ГЛАВА 6

КРИТЕРИЙ ЛИХНЕРОВИЧА

1. Билинейная вырожденная форма тензора Максвелла

Критерий существования гравитационных волн, предложенный Лихнеровичем [87—90] (развернутое изложение см. в работе [62]), также опирается на аналогию с методом определения состояния электромагнитного излучения. Это последнее строится на базе решения задачи Коши для уравнений Эйнштейна — Максвелла в пространстве — времени V_4. Изложим вкратце основные моменты подхода Лихнеровича к этой задаче.

Пусть поле электромагнитного тензора $F_{\alpha\beta}$ — класса C^0 (C^2 на кусках). По формуле Адамара (2.13) разрывы первых производных $F_{\alpha\beta}$ на характеристической гиперповерхности $\varphi(x^\alpha)$ имеют вид

$$[F_{\alpha\beta,\gamma}] = f_{\alpha\beta} l_\gamma \qquad (l_\gamma \equiv \varphi_{,\gamma}), \tag{6.1}$$

где $f_{\alpha\beta}$ — коэффициенты разрывности для тензора $F_{\alpha\beta}$. Тогда из первой группы уравнений Максвелла следует, что коэффициенты разрывности удовлетворяют уравнениям

$$l_\alpha f_{\beta\gamma} + l_\beta f_{\gamma\alpha} + l_\gamma f_{\alpha\beta} = 0, \tag{6.2}$$

а из второй группы уравнений Максвелла следует, что

$$l^\alpha f_{\alpha\beta} = 0. \tag{6.3}$$

В качестве основного предположения примем, что разрывы тензора электромагнитного поля на фронте волны пропорциональны самому полю, т. е. что $f_{\alpha\beta} \sim F_{\alpha\beta}$. Тогда, очевидно, тензор $F_{\alpha\beta}$ удовлетворяет уравнениям типа (6.2) и (6.3):

$$l_{[\alpha} F_{\beta\gamma]} = 0, \qquad l^\alpha F_{\alpha\beta} = 0, \tag{6.4}$$

откуда с необходимостью вытекает изотропность вектора l^α: $l_\alpha l^\alpha = 0$. Второе характерное свойство вектора l^α, удовлетворяющего уравнениям (6.4), состоит в том, что линии векторного поля l^α образуют конгруэнцию изотропных геодезических [260, 261].

Следуя Лихнеровичу, билинейную антисимметричную форму, удовлетворяющую уравнениям (6.4), будем называть *особой* (или *вырожденной*) *формой* второго порядка [1]). Тогда можно сформулировать теорему (Лихнерович [62], § 7): коэффициенты $F_{\alpha\beta}$ билинейной особой формы в V_4 сигнатуры —2 имеют вид

$$F_{\alpha\beta} = l_\alpha b_\beta - l_\beta b_\alpha, \tag{6.5}$$

где b_α — некоторый вектор, ортогональный к l_α ($b_\alpha l^\alpha = 0$). Отсюда как очевидное следствие вытекает, что если компоненты тензора Максвелла $F_{\alpha\beta}$ являются коэффициентами билинейной особой формы, то они определяют изотропное электромагнитное поле. Обратно, изотропное электромагнитное поле $F_{\mu\nu}$ образует коэффициенты билинейной особой формы.

Мы уже установили ранее (гл. 4), что поле электромагнитного излучения можно определить как изотропное поле, отвечающее обращению в нуль инвариантов тензора Максвелла. Теперь мы видим, что изотропное электромагнитное поле, в свою очередь, можно определить как поле тензора Максвелла, компоненты $F_{\mu\nu}$ которого образуют коэффициенты билинейной особой формы. Тем самым устанавливается (эквивалентное данному в гл. 4) определение: *тензор Максвелла* $F_{\mu\nu} \neq 0$ *описывает электромагнитное излучение, если существует* (*необходимо изотропное*) *векторное поле* l^α, *удовлетворяющее уравнениям* (6.4).

2. Двойная вырожденная форма тензора Римана

Пусть все функции в метрике $g_{\alpha\beta}(x^\sigma)$ — класса C^1 (C^3 на кусках). По формуле Адамара (2.14) разрывы вторых производных $g_{\alpha\beta}$ на характеристической гиперповерхности (2.15) имеют вид

$$[g_{\alpha\beta,\rho\sigma}] = a_{\alpha\beta} l_\rho l_\sigma. \tag{6.6}$$

Подставляя (6.6) в выражение для тензора Римана

$$R_{\alpha\beta\lambda\mu} = \frac{1}{2}(g_{\alpha\lambda,\beta\mu} + g_{\beta\mu,\alpha\lambda} - g_{\alpha\mu,\beta\lambda} - g_{\beta\lambda,\alpha\mu}) + K_{\alpha\beta\lambda\mu},$$

где $K_{\alpha\beta\lambda\mu}$ не содержит вторых производных метрики и, следовательно, не имеет разрыва на S, легко получить

---

[1]) 2-forme singuliere по оригинальной терминологии Лихнеровича [62].

выражение для разрывов $R_{\alpha\beta\lambda\mu}$:

$$[R_{\alpha\beta\lambda\mu}] = \frac{1}{2}\,(a_{\alpha\lambda}l_\beta l_\mu + a_{\beta\mu}l_\alpha l_\lambda - a_{\alpha\mu}l_\beta l_\lambda - a_{\beta\lambda}l_\alpha l_\mu). \qquad (6.7)$$

Отсюда с очевидностью следует, что

$$l_\alpha[R_{\beta\gamma\lambda\mu}] + l_\beta\,[R_{\gamma\alpha\lambda\mu}] + l_\gamma\,[R_{\alpha\beta\lambda\mu}] = 0. \qquad (6.8)$$

Если предположить далее, что разрыв тензора энергии — импульса $T_{\alpha\beta}$, фигурирующего справа в уравнениях Эйнштейна, на S равен нулю, а следовательно, в силу (1.1) $[R_{\alpha\beta}] = 0$, то, согласно Лихнеровичу ([62], § 20),

$$l^\alpha\,[R_{\alpha\beta\lambda\mu}] = 0. \qquad (6.9)$$

Сделаем основное предположение: пусть разрывы гравитационного поля, описываемого тензором $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$, на фронте волны S пропорциональны компонентам поля:

$$[R_{\alpha\beta\gamma\delta}] \sim R_{\alpha\beta\gamma\delta}.$$

Тогда тензор кривизны должен удовлетворять уравнениям вида

$$l_\lambda R_{\alpha\beta\gamma\delta} + l_\alpha R_{\beta\lambda\gamma\delta} + l_\beta R_{\lambda\alpha\gamma\delta} = 0, \qquad (6.10)$$

$$l^\alpha R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0, \qquad (6.11)$$

из которых следует, что вектор l^α при $R_{\alpha\beta\gamma\delta} \neq 0$ изотропен. Действительно, свертывая уравнения (6.10) с l^α и принимая во внимание (6.11), получаем:

$$(l^\alpha l_\alpha)\,R_{\rho\beta\lambda\sigma} = 0,$$

что и доказывает наше утверждение.

Введем следующее определение [88]: будем говорить, что всякий тензор

$$H_{\alpha\beta\lambda\mu}\,(= -H_{\beta\alpha\lambda\mu} = -H_{\alpha\beta\mu\lambda} = H_{\lambda\mu\alpha\beta})$$

определяет *двойную вырожденную форму* [1]), если существует вектор l^α такой, что $H_{\alpha\beta\lambda\mu} \neq 0$ удовлетворяет уравнениям

$$l_{[\lambda}H_{\alpha\beta]\gamma\delta} = 0, \qquad l^\alpha H_{\alpha\beta\lambda\mu} = 0. \qquad (6.12)$$

---

[1]) В оригинальной терминологии Лихнеровича — double forme singulière.

Из уравнений (6.12) Лихнерович выводит следующие три следствия:

1) l^α изотропен (доказательство аналогично предыдущему);

2) $l^\alpha l^\beta_{;\alpha} = 0$, т. е. поле вектора l^α определяет конгруэнцию изотропных геодезических;

3) тензор $H_{\alpha\beta\gamma\delta}$ может быть представлен в виде

$$H_{\alpha\beta\lambda\mu} = b_{\alpha\lambda} l_\beta l_\mu + b_{\beta\mu} l_\alpha l_\lambda - b_{\alpha\mu} l_\beta l_\lambda - b_{\beta\lambda} l_\alpha l_\mu, \tag{6.13}$$

где

$$b_{\alpha\lambda} = b_{\lambda\alpha}, \qquad b_{\alpha\lambda} l^\lambda = 0.$$

Тогда, свертывая выражение (6.13) с $g^{\beta\mu}$, найдем, что тензор $H_{\alpha\lambda} = H_{\alpha\beta\lambda\mu} g^{\beta\mu}$ имеет вид

$$H_{\alpha\lambda} = \tau l_\alpha l_\lambda \qquad \left(\tau = b^\alpha_\alpha\right). \tag{6.14}$$

На основе приведенных результатов можно сформулировать критерий существования гравитационных волн по Лихнеровичу.

Критерий Лихнеровича. *Пространство — время* V_4 *описывает состояние полного гравитационного излучения, если его тензор Римана* $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ ($\neq 0$) *образует коэффициенты двойной особой формы, т.е. существует* (*изотропный*) *вектор* $l^\alpha \neq 0$, *удовлетворяющий уравнениям* (6.10) — (6.11). *Если такого вектора не существует, то гравитационное излучение отсутствует.*

Тензор Риччи для поля тяготения, удовлетворяющего критерию Лихнеровича, должен, как следует из (6.14), иметь вид

$$R_{\alpha\beta} = \tau l_\alpha l_\beta. \tag{6.15}$$

Обратно, из условий (6.15) и (6.10) следуют условия (6.11) и изотропность вектора l^α. Соответственно, из (6.15), (6.11) и условия изотропности l^α следует (6.10) [62].

3. Критерий Лихнеровича и классификация Петрова

Из формулы (6.15) очевидно, что при $\tau = 0$ критерий Лихнеровича определяет гравитационные волны в пустом пространстве — времени («чисто волновое» гравитационное поле). Тогда (см. Приложение I) уравнения (6.10) и (6.11) становятся эквивалентными: из одних однозначно следуют другие:

$$l_{[\lambda}R_{\alpha\beta]\gamma\delta} = 0 \leftrightarrow l^{\alpha}R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0. \tag{6.16}$$

Это означает, что чисто волновое гравитационное поле однозначно определяется любой одной из этих систем уравнений.

Как известно ([62], § 21; [68], § 6), пустое V_4 принадлежит к типу N диаграммы Пенроуза, если и только если существует векторное поле l^{α}, удовлетворяющее одной из систем (6.16). Таким образом, *все пространства V_4 типа N определяют чисто волновые гравитационные поля; обратно, класс полей чисто волнового типа исчерпывается полями типа N.*

При $\tau \neq 0$ в (6.15) мы получаем случай так называемого *полного гравитационного излучения*[1]. Классификация полей тяготения в этом случае производится на основе тензора Вейля (3.24), о чем уже говорилось в п. 3 гл. 3. Чтобы выяснить, какое место в этой классификации занимают поля полного гравитационного излучения по Лихнеровичу, докажем следующее вспомогательное утверждение: если в V_4 сигнатуры —2 существует вектор l^{α}, удовлетворяющий условиям Лихнеровича (6.10)—(6.11), то этот вектор удовлетворяет также уравнениям

$$\begin{aligned} l_{[\lambda}C_{\alpha\beta]\gamma\delta} &= 0, \\ l^{\alpha}C_{\alpha\beta\lambda\mu} &= 0, \end{aligned} \tag{6.17}$$

т. е. тензор Вейля в данном V_4 определяет двойную особую форму. Действительно, подставляя выражение (6.15) в тензор Вейля (3.24) и используя условия (6.10), (6.11), а также свойство изотропности вектора l^{α}, непосредственной проверкой убеждаемся в справедливости уравнений (6.17).

Можно показать (Лихнерович [62], § 21), что если некоторый тензор $H_{\alpha\beta\gamma\delta}$, обладающий всеми алгебраическими свойствами тензора кривизны в пустом пространстве,

$$\begin{aligned} &H_{\alpha\beta\gamma\delta} = -H_{\beta\alpha\gamma\delta} = -H_{\alpha\beta\delta\gamma} = H_{\gamma\delta\alpha\beta}, \\ &H_{\alpha[\beta\gamma\delta]} = 0, \qquad H_{\alpha\beta\gamma\delta}\, g^{\beta\delta} = 0, \end{aligned} \tag{6.18}$$

определяет двойную особую форму, то в бивекторном пространстве R_6 матрица $\| H_{ab} \|$ этого тензора приводится

---

[1]) В терминологии Лихнеровича — radiation totale.

к каноническому виду, характерному для типа N диаграммы Пенроуза (вырожденный тип 2 по классификации Петрова).

Пусть пространство V_4 удовлетворяет критерию Лихнеровича. Тогда по доказанному выше оно допускает существование вектора l^α, удовлетворяющего уравнениям (6.17). Принимая во внимание алгебраические свойства тензора Вейля (3.25)—(3.26) и используя результаты Лихнеровича, приходим к выводу, что тензор $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$ принадлежит к вырожденному типу 2 по классификации Петрова для полей тяготения общего вида. Таким образом, получаем следующую общую теорему: *пространство — время V_4, удовлетворяющее критерию полного гравитационного излучения Лихнеровича, принадлежит к вырожденному типу 2 с точки зрения алгебраической структуры тензора Вейля* [91].

4. Конформное отображение волновых гравитационных полей

В качестве примера, иллюстрирующего применимость критерия Лихнеровича, рассмотрим предпринятое Коноплевой [92, 93] исследование специального случая конформного отображения чисто волновых гравитационных полей. Пусть V_4 — пространство — время, определяемое условиями

$$R^{\mu}_{[\tau;\lambda]} = 0,$$
$$R^{\nu}_{\mu} = -4\lambda^2 C^{\nu}_{\cdot\tau\lambda\mu} R^{\tau\lambda},$$

где λ — гравитационная постоянная, $C^{\nu}_{\cdot\tau\lambda\mu}$ — тензор конформной кривизны Вейля [1]). Поскольку пространства Эйнштейна (3.7) тривиально удовлетворяют этим условиям, предположим, что данное V_4 — неэйнштейново про-

[1]) Эти соотношения были получены в рамках исследования гравитации с точки зрения метода компенсирующих полей типа Янга — Миллса в теории с лагранжианом

$$L = R + \frac{\lambda^2}{4\pi} R_{\mu\nu\tau\lambda} R^{\mu\nu\tau\lambda}.$$

В эйнштейновской теории их следует интерпретировать не как уравнения поля, а как условия, выделяющие некоторый класс гравитационных полей (включающий в себя, в частности, все пространства Эйнштейна).

странство, конформное некоторому пространству Эйнштейна V_4'. Условия осуществимости такого отображения можно привести к виду

$$R^{\mu}_{[\tau;\lambda]} = 2e^{-2\sigma} R'^{\cdot\cdot\mu\nu}_{\tau\lambda\cdot\cdot}\sigma_{\nu},$$

где $R'_{\tau\lambda\mu\nu}$ — тензор Римана для пространства V_4', а $\sigma_{\nu} \equiv \partial_{\nu}\sigma$. Отсюда следует, что V_4' удовлетворяет условию

$$R'^{\cdot\cdot\mu\nu}_{\tau\lambda\cdot\cdot}\sigma_{\nu} = 0,$$

т. е. V_4' есть пространство Эйнштейна вырожденного второго типа по Петрову, удовлетворяющее критерию чистого гравитационного излучения Лихнеровича, причем σ_{ν} — изотропный вектор, описывающий распространение фронта гравитационной волны.

Подобно тому, как в электродинамике уравнения

$$F_{[\mu\nu;\tau]} = 0$$

позволяют выразить тензор Максвелла $F_{\mu\nu}$ через вектор-потенциал A_{μ} и его первые производные, исходные уравнения

$$R_{\mu[\tau;\lambda]} \equiv \frac{1}{2} R^{\cdot\cdot\cdot\sigma}_{\tau\lambda\mu\cdot;\sigma} = 0$$

позволяют выразить тензор Риччи через вектор σ_{λ} и его первые производные:

$$R_{\mu\lambda} = -2\sigma_{\lambda;\mu} + 2\sigma_{\mu}\sigma_{\lambda} + \frac{1}{3}\varkappa g_{\mu\lambda}.$$

Зная, что вектор σ_{μ} — градиент, а также используя, по аналогии с электродинамикой, условия типа Лоренца $\sigma^{\mu}_{;\mu} = 2\varkappa/3$, получим волновое уравнение для вектора σ_{μ}:

$$g^{\alpha\beta}\sigma_{\mu;\alpha\beta} = 0.$$

Таким образом, вектор σ_{λ} в пространстве Эйнштейна V_4' удовлетворяет условию чисто волнового гравитационного поля по Лихнеровичу, а в конформном ему исходном пространстве V_4 описывает гравитационные волны в том же смысле, в каком вектор-потенциал электромагнитного поля удовлетворяет ковариантному волновому уравнению.