным:

$$\mathscr{E}_{\alpha\beta} \mathscr{E}^{\alpha\beta} \geqslant 0, \qquad \mathscr{H}_{\alpha\beta} \mathscr{H}^{\alpha\beta} \geqslant 0, \qquad (5.12)$$

причем знак равенства возможен лишь в том случае, когда соответствующий тензор равен нулю.

Можно, кроме того, доказать теорему [80]: если для некоторого вектора u^α величины $\mathscr{E}_{\alpha\beta}$ и $\mathscr{H}_{\alpha\beta}$ одновременно равны нулю, то отсюда необходимым и достаточным образом следует, что $R_{\alpha\beta\gamma\delta}\equiv 0$, т. е. пространство — время плоское [1]). Действительно, пусть имеют место равенства:

$$R_{\alpha\beta\lambda\mu}u^\beta u^\mu = 0, \qquad \overset{*}{R}_{\alpha\beta\lambda\mu}u^\beta u^\mu = 0.$$

Согласно лемме, доказываемой нами в Приложении I, второе из этих равенств эквивалентно соотношениям

$$(u_\nu R_{\alpha\beta\lambda\mu} + u_\lambda R_{\alpha\beta\mu\nu} + u_\mu R_{\alpha\beta\nu\lambda})\, u^\beta = 0.$$

Умножая их на u^ν и используя условие $u^2 = 1$, получим:

$$R_{\alpha\beta\lambda\mu}u^\beta = 0. \tag{5.13}$$

Отсюда вытекает (для пространств Эйнштейна) равенство

$$R^{*}_{\alpha\beta\lambda\mu}u^\beta = \overset{*}{R}_{\alpha\beta\lambda\mu}u^\beta = 0,$$

что, в свою очередь, эквивалентно соотношению

$$u_\gamma R_{\alpha\beta\lambda\mu} + u_\alpha R_{\beta\gamma\lambda\mu} + u_\beta R_{\gamma\alpha\lambda\mu} = 0. \tag{5.14}$$

Умножая (5.14) на u^γ и используя (5.13), получаем $R_{\alpha\beta\lambda\mu}\equiv$ $\equiv 0$, что и доказывает теорему.

2. Энергия и импульс гравитационного поля

Синг [83], обсуждая представления о гравитационных волнах с точки зрения переноса ими энергии, сформулировал два необходимых условия, которым должна удовлетворять функция $F(u^\alpha)$, выражающая плотность энергии гравитационного поля: 1) $F(u^\alpha)\geqslant 0$, 2) если $F(u^\alpha) = 0$, то $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$, т. е. энергия поля равна нулю лишь в отсутствие самого поля. Легко видеть, что скаляр $W(u^\alpha)$ удовлетворяет обоим этим условиям: первое условие удовлетворяется в силу соотношений (5.9) и (5.12), а второе — в силу доказанной только что теоремы.

[1]) Заметим, что Матте в работе [82] записал уравнения гравитационного поля в пустом пространстве на языке величин (5.10) и (5.11) так, что в первом приближении они аналогичны уравнениям Максвелла, в которых роль напряженностей электрического и магнитного полей играют величины $\mathscr{E}$ и $\mathscr{H}$. С точки зрения Матте, этой аналогии достаточно, чтобы убедиться в реальности существования гравитационных волн.

Таким образом, скаляр $W(u^\alpha)$ можно принять за определение «плотности энергии» гравитационного поля [1]). Поскольку вектор u^α временноподобен, можно выбрать локальную систему координат, в которой $u^\alpha = \delta_0^\alpha$. В этой системе, очевидно, $W = T^{0000}$, подобно тому как понятие о негравитационной энергии связывается с компонентой T^{00} тензора энергии — импульса «материи» в уравнениях Эйнштейна.

Рассмотрим теперь вектор [76, 84]

$$P^\alpha = \left(\delta_\rho^\alpha - u_\rho u^\alpha\right) T^{\rho\beta\lambda\mu} u_\beta u_\lambda u_\mu, \tag{5.15}$$

который мы по аналогии с электромагнитным вектором Пойнтинга (4.4) можем назвать *вектором Пойнтинга (или плотностью потока суперэнергии) гравитационного поля.*

В той же системе координат, очевидно,

$$P^0 = 0, \quad P^i = T^{i000}.$$

Как показал Бель [76], в линейном приближении в каждой точке имеет место соотношение

$$W_{,0} = -P^i_{,i}, \tag{5.16}$$

откуда по теореме Гаусса

$$\partial_0 \int\limits_V W\, dV = -\int\limits_\Sigma P^i n_i\, d\Sigma, \tag{5.17}$$

где Σ — двумерная поверхность, ограничивающая данный трехмерный объем V, а n^i — единичный трехмерный вектор внешней нормали к Σ. Формула (5.17) означает [2]), что поток гравитационной суперэнергии через элемент $d\Sigma$ двумерной поверхности пропорционален $P^i n_i$. Следовательно, для того чтобы поток суперэнергии через любую поверхность Σ, окружающую данную точку, был равен нулю, необходимо и достаточно, чтобы $P^i(u^\alpha) = 0$. Мы приходим, таким образом, к формулировке критерия существования гравитационных волн по Белю.

---

[1]) Разумеется, с учетом плотностных свойств, необходимых для корректного применения такого рода понятий (скажем, «плотностью энергии по Белю» в физическом смысле будет величина $\sqrt{-g}\, W$).

[2]) Строго говоря, разбиение (5.16) нековариантно, поэтому все дальнейшие утверждения следует дополнять словами «в данной системе координат».

Первый критерий Беля. *Свободные гравитационные волны необходимым и достаточным образом связаны с наличием потока суперэнергии. Следовательно, в окрестности произвольной точки пустого пространства — времени* V_4 *существуют гравитационные волны, если для любого временноподобного единичного вектора* u^α *в этой точке* $P^\alpha(u^\alpha) \neq 0$. *Если же* $P^\alpha(u^\alpha) = 0$, *то гравитационные волны в окрестности данной точки отсутствуют.*

3. Эквивалентность критериев Пирани и Беля

Докажем теперь строгую эквивалентность первого критерия Беля и критерия Пирани (это доказательство найдено Белем [80]). Вследствие их ковариантного характера достаточно сделать это в использованной выше локальной системе координат, где $u^\alpha = \delta_0^\alpha$. В этой системе, очевидно,

$$P^i = R^{i\cdot 0\cdot}_{\cdot j\cdot k}\, R^{0j0k} = -\sum_{j,k} R_{ij0k} R_{0j0k}, \qquad P^0 = 0,$$

или, в другом выражении,

$$P^i = \frac{1}{2} C_{jm} \varepsilon^{jmi},$$

где трехмерный символ Леви-Чивиты ε^{jmi} равен $+1$, если подстановка 1, 2, 3 четная, -1, если нечетная, и 0 в остальных случаях, а антисимметричный трехмерный тензор C_{jm} имеет вид

$$C_{jm} = \sum_k (\mathscr{E}_{jk}\mathscr{H}_{km} - \mathscr{E}_{mk}\mathscr{H}_{kj}).$$

Как показал Бель, в бивекторном пространстве с базисными бивекторами, построенными на векторах натурального репера избранной нами системы координат (нумерация индексов в бивекторном пространстве отвечает выбору (3.9)),

$$\hat{\mathscr{E}}_{(1)} = e_{(1)} \wedge e_{(0)}, \qquad \hat{\mathscr{E}}_{(2)} = e_{(2)} \wedge e_{(0)}, \qquad \hat{\mathscr{E}}_{(3)} = e_{(3)} \wedge e_{(0)},$$
$$\hat{\mathscr{E}}_{(4)} = e_{(2)} \wedge e_{(3)}, \qquad \hat{\mathscr{E}}_{(5)} = e_{(3)} \wedge e_{(1)}, \qquad \hat{\mathscr{E}}_{(6)} = e_{(1)} \wedge e_{(2)},$$

матрица тензора кривизны допускает выражение:

$$R_{ab} = \begin{pmatrix} -\mathscr{E} & \mathscr{H} \\ \mathscr{H} & \mathscr{E} \end{pmatrix},$$

где $\mathscr{E}$ и $\mathscr{H}$ — матрицы $\|\mathscr{E}_{ik}\|$ и $\|\mathscr{H}_{ik}\|$ пространственных компонент тензоров (5.10) и (5.11). Очевидно, если $P^{\mu}(u^{\alpha}) \equiv 0$, то $P^{i} = 0$ и, следовательно, $C_{jm} = 0$, т. е. матрицы $\|\mathscr{E}_{ik}\|$ и $\|\mathscr{H}_{ik}\|$ коммутируют. Но для того чтобы две трехмерные матрицы коммутировали, необходимо и достаточно, чтобы в некотором базисе они одновременно приводились к диагональному виду. Таким образом, из условия $P^{\alpha} = 0$ и из формул (3.14) с необходимостью вытекает, что соответствующее поле $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ — типа 1 по классификации Петрова. Обратно, если $P^{\mu}(u^{\alpha}) \neq 0$, т. е. соответствующее поле тяготения описывает гравитационные волны с точки зрения первого критерия Беля, то оно принадлежит к типу 2 или 3, т. е. удовлетворяет и критерию Пирани. Тем самым наше утверждение доказано.

4. Инварианты тензора кривизны в пустом пространстве

Второй критерий Беля, сформулированный им в работе [68], как и критерий Пирани, основан на распространении понятия изотропного поля, известного из электромагнетизма, на случай полей тяготения. Но, в отличие от Пирани, Бель строит определение изотропного поля тяготения, обобщая не понятие следования за полем, а саму концепцию изотропного поля как поля, инварианты которого равны нулю.

В то время как число функционально независимых скаляров, которые можно образовать из тензора Максвелла, равно двум, из тензора Римана можно образовать 14 функционально независимых скаляров, из которых в пустом пространстве отличны от нуля лишь четыре [85, 86]:

$$A = \frac{1}{8} R^{\alpha\beta\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\lambda\mu} R^{\lambda\mu\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\alpha\beta}, \qquad B = \frac{1}{8} R^{\alpha\beta\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\lambda\mu} \overset{*}{R}{}^{\lambda\mu\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\alpha\beta},$$
$$C = \frac{1}{16} R^{\alpha\beta\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\lambda\mu} R^{\lambda\mu\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\rho\sigma} R^{\rho\sigma\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\alpha\beta}, \qquad D = \frac{1}{16} R^{\alpha\beta\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\lambda\mu} R^{\lambda\mu\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\rho\sigma} \overset{*}{R}{}^{\rho\sigma\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\alpha\beta}, \tag{5.18}$$

которые Бель называет *фундаментальными скалярами*. Тогда, определяя изотропное гравитационное поле условием

$$A = B = C = D = 0, \tag{5.19}$$

получим новый критерий существования гравитационных волн.

Второй критерий Беля. *Поля свободных гравитационных волн отождествляются с изотропными гравитационными полями, определяемыми условием* (5.19), *при* $R_{\alpha\beta\gamma\delta} \neq 0$. *Пустое пространство — время с тензором Римана* $R_{\alpha\beta\gamma\delta} \neq 0$ *описывает свободные гравитационные волны, если все четыре фундаментальных скаляра* (5.18) *обращаются в нуль. В противном случае свободные гравитационные волны отсутствуют.*

Определим теперь, какие типы полей тяготения по классификации Петрова удовлетворяют второму критерию Беля. Записывая условия (5.19) в бивекторном пространстве и используя канонический вид матрицы тензора кривизны (3.11), (3.14) — (3.18), убеждаемся, что из шести типов диаграммы Пенроуза условиям (5.19) удовлетворяют три: O, N и III. Отбрасывая тип O как тривиальный ($R_{\alpha\beta\gamma\delta} \equiv 0$), убеждаемся, что *второму критерию Беля удовлетворяют все поля тяготения типов N* и III *диаграммы Пенроуза, и только они.*

5. Векторы Дебеве и второй критерий Беля

Типы O, N и III диаграммы Пенроуза в пустом пространстве (характеризуемые равенством нулю собственных значений тензора R_{ab}) называются вырожденными типами полей тяготения. В классификации Беля [68] они составляют один тип cas 3.

Как показал Дебеве [81], для того чтобы пустое V_4 принадлежало к типу 3 по Белю, необходимо и достаточно, чтобы оно допускало существование вектора l^α, удовлетворяющего уравнениям

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} l^\alpha l^\gamma = 0, \qquad (5.20)$$
$$\overset{*}{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} l^\alpha l^\gamma = 0.$$

При этом векторное поле l^α (вектор Дебеве) является единственным и изотропным. Таким образом, второй критерий Беля допускает следующую эквивалентную формулировку [75]:

Второй критерий Беля (новая формулировка). *Пустое пространство — время с тензором Римана* $R_{\alpha\beta\gamma\delta} \neq 0$ *описывает свободные гравитационные волны в том и только в том случае, если оно допускает существование изотропного векторного поля* l^α, *удовлетворяющего уравнениям* (5.20).